数理解析研究所講究録
335巻 1978年 33-41

Burgers乱流の相似則とrenormalization

相模工業大学　情報工学科　水島二郎

Burgers乱流の統計的諸性質をBurgers方程式の厳密解から出発して調べた。二つの仮定①乱流の速度場の相似性，②大きいスケールの運動の不変性 と renormalization の方法を用いた。結果として，エネルギーは低波数におけるエネルギースペクトルの形により，$t^{-2/3}$ ～ t^{-2} のべキで減衰することがわかった。

まず，Burgers方程式から出発する。Burgers方程式の厳密解の漸近形において，その漸近形が表わす多数のショックのうち任意の一つのショックをとりあげ，その一つのショックの形から，速度相関・エネルギースペクトルを求める。ここでは，一つのショックだけしか考えなかったので，ショックの集団運動の影響すなわちショックの衝突の効果が取り入れられていない。上で失なわれた衝突の効果は，乱流場の代表的

長さが$(t/t_0)^\alpha$に比例して増大することで表われると考える。ここでは，長さのスケールを$(t/t_0)^\alpha$で再規格化することにより衝突の効果を取り入れる。図式的に書くと，

$$l = l_0 \longrightarrow l = l_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^\alpha$$

(衝突なし)　　　　(衝突の効果で増大)

となり，諸量をたとえば $l \to \dfrac{l}{l_0(t/t_0)^\alpha}$, $v \to \dfrac{v}{V_0(t/t_0)^\alpha}$ $R \to R(t/t_0)^{2\alpha}$のように再規格化することにより衝突の効果を取入れる。再規格化で得られたエネルギースペクトルからエネルギー減衰則を導く。一方，Burgers方程式の厳密解の漸近形から直接エネルギー消散を計算することにより，エネルギー減衰則を求め，これを再規格化する。上の二通りの方法で得られたエネルギー減衰法則を等しいとおくことにより，パラメーターαを決定する。αの値が決まると，Burgers乱流のほとんど全ての統計量が自動的に求まる。

Burgers方程式を$t=t_0$における代表長さl_0，代表速度u_0で無次元化すると次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

ただし，$R\ (=\frac{u_0 l_0}{\nu})$ はReynolds数である。 (1)式の

$R \gg t \gg 1$ における厳密解の漸近形は，領域 $\frac{\xi_{i-1}+\xi_i}{2} < x < \frac{\xi_i+\xi_{i+1}}{2}$ において次のように表わせる。

$$u(x,t) = \frac{1}{t}[x-\frac{1}{2}(\eta_i+\eta_{i+1})] - \frac{1}{2t}(\eta_{i+1}-\eta_i)\times\tanh[\frac{R}{4t}(\eta_{i+1}-\eta_i)(x-\xi_i)]$$

(i: integer), (2)

ここで，ξ_i はショックフロントの座標，η_i はスロープと x 軸との交点である。

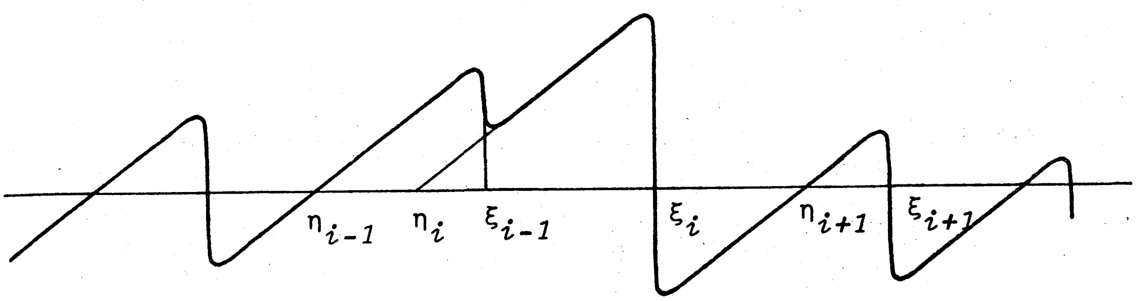

figure 1. Turbulent velocity field as a train of shock waves.

平均的な強さ，平均的な長さをもつ代表的ショックを考える。$-L_1 = (-\xi_i+\xi_{i-1})/2$, $L_2 = (\xi_{i+1}-\xi_i)/2$, $V = \eta_{i+1}-\eta_i$, $x = x-\xi_i$ とおく。 V はショックの強さの2乗平均，L_1+L_2 は1とみなせる。 この代表的ショックについて計算すると，次式が得られる。

$$u(x+r,t)-u(x,t) = \frac{r}{2t} - \frac{V}{2t}\{\tanh[\frac{RV}{4t}(x+r)]-\tanh[\frac{RV}{4t}x]\} \quad . \tag{3}$$

$t \gg r$とし，$\langle\ \rangle$を$[0, L]$での空間平均でおきかえると，

$$\begin{aligned}\langle(u(x+r,t)-u(x,t))^2\rangle &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_0^L (u(x+r,t)-u(x,t))^2 dx \\ &= \lim_{L\to\infty}\frac{N}{L}\int_{-L_1}^{L_2} (u(x+r,t)-u(x,t))^2 dx \\ &= \frac{NV^2}{Lt^2}[r\times\coth\frac{RV}{4t}r-\frac{4t}{RV}] \quad ,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}E(k,t) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle u(x+r,t)u(x,t)\rangle e^{ikr}dr \\ &= -\frac{1}{2\pi k^2}\int_0^{\infty}\frac{d^2}{dr^2}\langle u(x+r,t)u(x,t)\rangle\cos kr\, dr,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}E(k,t) &= \frac{1}{2\pi k^2}\frac{N}{L}\frac{V^2}{2t^2}\int_0^{\infty}\frac{d^2}{dr^2}[r\times\coth\frac{RV}{4t}r-\frac{4t}{RV}]\cos kr\, dr \\ &= \frac{N}{L}\frac{\pi}{R^2}\,\mathrm{cosech}^2\,\frac{2\pi t}{RV}k \quad ,\end{aligned} \tag{6}$$

となる。(6)式は$k \ll \frac{RV}{2\pi t}$において次のようになる。

$$E(k,t) = \frac{N}{L}\frac{V^2}{4\pi t^2}k^{-2} \quad . \tag{7}$$

逆に，$k \gg \frac{RV}{2\pi t}$では，次のようになる。

$$E(k,t) = \frac{N}{L}\frac{4\pi}{R^2}\exp(-\frac{4\pi t}{V}\frac{1}{R}k) \quad . \tag{8}$$

(7), (8) を再規格化すると，次のようになる。

$$E(k,t) = \frac{N}{L}\frac{V^2}{4\pi}\, t_0^{-\alpha} t^{-2+\alpha} k^{-2} \tag{9}$$

$$E(k,t) = \frac{N}{L}\frac{4\pi}{R^2}\frac{t^\alpha}{t_0^\alpha} \exp\left(-\frac{4\pi t_0^\alpha}{RV}\, t^{1-\alpha} k\right) \quad . \tag{10}$$

ここで，大きい渦の不変性の仮定

$$E(k,t) = k^a = \text{constant in time.} \tag{11}$$

を用いると，代表的波数k_0と代表的エネルギースペクトルの大きさE_0は次の時間依存性をもつ。 E_0，k_0は図2の2つの曲線の交点と考えてよい。

$$k_0 \propto t^{\frac{-2+\alpha}{a+2}} \quad , \tag{12}$$

$$E_0 \propto t^{\frac{(-2+\alpha)a}{a+2}} \quad . \tag{13}$$

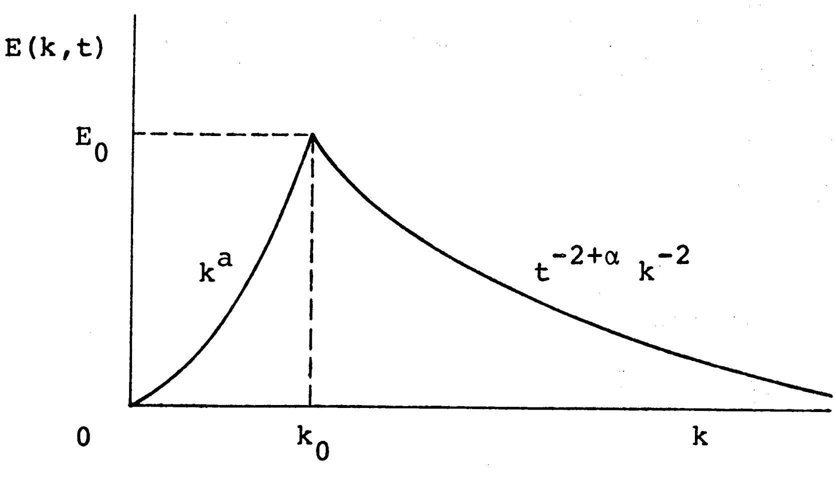

figure 2. Schematic energy spectrum.

さらに，次のエネルギースペクトルの相似性を仮定すると，

$$E(k,t) \propto E_0 f(k/k_0) \quad . \tag{15}$$

エネルギー減衰則

$$\mathcal{E}(t) \propto t^{\frac{(-2+\alpha)(a+1)}{a+2}} \quad , \tag{16}$$

が得られる。

一方，エネルギー減衰則は，エネルギー消散の計算から次のように求められる。

$$\mathcal{E}(t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L}\int_0^L u(x,t)^2 dx. \tag{17}$$

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L}\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)^2 dx = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{RL}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \quad . \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{RL}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx &= \frac{1}{RL}\sum_{i=1}^{N}\int_{\xi_i-\varepsilon}^{\xi_i+\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{RL}\sum_{i=1}^{N}\frac{R^2V^4}{8^2t^4}\int_{\xi_i-\varepsilon}^{\xi_i+\varepsilon} \operatorname{cosech}^4\left[\frac{RV}{4t}(x-\xi_i)\right]dx \\ &= \frac{N}{L}\frac{V^3}{12t^3} \quad .\end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\frac{N}{L}\frac{V^3}{12t^3} \quad . \tag{20}$$

(20)を再規格化し，積分すると$\mathcal{E}(t)$が求められる。

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\frac{N}{L}\frac{V^3}{12}\frac{1}{t_0^{2\alpha}}t^{-3+2\alpha} \tag{21}$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2(1-\alpha)} \frac{N}{L} \frac{V^3}{12} \frac{1}{t_0^{2\alpha}} t^{2(\alpha-1)} \quad . \tag{22}$$

二つの方法で求められたエネルギー減衰則(16)と(22)を比較して，次式が得られる。

$$\alpha = \frac{2}{a+3} \quad . \tag{23}$$

いくつかの a の値に対する α の値と，エネルギー減衰のべき p を table 1. に示す。

a	α	p
0	2/3	-2/3
1	1/2	-1
2	2/5	-6/5
3	1/3	-4/3
4	2/7	-10/7
⋮	⋮	⋮
∞	0	-2

table 1. Values of α and the power indices of the energy decay p.

次の積分量を定義する。

$$J = \int_0^\infty \langle u(x+r,t)u(x,t)\rangle \, dr \quad ,$$

$J \neq 0$ の場合は $a=0$ に対応。 この場合について Burgers

は次元解析で，$\mathcal{E}(t) \propto t^{-2/3}$ を導いており，table 1 と一致している。Yamamoto & Hosokawa の Monte Carlo 法の数値実験結果は table 1 と良く一致している。

速度微分の skewness は次のようにして求まる。

$$S_0(t) = \langle(\partial u/\partial x)^3\rangle / \langle(\partial u/\partial x)^2\rangle^{3/2} \quad . \tag{24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{RV^2}{8t^2} \operatorname{cosech}^2\{\frac{RV}{4t}(x-\xi_i)\} \quad . \tag{25}$$

$$\langle(\partial u/\partial x)^2\rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\int_0^L (\frac{\partial u}{\partial x})^2\, dx = \frac{N}{L}\,\frac{RV^3}{12t^3} \quad . \tag{26}$$

$$\langle(\partial u/\partial x)^3\rangle = -\frac{R^2V^5}{120t^5} \quad . \tag{27}$$

$$S_0(t) = \frac{\sqrt{3}}{5} R^{1/2}\, V^{1/2}\, t^{-1/2} \quad . \tag{28}$$

$$S_0(t) = \frac{\sqrt{3}}{5} R^{1/2}\, V^{1/2}\, \frac{1}{t_0^{\alpha}}\, t^{-1/2+\alpha} \quad . \tag{29}$$

同様に Taylor の microscale も計算できる。

$$\lambda^2 = \frac{\langle u^2\rangle}{\langle(\partial u/\partial x)^2\rangle} \quad . \tag{30}$$

$$\lambda^2 = -\frac{2}{R}\,\frac{\mathcal{E}(t)}{d\mathcal{E}(t)/dt} \quad . \tag{31}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} R^{-1/2} t^{1/2} \quad . \tag{32}$$

この λ を用いて定義する Reynolds 数 R_λ についても次のように求まる。

$$R_\lambda = R \langle u^2 \rangle^{1/2} \lambda$$
$$= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{N}{L} \frac{V^3}{12}\right)^{1/2} \frac{1}{t_0^\alpha} R^{1/2} t^{\alpha-1/2} \quad . \tag{33}$$

References

[1] K.Yamamoto and I.Hosokawa, Phys. Fluids 19, 1423 (1976).

[2] T.Tatsumi and S.Kida, J. Fluid Mech. 55, 659 (1972).

[3] J.M.Burgers, Statistical Models and Turbulence 41 (1972) (ed. M.Rosenblatt and C.Van Atta) Springer.