数理解析研究所講究録
336巻 1978年 117-125

超準解析を内蔵する二，三の集合論の紹介

東大 教養　斎藤 正彦

つぎの四つの論文の概略を紹介する：

[1] E. Nelson : Internal set theory. Bull. Amer. Math. Soc. 83-6 (1977) 1165-1198.
[2] K. Čuda : A nonstandard set theory. Comm. Math. Univ. Carolinae 17-4 (1976) 647-663.
[3] K. Hrbacek : Axiomatic foundations for nonstandard analysis. Fund. Math. 98 (1978) 1-19.
[4] K. Hrbacek : Nonstandard set theory. Preprint.

A. Robinson の超準解析はまず一つの構造を考え，それの拡大として広大モデルまたは飽和モデルを作る．しかし，集合論全部を一挙に超準化するためには，発想を逆転させる方がよい．すなわち，その対象，たとえば N は，はじめから有限自然数と無限大自然数とを両方もっていると考える．上記

の論文はすべてこの立場に立っている．

ZFC に少くとも一つの一項述語“standard”を追加し，いくつかの公理図を要請する．どの論文にも共通な三つの公理図は移行の原理，理想化または共起性の原理および標準化の原理である．

［1］は簡潔で現場向きだが，外集合を直接扱うことはできない．［2］は述語ではなく類定項Kを付加え，Kの元を標準元と呼ぶ．大体［1］と同じ結果をもたらし，外集合はKを使って semiset として扱える．しかし，公理の形は弱い．

［3］［4］ではもう一つの一項述語“internal”を追加し，内集合の世界は推移的であるとする．標準世界および内的世界にはもちろん ZFC を要請するが，外的世界すなわち全世界に ZFC を要請すると理論は矛盾する．置換公理を分出公理で置きかえれば，ZFC の保存拡大になる．その他，いろいろの変種が扱われている．

どの論文にも無限小解析，位相空間論，測度論の超準的取扱いが例示してある．

私個人としては，逆転した発想のもつ認識論的，教育論的な意味にも興味がある．

本稿は他人の仕事の紹介だから，証明は一切つけない．

§1 Nelson [1] の紹介

ZF の言語 $\mathcal{L}$ に一項述語 "standard" を付加える. t が項のとき, t(standard) は論理式である.

略記号 $\forall^{st} x\,[\phi(x,\cdots)] \equiv \forall x\,[x(st) \to \phi(x,\cdots)]$,

$\exists^{st} x\,[\phi(x,\cdots)] \equiv \exists x\,[x(st) \wedge \phi(x,\cdots)]$.

定義 standard を含まない論理式を内的論理式, st を含む論理式を外的論理式と言う. 論理式の全体を $\bar{\mathcal{L}}$ とする.

公理 ZFC の公理全部につぎの三つの公理図を付加える.

(T)(移行の公理) 内的論理式 $\phi(x,t_1,\cdots,t_k) \equiv \phi(x,\mathrm{t\!t})$ に対し,

$$\forall^{st}\mathrm{t\!t}\,[\forall^{st}x\,[\phi(x,\mathrm{t\!t})] \leftrightarrow \forall x\,[\phi(x,\mathrm{t\!t})]].$$

双対性により,

$$\forall^{st}\mathrm{t\!t}\,[\exists^{st}x\,[\phi(x,\mathrm{t\!t})] \leftrightarrow \exists x\,[\phi(x,\mathrm{t\!t})]].$$

(I)(理想元の存在または共起性の公理) 内的論理式 $\phi(x,y,\mathrm{t\!t})$ に対し,

$$\forall \mathrm{t\!t}\,[\forall^{st\,fin} z\, \exists x\, \forall y \in z\,[\phi] \leftrightarrow \exists x\, \forall^{st} y\,[\phi]].$$

(S)(標準化の公理) 必ずしも内的ない論理式 $\phi(z,\mathrm{t\!t})$ に対し,

$$\forall \mathrm{t\!t}\, \forall^{st} x\, \exists^{st} y\, \forall^{st} z\,[z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \phi(z,\mathrm{t\!t})].$$

3

以上の理論を IST と称する。

定理　$\exists F\,[\,F(\text{finite}) \wedge \forall y\,[\,y(st) \rightarrow y \in F\,]\,]$.

定義　内的論理式 ϕ に対し，その中の $\forall$, $\exists$ をすべて $\forall^{s}$, $\exists^{s}$ で置きかえたものを ϕ^{s} と書き，ϕ の標準世界への相対化と言う。定項を許容するときには，それらはすべて standard でなければならない。

定理　$\phi \in \mathcal{L}$ に対し，$\phi \leftrightarrow \phi^{s}$.

定理　$\forall x\,[\,x(st, fin) \longleftrightarrow \forall y\,[\,y \in x \rightarrow y(st)\,]\,]$.

系　無限集合は超準元をもつ。特に超準自然数＝無限大自然数が存在する。IST の中では，有限自然数と無限大自然数との境い目は認識できない。

定理（関係から標準写像を作ること，特に写像の延長）
X, Y を標準集合，$\phi(x, y, t)$ を論理式とする。このとき，

$$\forall t \Big[\ \forall^{s} x \in X\ \exists^{s} y \in Y\ [\,\phi(x, y, t)\,] \rightarrow \exists^{s} \tilde{y}\,(map : X \rightarrow Y)\ \forall^{s} x \in X\ [\,\phi(x, \tilde{y}(x), t)\,]\Big].$$

これは実用的な定理で，外的な命題を機械的に内的な命題に書き直すことができる。

例1　函数 f，実数 a がともに標準的のとき，《f が a で連続》という命題を考える。

4

$$\forall x\ [\, x \fallingdotseq a \to f(x) \fallingdotseq f(a)\,]$$

$$\equiv\ \forall x\, [\, \forall^{s}\delta \in \mathbb{R}^{++}\, [\, |x-a| \leq \delta\,] \to \forall^{s}\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}\, [\, |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon\,]]$$

$$\equiv\ \forall x\ \forall^{s}\varepsilon\ \exists^{s}\delta\ [\, |x-a| \leq \delta \to |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon\,]$$

$$\equiv\ \forall^{s}\varepsilon\ \exists^{s\,fin} z\ \forall x\ \exists \delta \in z\ [\quad \text{〃} \quad]$$

$$\equiv\ \forall^{s}\varepsilon\ \exists \delta\ \forall x\ [\quad \text{〃} \quad]$$

$$\equiv\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x\ [\quad \text{〃} \quad].$$

定理　IST は ZFC の conservative extension である。
証明は adequate ultralimit による。

IST は簡潔でないものである。確率論のキソ，強弱大数の法則等が例示してある。不便な点もあり，external set たとえば有限自然数の全体は直接には扱えない。Nelson はモデル理論を使っているが，semiset を使ってもよい。[3] では，外集合も set として扱える。

§2 Čuda [2] の紹介

BG の言語 $\mathcal{L}$ および類の公理，集合については ZFC の公理を置く。そのほか，class constant K を指定する。K に属する集合を standard と言う。類 X が集合 x に含まれるとき，X を semiset と言う。つぎの公理図を追加する。

5

(EE) *elementary equivalence* ≒ (T) set formula $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ に対し，

$$\forall^S x_1 \cdots \forall^S x_n [\phi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \phi^S(x_1, \cdots, x_n)].$$

(IE) *ideal elements* ≒ (I)

$$\forall^S x(\mathrm{set}) \exists^{fin} y [x \cap K \subset y].$$

(NE) *natural extension* ≒ (S)

$$\forall \mathbb{X} \subset K [\exists x [\mathbb{X} \subset x] \rightarrow \exists x \in K [\mathbb{X} = x \cap K]].$$

注意　(IE) は (I) より弱く，(NE) は (S) より強い．(NE) と (I) とは両立しない．

Čuda の公理から出る結論は，実質的には Nelson の場合とほとんど同じである．Nelson 流の方が現場数学者に使いやすい形になっている．

§3　Hrbacek [3] [4] の紹介

ZF の言語 $\mathcal{L}$ に二つの一項述語 standard, internal を付加える．internal でないものを non-internal，両方合わせて external と言う．太文字は external，ギリシャ文字は internal，ローマ字は standard を表わす．

略記号　$\forall^I \xi [\phi(\xi, \cdots)] \equiv \forall \mathbb{x} [\mathbb{x}(\mathrm{int}) \rightarrow \phi(\mathbb{x}, \cdots)]$,

$\exists^I \xi [\phi(\xi, \cdots)] \equiv \exists \mathbb{x} [\mathbb{x}(\mathrm{int}) \wedge \phi(\mathbb{x}, \cdots)]$.

6

$\phi \in \mathcal{L}$ に対し，中の $\forall$，$\exists$ をすべて $\forall^I$，$\exists^I$ に置きかえたものを ϕ^I と書く．ϕ^S も同様．

つぎの三群の公理系を要請する．

(A) ϕ が ZFC の公理なら，ϕ^S は公理である．

(B1) $\forall x\, [\, x(st) \to x(int)\,]$.

(B2) $\forall x\, \forall^I \xi\, [\, x \in \xi \to x(int)\,]$．すなわち，内集合の全体は推移的である．

(B3) embedding ≒ (T)　$\phi \in \mathcal{L}$ に対し，

$$\forall^S x_1 \cdots \forall^S x_n [\, \phi^I(x_1, \cdots, x_n) \longleftrightarrow \phi^S(x_1, \cdots, x_n)\,]。$$

すなわち，内集合の理論は標準集合の理論の elementary extension である．

(B4) weak saturation ≒ (I)　$\phi(x, b, A, t) \in \mathcal{L}$ に対し，$t = (t_1, \cdots, t_n)$

$$\forall^S t\, \forall^S A\, [\, \forall^{S\,fin} a \subset A\, \exists^S b\, \forall^S x \in a\, [\, \phi^S(x, b, A, t)\,]$$

$$\to \exists^I \beta\, \forall^S x \in A\, [\, \phi^I(x, \beta, A, t)\,]\,].$$

定義　external set $\mathbb{A}$ が standard size または small とは，

$$\exists^S A\, \exists f\, (\, \text{surjection} : A \to \mathbb{A}\,).$$

(B4$^+$) strong saturation　$\phi \in \mathcal{L}$ に対し，$(\, \eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)\,)$

$$\forall^I \eta\, \forall^{small} \mathbb{A}\, [\, \forall^{fin} a \subset \mathbb{A}\, \exists^I \beta\, \forall^I \xi \in a\, [\, \phi^I(\xi, \beta, \eta)\,]$$

$$\to \exists^I \beta\, \forall^I \xi \in \mathbb{A}\, [\, \phi^I(\xi, \beta, \eta)\,]\,].$$

7

(C0) transfer ≒ (S)

$$\forall A \exists^{S} B \forall^{S} x\, [x \in A \leftrightarrow x \in B].$$

(C1) ～ (C4) は，それぞれ external sets に関する外延性，非順序対，和集合，分出性である．

以上の公理系（B4 ではなく $B4^{+}$）をもつ理論を NST と書く．

定理　NST は，それを standard sets に相対化したもの（＝ZFC）の conservative extension である．

さらに，external sets に関するいくつかの公理を考える．

(P) power set　$\forall x \exists y \forall z\, [z \in y \leftrightarrow z \subset x].$

(R) 置換公理　$\phi \in \mathcal{L}$ に対し，($\vec{t} = (t_1, \cdots, t_n)$)

$$\forall \vec{t}\, \forall A \exists B \forall x \in A [\exists y [\phi(x, y, A, \vec{t})] \to \exists y \in B [\phi]].$$

(C) 選択公理．

(Σ_1-R)　Σ_1-formula に関する置換公理．

(small R)　small sets に関する置換公理．すなわち，(R) において $\forall$, $\exists$ を $\forall^{small}$, $\exists^{small}$ に置きかえたもの．

定理 1)　NST(1) ＝ NST ＋ (R) は（ZFC の）conservative extension である．

8

2) NST(2) = NST + (P) + (C) も conservative extension.

3) NST + (Σ_1-R) + (P) は inconsistent.

4) NST + (Σ_1-R) + (C) も inconsistent.

5) NST + (small R) + (P) は non-conservative extension.

6) もし ZFC + $\exists\lambda(\lambda =$ strongly inaccessible & $V_\lambda \models$ ZFC$)$ が consistent なら，NST(3) = NST + (small R) + (P) + (C) も consistent である．

この論文は[1]のように実用的と言うよりは，むしろ諸理論の間の関係に意義がある．しかし，最近の超準数学，特に Loeb, Anderson, Keisler 等の確率論研究では，外集合が理論の場としてフルに使われている．だから Nelson や Čuda のものよりも自分の理論，中でも NST(2) や NST(3) の方がすぐれている，と Hrbacek は書いている．なお，[4]は[3]の解説である．

9