数理解析研究所講究録
336巻 1978年 101-116

Type 2 object での recursion

名大 理　　篠田 寿一

1.　Kleene [3] による finite type の recursion theory を type 2 object に制限したものを考える. ω の元を type 0 object, ω^ω の元を type 1 object, $\{F \mid F : \omega^\omega \to \omega\}$ の元を type 2 object という. type 0 object を $a, b, c, \cdots$, type 1 object を $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, type 2 object を $F, G, H, \cdots$ で表わすことにする. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots$ により $(a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ のように type 0 および type 1 の変数の有限列を表わすものとする. ω の部分集合に対して,

$$\Pi_1^1 = \Sigma_1 \text{ on } L(\omega_1), \quad \Delta_1^1 = \Delta_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

なる関係はよく知られているが, これは Kleene の object E での recursion theory の言葉でいえば,

$$E\text{-semirecursive} = \Sigma_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

$$E\text{-recursive} = \Delta_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

となるが, これを一般の type 2 object の場合に拡張しよう

というのが目標である.

type 2 object F に対して、次のような scheme により導入される partial function を partial F-recursive function という:

Scheme	Index
(S1) $\varphi(x,\mathfrak{a}) \simeq x+1$	$\langle 1 \langle n_0+1, n_1\rangle\rangle$

ここで、n_0 (n_1) は $\mathfrak{a}$ に含まれる type 0 (type 1) 変数の個数である. 以下の各 scheme においても同様.

(S2) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq q$	$\langle 2 \langle n_0, n_1\rangle q\rangle$
(S3) $\varphi(x,\mathfrak{a}) \simeq x$	$\langle 3 \langle n_0+1, n_1\rangle\rangle$
(S4) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq \psi(\chi(\mathfrak{a}),\mathfrak{a})$	$\langle 4 \langle n_0\ n_1\rangle p. q\rangle$

ここで, p は ψ の index, q は χ の index である.

(S5) $\varphi(a,b,x,y,\mathfrak{a}) = \begin{cases} a & \text{if } x=y \\ b & \text{if } x\neq y \end{cases}$ $\qquad \langle 5 \langle n_0+4. n_1\rangle\rangle$

(S6) $\varphi(x,y,\mathfrak{a}) \simeq S'(x,y)$ $\qquad \langle 6 \langle n_0+2, n_1\rangle\rangle$

ここで、$S'(x,y) = \langle 4, [(x)_2], x, \langle 2, [(x)_2], y\rangle\rangle$

(S7) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq \psi(\mathfrak{a}_1)$ $\qquad \langle 7 \langle n_0, n_1\rangle j\ k\ p\rangle$

ここで $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}_1$ の第 k 番目の type j の変数を先頭に出したものである.

(S8) $\varphi(x,\alpha,\mathfrak{a}) \simeq \alpha(x)$ $\qquad \langle 8 \langle n_0+1, n_1+1\rangle\rangle$

(S9) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq F(\lambda x\, \psi(x,\mathfrak{a}))$ $\qquad \langle 9 \langle n_0, n_1\rangle, p\rangle$

(S10) $\varphi(x, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq \{x\}^F(\mathfrak{a})$ $\langle 10 \langle n_0+m_0, n_1+m_1 \rangle \langle n_0\, n_1 \rangle\rangle$

ここで $\{x\}^F$ は index x の part. F-rec. func. また $\mathfrak{b}$ は m_0 個の type 0 変数, m_1 個の type 1 変数からなっている.

F-recursive function, F-recursive predicate などは通常のごとく定義される.

定理 1.1 primitive recursive function S^m で

$$\{S^m(z, x_1, \cdots, x_m)\}^F(\mathfrak{a}) \simeq \{z\}^F(x_1, \cdots, x_m, \mathfrak{a})$$

となるものが存在する.

これから直ちに次の定理が得られる.

定理 1.2 $\psi(z, \mathfrak{a})$ が part. F-rec. func. ならば,

$$\{e\}^F(\mathfrak{a}) \simeq \psi(e, \mathfrak{a})$$

なる e が存在する.

この定理 1.2 を F-Recursion Theorem という.

2. E により特に

$$E(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists n\, \alpha(n) = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる type 2 object を表わす. E が F-recursive であるとき, F を normal object という. 以下 type 2 object としては normal なものばかりを考える. $\{z\}^F(\mathfrak{a})\downarrow$ のとき, ordinal $|z, \mathfrak{a}|^F$ を次のように定義する:

(1) $(z)_0 = 1, 2, 3, 5, 6, 8$ のとき，$|z, \mathfrak{a}|^F = 0$

(2) $(z)_0 = 4$ のとき，$|z, \mathfrak{a}|^F = \max(|(z)_3, \mathfrak{a}|^F, |(z)_2, \{(z)_3\}^F(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}|^F) + 1$

(3) $(z)_0 = 7$ のとき，$|z, \mathfrak{a}|^F = |(z)_4, \mathfrak{a}_1|^F + 1$

(4) $(z)_0 = 9$ のとき，$|z, \mathfrak{a}|^F = \sup_{n<\omega}(|(z)_2, n, \mathfrak{a}|^F + 1)$

(5) $(z)_0 = 10$ のとき，$|z, x, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}|^F = |x, \mathfrak{a}|^F + 1$

また $\{z\}^F(\mathfrak{a})\uparrow$ のときには $|z, \mathfrak{a}| = \infty$ としておく．次の定理は normal type 2 object での recursion theory において基本的なものである．

定理 2.1 (Gandy) 次のような part. F-rec. func. $\chi(z, \mathfrak{a}, w, \mathfrak{f})$ が存在する：

$\{z\}^F(\mathfrak{a})\downarrow$ または $\{w\}^F(\mathfrak{f})\downarrow$ ならば，$\chi(z, \mathfrak{a}, w, \mathfrak{f})\downarrow$ であって

$$\chi(z, \mathfrak{a}, w, \mathfrak{f}) = \begin{cases} 0 & \text{if } |z, \mathfrak{a}|^F \leqq |w, \mathfrak{f}|^F \\ 1 & \text{if } |z, \mathfrak{a}|^F > |w, \mathfrak{f}|^F \end{cases}$$

が成り立つ．

この定理の系として以下のものが得られる．(これらの証明は Hinman [2] の Chap VI を参照)．

predicate $P(\mathfrak{a})$ は part. F-rec. func. の domain として表わされるとき，F-semirecursive とよばれる．これは通常の recursion theory における recursively enumerable に対応するものである．従って F-recursively enumerable ともいわれる．

<u>系 2.2</u>　$P(x,\mathfrak{a})$ が F-semirec. ならば，part. F-rec. func. $\theta(\mathfrak{a})$ で

$$\exists x P(x,\mathfrak{a}) \longleftrightarrow \theta(\mathfrak{a})\downarrow$$

$$\exists x P(x,\mathfrak{a}) \longrightarrow P(\theta(\mathfrak{a}),\mathfrak{a})$$

を満たすものが存在する．

<u>系 2.3</u>　$P(x,\mathfrak{a})$ が F-semirec. ならば $\exists x P(x,\mathfrak{a})$ も F-semirec. である．

<u>系 2.4</u>　P が F-rec. $\Leftrightarrow$ P, $\neg P$ が F-semirec.

<u>系 2.5</u>　φ が part. F-rec. $\Leftrightarrow$ φ のグラフが F-semirec.

これらから，F-semire. set に対する Reduction Theorem，co-F-semirec. set に対する Separation Theorem が成り立つ．また次のような Luckham の定理の一般化が成り立つ．

<u>系 2.6</u>　$A \subseteq \omega$ が F-semirec. な無限集合ならば，A は無限部分集合で F-rec. なものを含む．

（証明）　F-semirec. predicate $\forall m \exists n [m<n \,\&\, n\in A]$ に対し系 2.2 を用いればよい．⊠

<u>定理 2.7</u>　$Q_1,\cdots,Q_m$ が F-semirec. で，$\Phi(x,Q_1,\cdots\cdots,Q_m,S)$ が $Q_1,\cdots,Q_m,S$ positive formula ならば，

Φによって定義される monotone operator の最小の fixed point I_Φ は F-semirec. である.

(証明) $P(z,x) \equiv \Phi(x, Q_1, \cdots, Q_m, \{y \mid |z,z,y|^F < |z,z,x|^F\})$ とすると, P は F-semirec. 従って

$$P(z,x) \longleftrightarrow \{e\}^F(z,x)\downarrow$$

となる e が存在する. そこで $Q(x) \equiv P(e,x)$ とすると, Q は F-semirec. である. $|x|_\Phi$ に関する帰納法により,

$$x \in I_\Phi \longrightarrow Q(x)$$

また $|e,e,x|^F$ に関する帰納法により

$$Q(x) \longrightarrow x \in I_\Phi$$

がいえる. 従って $I_\Phi = Q$ となって, I_Φ が F-semirec. であることがいえた. ⊠

3. Shoenfield [5] は次のような ordinal の notation system (O^F, $|\ |_0^F$, $<_0^F$, H_a^F) を定義した.

(1) $1 \in O^F$, $|1|_0^F = 0$, $\forall x(\neg x <_0^F 1)$, $H_1^F = \omega$

(2) $a \in O^F$ ならば, $b = 2^a \in O^F$ であって, $|b|_0^F = |a|_0^F + 1$, $x <_0^F b \leftrightarrow x <_0^F a \vee x = a$, $H_b^F = \{x \in \omega \mid F(\lambda n\{(x)_0\}^{H_a^F}(n)) \simeq (x)_1\}$

(3) $a \in O^F$ であって, $\varphi = \lambda n\{e\}^{H_a^F}(n)$ が total かつ $\varphi(0) = a$, $\forall n[\varphi(n) \in O^F \ \&\ \varphi(n) <_0^F \varphi(n+1)]$ ならば,

$b = 3^a \cdot 5^e \in O^F$ であって，$|b|_0^F = \sup_{n<\omega} |\varphi(n)|_0^F$，$x <_0^F b \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \exists n\ x <_0^F \varphi(n)$，$H_b^F = \{ x \in \omega \mid (x)_1 \in H^F_{\varphi((x)_0)} \}$.

定理 3.1 (Shoenfield) $A \subseteq \omega^n$ に対して，

A が F-rec. $\Leftrightarrow \exists a \in O^F$ [A is rec. in H_a^F]

定理 3.2 (Shoenfild) 次のような prim. rec. func. L が存在する：$a, b \in O^F$，$|a|_0^F \leqq |b|_0^F$ ならば，H_a^F は recursive in H_b^F with index $L(a, b)$.

次の２つの Lemma は通常の Recursion Theorem および Course-of-values recursion の適用によって容易に証明できる.

補題 3.3 適当に prim. rec. func. η をとれば，各 $a \in O^F$ に対し，$\lambda x \{\eta(a)\}^F(x)$ は H_a^F の特性関数になる.

補題 3.4 次のような prim. rec. func. π が存在する：$a \in O^F$ ならば，$\lambda x \{\pi(a)\}^F(x)$ は $\{x \in O^F \mid x <_0^F a\}$ の特性関数である.

定理 3.5 $<_0^F$ は F-semirec. predicate である.

（証明）S-positive formula $\Phi(x, a, S)$ を次のように定める：

$$\Phi(x, a, S) \equiv S(1, 2) \,\&\, \{ [a = 2^{(a)_0} \,\&\, (a)_0 \neq 0 \,\&\, (x = (a)_0$$
$$\vee\, S(x, (a)_0))] \vee [a = 3^{(a)_1} 5^{(a)_2} \,\&\, a \neq 1$$
$$\&\, \lambda t \{\eta((a)_1)\}^F(t) \text{ is total} \,\&\, \forall n (\{(a)_2\}^{\lambda t \{\eta((a)_1)\}^F(t)}(n)$$

is defined) & $\{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(0) = (a)_1$

& $\forall n\, S(\{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(n), \{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(n+1))$

& $\exists n\, S(x, \{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(n))\,]\,\}$

上の補題および $<_0^F$ の定義から分かるように，$<_0^F = I_\Phi$.
従って、定理2.7から $<_0^F$ は F-semirec. である. ⊠

<u>系 3.6</u>　O^F は complete F-semirec. set である.

（証明）$a \in O^F \longleftrightarrow a = 1 \vee 1 <_0^F a$ であるから、O^F は F-semirec. である. Shoenfield による定理3.1の証明を検討することにより、prim. rec. func. θ で、

$$\{z\}^F(a_1, \cdots, a_n)\downarrow \longleftrightarrow \theta(z, \langle a_1, \cdots, a_n\rangle) \in O^F$$

なるものが存在する. 従って $P \subseteq \omega$ が F-semirec. ならば
$P(x) \longleftrightarrow \{e\}^F(x)\downarrow$ と表わせるから

$$P(x) \longleftrightarrow \theta(e, \langle x\rangle) \in O^F$$

故に O^F は complete F-semirec. set である. ⊠

ω_1^F により最初の non F-recursive ordinal を表わすことにする. すなわち

$$\omega_1^F = \sup\{o(\prec) \mid \prec \subseteq \omega\times\omega \text{ is an F-rec. well-ordering}\}$$

このとき，

<u>定理 3.7</u>　$\sup\{|a|_0^F : a \in O^F\} = \omega_1^F$

（証明）補題3.4により，$a \in O^F$ ならば，$<_0^F$ を $\{x \mid x <_0^F b\}$ に制限したものは order type $|a|_0^F$ の F-rec.

well-ordering になる. 従って $|a|_0^F < \omega_1^F$. 逆に $<\subseteq \omega\times\omega$ を任意の F-rec. well-ordering とすると、定理 3.1 により

$$\exists a \in \mathcal{O}^F \quad < \text{ is recursive in } H_a^F$$

従って $o(<) < \omega_1^{H_a^F}$. $\mathcal{O}^{H_a^F}$ を Kleene の notation system $\mathcal{O}$ を H_a^F に相対化したものとすると, Recursion Theorem を用いることにより、次のような prim. rec. func. π がとれる:

(i) $x \in \mathcal{O}^{H_a^F} \rightarrow \pi(x) \in \mathcal{O}^F$

(ii) $|x|_0^{H_a^F} \leqq |\pi(x)|_0^F$

従って $o(<) < \omega_1^{H_a^F} \leqq \omega_1^F$. $\boxtimes$

<u>補題 3.8</u> 次のような prim. rec. func. $\varphi_<$, $\varphi_\leqslant$ が存在する: $a \in \mathcal{O}^F$ ならば, $\lambda x\{\varphi_<(a)\}^F(x)$ は $\{x\in\mathcal{O}^F : |x|_0^F < |a|_0^F\}$ の特性関数である. ($\varphi_\leqslant$ は $<$ を $\leqq$ にかえたもの)

これは補題 3.3, 3.4の証明と同様に, Recursion Th. と Course-of-values recursion の適用により証明できる.

<u>定理 3.9</u> (Boundedness Theorem)

$\theta : \omega \rightarrow \omega$ が F-rec. func. で $A = \{a\in\omega \mid \theta(a)\in\mathcal{O}^F\}$ ならば,

$$A \text{ が F-rec.} \iff \sup_{a\in A} |\theta(a)|_0^F < \omega_1^F$$

(証明) $\Rightarrow$. もし $\sup_{a\in A} |\theta(a)|_0^F = \omega_1^F$ ならば,

$$b \notin \mathcal{O}^F \longleftrightarrow \forall a\, [a\in A \rightarrow \{\varphi_<(\theta(a))\}^F(b) \simeq 1]$$

従って $\neg O^F$ は F-semirec. である. 系2.4により O^F は F-rec. になる. これは O^F が complete F-semirec. set であることに反する.

$\Leftarrow$. $\sup_{a\in A}|\theta(a)|_0^F < |b|_0^F$ なる $b\in O^F$ をとれば,

$$a\in A \longleftrightarrow \{\varphi_<(b)\}^F(\theta(a))=0$$

従って A は F-rec. である. ⊠

4. ここでは, $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ は順序数を表わすものとする. $\mathfrak{F}_1,\cdots,\mathfrak{F}_8$ を Gödel [6] の operation とする. これらに

$$\mathfrak{F}_9(x,y)=F\cap x$$

を付け加えることによりGödel と同様にして, F-constructible sets が定義できる. すなわち $J: 10\times On\times On \to On$ を Gödel の J を modify したものとし, $J(i,\alpha,\beta)=\gamma$ のとき $N(\gamma)=i$, $K_1(\gamma)=\alpha$, $K_2(\gamma)=\beta$ とする. そして,

$$C_F(\gamma)=\{C_F(\delta)\mid \delta<\gamma\} \quad \text{if } N(\gamma)=0$$

$$C_F(\gamma)=\mathfrak{F}_i(C_F(K_1(\gamma)),\ C_F(K_2(\gamma))) \quad \text{if } N(\gamma)=i>0$$

とする. $L_F(\omega_1^F)=\{C_F(\gamma)\mid \gamma<\omega_1^F\}$ とおく. 今 $a\in O^F$ に対して, $C_F(|a|_0^F)$ を簡単のため C_a と書くことにする.

<u>補題 4.1</u> $J^+(i,a,b,c)\equiv i<10\ \&\ a,b,c\in O^F\ \&\ J(i,|a|,|b|)=|c|$

$J^-(i,a,b,c)\equiv i<10\ \&\ a,b,c\in O^F\ \&\ J(i,|a|,|b|)\neq|c|$

とすると J^+, J^- は F-semirec. である.

（証明）　$J(i,\alpha,\beta)=\gamma$ の inductive definition を O^F の元で翻訳したものを $\Phi(i,a,b,c,S)$ とすると Φ は S-positive になる．そして $J^+=I_\Phi$ であるから定理2.7により J^+ は F-semirec. である．

$$J^-(i,a,b,c)\equiv c\in O^F\ \&\ \exists c'[J^+(i,a,b,c')\ \&\ c\neq c']$$

であるから J^- も F-semirec. である．$\boxtimes$

<u>補題 4.2</u>　$N^+(c,i)\equiv c\in O^F\ \&\ N(|c|)=i$

$$N^-(c,i)\equiv c\in O^F\ \&\ N(|c|)\neq i$$

とすると N^+, N^- は F-semirec. である．K_1^+, K_1^-, K_2^+, K_2^- についても同様．

（証明）　$N^+(c,i)\longleftrightarrow\exists a,b\ J^+(i,a,b,c)$ であるから，N^+ は F-semirec.　また $N^-(c,i)\leftrightarrow\exists i'[J^+(i',a,b,c)\ \&\ i\neq i']$ であるから N^- も F-semirec．$\boxtimes$

<u>補題 4.3</u>　$P_\in^+(a,b)\equiv a,b\in O^F\ \&\ C_a\in C_b$

$$P_\in^-(a,b)\equiv a,b\in O^F\ \&\ C_a\notin C_b$$

$$P_=^+(a,b)\equiv a,b\in O^F\ \&\ C_a=C_b$$

$$P_=^-(a,b)\equiv a,b\in O^F\ \&\ C_a\neq C_b$$

とするとこれらはすべて F-semirec. である．

（証明）4.1, 4.2 を用いこれらを同時に定義する positive inductive operator をとる．定理2.7によりこれらはすべて F-semirec. である．$\boxtimes$

<u>補題 4.4</u>　Φ が $\Delta_0(F)$-formula ならば、

$$P^+_\Phi(a_1,\cdots,a_n) \equiv a_1,\cdots,a_n \in O^F \,\&\, \Phi(C_{a_1},\cdots,C_{a_n})$$

$$P^-_\Phi(a_1,\cdots,a_n) \equiv a_1,\cdots,a_n \in O^F \,\&\, \neg\Phi(C_{a_1},\cdots,C_{a_n})$$

は F-semirec. である.

（証明）まず Φ が F を含まない場合を証明する. Φ の構成に関する帰納法による. $\Phi = \neg\Psi$ のとき, $P^+_\Phi \equiv P^-_\Psi$, $P^-_\Phi \equiv P^+_\Psi$. $\Phi = \Psi \vee \Theta$ のとき, $P^+_\Phi \equiv P^+_\Psi \vee P^+_\Theta$, $P^-_\Phi \equiv P^-_\Psi \,\&\, P^-_\Theta$. $\Phi(v) = \exists w \in v\, \Psi(w)$ のとき,

$$P^+_\Phi(a) \equiv \exists b\, [\, P^+_\in(b,a) \,\&\, P^+_\Psi(b)\,]$$

$$P^-_\Phi(a) \equiv \forall b\, [\, P^-_\in(b,a) \vee P^-_\Psi(b)\,]$$

次に Φ が F を含む場合を示す. induction step は上と同じだから, $\Phi(v) = F(v)$ の場合を示せばよい.

$$P^+_\Phi(a) \equiv a \in O^F \,\&\, C_a \text{ is a function } \&\, \exists e\, [\, C_a = \lambda n\{e\}^F(n) \,\&\, F(\lambda n\{e\}^F(n)) = 0\,]$$

$$P^-_\Phi(a) \equiv a \in O^F \,\&\, [\, C_a \text{ is a function} \to \exists e\, (C_a = \lambda n\{e\}^F(n) \,\&\, F(\lambda n\{e\}^F(n)) = 1\,]$$

従って上に証明したことを用いて P^+_Φ, P^-_Φ は F-semirec. であることがわかる. ⊠

transitive set A は $\langle A, \in, A\cap F\rangle$ が KP の model になるとき F-admissible set であるという. $L(\omega_1)$ が admissible であると同様に次の定理が成り立つ.

<u>定理 4.5</u>　$L_F(\omega_1^F)$ は F-admissible である．

（証明）$L_F(\omega_1^F)$ が Δ_0-Collection を除いた KPの公理を満たすことは，L が ZF の model になることの証明と同様にして証明される（Gödel [6]）．そこで $L_F(\omega_1^F)$ が Δ_0-Collection を満たすことを証明する．$\Phi(x, y)$ を任意の $\Delta_0(F)$ formula，$a \in O^F$ とし，

$$\langle L_F(\omega_1^F), \in, F \cap L_F(\omega_1^F) \rangle \models \forall x \in C_a \, \exists y \, \Phi(x, y)$$

が成り立つものとする．$A = \{x \in O^F \mid x <_0^F a\}$ とすると，A は F-rec. であって

$$\forall x \in A \, \exists y \, [P_\in^-(x, a) \vee P_\Phi^+(x, y)]$$

系 2.2 により F-rec. func. $\theta(x)$ で

$$\forall x \in A \, [P_\in^-(x, a) \vee P_\Phi^+(x, \theta(x))]$$

$$x \notin A \rightarrow \theta(x) = 0$$

なるものが存在する．θ は

$$x \in A \longleftrightarrow \theta(x) \in O^F$$

を満たすから Boundedness Theorem により $\sup_{x \in A} |\theta(x)|_0^F < \omega_1^F$．そこで $b \in O^F$ を $\sup_{x \in A} |\theta(x)|_0^F < |b|_0^F$，$N(|b|_0^F) = 0$ なるようにとれば，

$$\forall x \in C_a \, \exists y \in C_b \, \Phi(x, y)$$

従って Δ_0-Collection が成り立つ．⊠

$\mathcal{A} = \langle L_F(\omega_1^F), \in, F \cap L_F(\omega_1^F) \rangle$ とすると，

<u>定理 4.6</u>　$P \subseteq \omega$ に対し，

(1)　P が F-rec. $\Longleftrightarrow$ P は Δ_1 on $\mathcal{A}$

(2)　P が F-semirec. $\Longleftrightarrow$ P は Σ_1 on $\mathcal{A}$

（証明）　(1) は (2) から直ちに出るから (2) を証明すればよい．

$\Rightarrow$．$\mathcal{A}$ での Second Recursion Theorem (Barwise [1] Chap. V 参照) を使えば，

$$\{z\}^F(a_1, \cdots, a_n) \simeq b$$

は Σ_1 on $\mathcal{A}$ である．

$\Leftarrow$．$P(n) \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \exists v\, \Phi(v, n)$ なる $\Delta_0(F)$-formula Φ をとる．recursive function $\theta(n)$ を

$$\theta(n) \in O^F, \quad C_{\theta(n)} = n$$

なるようにとれば，

$$P(n) \longleftrightarrow \exists a\, P^+_\Phi(a, \theta(n))$$

従って P は F-semirec. である．⊠

$\langle C_F(\kappa), \in, F \cap C_F(\kappa) \rangle$ が admissible であるとき，κ を F-admissible ordinal という．

<u>定理 4.7</u>　ω_1^F は ω の次の F-admissible ordinal である．

（証明）　κ を F-admissible ordinal とする．$C_F(\kappa)$ の中で Second Recursion Theorem を用いることにより

$$\{z\}^F(a_1, \cdots, a_n) \simeq b$$

は Σ_1 on $C_F(\varkappa)$ となる．従って特に O^F は Σ_1 on $C_F(\varkappa)$．故に $\omega_1^F \leqq \varkappa$．⊠

F-semirec. set $M \subseteq \omega$ は

(i) $\omega - M$ は無限

(ii) $S \subseteq \omega$ が F-semirec. $\Rightarrow$ $S-M$ または $\omega-(S \cup M)$ が有限

なる条件を満たすとき，maximal とよばれる．Kreisel-Sacks [4] は maximal Π_1^1 set の存在を示したが、それと同様にして，

定理 4.7 maximal F-semirec. set が存在する．

参考文献

[1] Barwise: Admissible Sets and Structures, Springer (1975)

[2] Hinman: Recursion-Theoretic Hierarchies, Springer (1978)

[3] Kleene: Recursive functionals and quantifiers of finite type I, Tras. Amer. Math. Soc. 61 (1959) 1-52

[4] Kreisel - Sacks : Metarecursive sets, Jour. Symb. Log. 30 (1965) 318 – 338

[5] Shoenfield ; A hierarchy based on a type 2 object, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968)

[6] Gödel : The Consistency of the Continuum Hypothesis, Ann. Math. Studies 3 (Princeton Univ. Press).