数理解析研究所講究録
336巻 1978年 53-64

圏論の集合論的基礎づけに関するノート
とくに"Z_0 in ZF"について

九大 工学部 倉田令二朗

0. はじめに. Foundationの種々の試み

0.1 ZF, BGの不十分.

Zermelo-Fraenkel set theoryではcategory of all sets (all groups) が考えられない. それはBernays-Gödel set theoryでは考えられるが任意のlarge category A, Bに対するFunctor category A^Bが考えられない. これがCategory theory誕生とともに始まった基礎づけの問題であり, これに対し種々のapproachがある.

0.2. Grothendieck universeは理論的には満足すべきものだが, 集合論として異常に強すぎるうらみがある.

ただし「問題ごとにuniverseを変更する点でallの意味が不確定となる」というMaclane [M I]の批判は当らない. syntacticalなsystemにおけるall, existの意味はつねに不確定であるというがmodel theoryの結論の一つであるからである.

0.3 弱い理論 0.2 の方向とは反対に、working mathematics にとっては——category 論の基礎づけにとっても——ZF より弱い理論で十分であるとの指摘が Lawvere, Maclane [MI] その他によってなされてきた。

実際 working mathematics は大ていの場合 自然数論上の comprehension axiom をもつ type-theory で十分である。

本論で扱う Z_0 はそれに対応する集合論である。

Lawvere set theory は Category 一元論によるそれと同値な理論である。

他方、ZF に基礎をおきつつも universe は一つで足りるとの主張があり (Feferman, Maclane [MII])、Lawvere の Category of Categories はその category 一元論的表現である。

しかし、けっきょくは、さまざまな Ω に応ずる Category of Categories of Categories …… を考えざるを得ず、狭すぎると思われる。したがって以下では任意の大きさの universe のために

"Z_0 in ZF"

を考える。しかし現存する全数学の基礎として、とりわけ category 論の基礎づけにとってどれが一番ふさわしいか確言しがたい。以下は "Z_0 in ZF" を中心とするこの方面のメモランダムにすぎない。

以下次の略記を用いる

ZF Zermelo-Fraenkel set theory

BG Bernays-Gödel set theory

GU Grothendieck universe (SGA4)

LS Lawvere: Category of sets

(Proc. Nat. Acad. Sci. 52 1964)

L.C.C. Lawvere: Category of Categories

(Proc. of a Conference on Categorical Algebra (La Jolla) Springer 1966)

GLC : 竹内のGLC あるいは それと equivalent な system.

GLJ. intuitionistic type theory with comprehension axiom.

MI Maclane Springer Lecture Note 92. 1969

MII Maclane Springer Lecture Note 106 1969

1. Z_0 の axioms

null set, extensionality, pair, sum, power, regularity, restricted separation, choice, infinity

restricted separation restricted formula — quantifier bounded

$\exists x(x \in y \wedge \cdots)$, $\forall x(x \in y \to \cdots)$ — に対する separation axiom

2. Z_0 is finitely axiomatizable

restricted ~~sp~~ separation のかわりに 任意の set X, Y に対し. 次の集合の存在という axiom で十分である.

$X - Y$, $X \times Y$, $\in \restriction X$, $D(X)$, $\{\langle x,y\rangle \in X \mid \langle y,x\rangle \in X\}$, $\{\langle\langle x,y\rangle,z\rangle \mid \langle\langle z,x\rangle,y\rangle \in X\}$

3. Z_0 の model, universe

Z_0 は finitely axiomatizable であるから Z_0 の standard, transitive model の存在が ZF の中で証明できる。さらに model は inclusive (U: inclusive とは $x \in U$, $y \subset x \Rightarrow y \in U$ のこと) にとれる。すなわち

<u>定理</u> 次のことは ZF で証明できる。

x_0 を任意の set とするとき、$x_0 \in U_0$ であって次の条件をみたすものが存在する。

(U,1) U_0 は transitive, inclusive

(U,2) $x, y \in U_0 \Rightarrow \{x, y\} \in U_0$

(U,3) $x \in U_0 \Rightarrow P(x) \in U_0$

(U4) $x \in U_0 \Rightarrow \bigcup x \in U_0$

(U1)〜(U4) をみたす集合を restricted universe (RU) という。

注1) $x_0 = \omega$ とおけば Z_0 の transitive, inclusive model となる。null set の存在, inclusive なことは (U3) から でる。regularity, axiom of choice は ZF のそれから従う。

注2) inclusive なことによって U_0 は実は Z の model である。

注3) たとえば斉藤正彦「超積と超準解析」2章参照

4. <u>Grothendieck Universe との関係</u>

GU は (U,1)〜(U,4) の他に次の条件をみたすものである。

(U5) map $f: x \to U$ に対し $\mathrm{Im} f \in U$

あるいは (U4), (U5) のかわりに

(U4′) $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ を familly of sets of U, $I \in U$ とするとき

union $\bigcup_{\alpha\in I} x_\alpha \in U$

あきらかに $(U4') \Longleftrightarrow (U,4) \& (U,5)$

$((U,4') \Rightarrow (U,4)$ は $(\alpha)_{\alpha\in x}$, $(U,4') \Rightarrow (U,5)$ は $(\{f(\alpha)\})_{\alpha\in x}$ を考える.

$(U4) \& (U5) \Rightarrow (U4')$ は $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ が $I \xrightarrow{f} U$ できまるとすれば

$\bigcup_{\alpha\in I} x_\alpha = \bigcup \mathrm{Im} f$).

3. 定理に対応するものが (AU) axiom of universe である.

(AU) 任意の set x に対し, $x\in U$ となる GU が存在する. これは次の公理と equivalent である

(ASI) axiom of strongly inaccessible cardinal

任意の cardinal α に対し, $\alpha < \rho$ となる strongly inaccessible cardinal ρ が存在する. したがって GU の存在は ZF の transitive inclusive model の存在と同値である.

5 "Z_0 in ZF" における Category 論の可能性

GU および (A, U) の意義は, たとえば functor category が非常に大きくなった universe をはみ出す場合にはいつでも上位の universe に移行することによって困難を回避できる点にある.

SGA ではこの適用に関して自制的であるが, 基本的には "Category はつねに small (あるいは に関する U-small) にできる" ということによって支えられている.

この原則は RU および 3 定理, すなわち "Z_0 in ZF" においても保持することができる.

すなわち理論において(U5)またはReplacementが用いられるときはいつでも $f : x \to U$ となる U をelementにもつ RU, U' を考えればよいのである．

たとえば RU では U-setのcategory $\underline{Set}_U$ はcompleteでない．

また C が U-small, D が U-locally small categoryの場合には D^C は U-locally small-Categoryであるという有名な命題も成立たない．しかし前者の場合には Set_U を $U' \ni U$ に対する U'-smallと考えることにより，後者では C も D も U'-smallと見ることによって困難を抹殺することができる．

6．Z_0 とToposとの関係(1)

6.1．GLJ $\Longleftrightarrow$ Topos

GLC $\Longleftrightarrow$ WPT (well-pointed topos)

ここに WPT = Topos + ND (non degenerate) + G (1 is generator)

6.2．Z_0 と LS の関係

$$LS = WPT + (A.C) + (AI) \text{ (infinity)}$$

Z_0 は LS より強い．Z_0 のmodelはCategoryとしては LS となる．

しかるに LS では，object A に対し．

x は A のelementである $\Longleftrightarrow$ $1 \xrightarrow{x} A$

B は A のsubsetである $\Longleftrightarrow$ $B \rightarrowtail A$ (あるいはそのcharac map: $A \to \Omega$)

の対応を考えざるを得ないがCategory論のmapの相等の定義

から この対応のもとではつねに

(i) element $\neq$ subset

(ii) $A \neq A'$のとき A-subset $A \to \Omega \neq A'$-subset $A' \to \Omega$

しかるにZ_0ではelementはつねにsetであり 2つのset A, A'にはcommon subsetが存在する。 すなわちLSはlocal set theory (各objectをuniverseとする)を与えるにすぎない。

LSにおいてZ_0のmodelを作る手続は

G. Osius Categorical Set Theory. J. Pure Appl. Alg 4. 1974

によって与えられ、それによってLSをglobalにすることができる。 次にそれを示す。

7. Z_0とToposの関係(2). LSにおけるZ_0のmodel (Osius)

7.1. Transitive-set-object in Topos

map: $A \xrightarrow{r} PA \ (=\Omega^A)$ がtr-set objectとは

(i) rはmonicである。

(ii) recursiveである。すなわち任意のmap $PB \xrightarrow{g} B$に対し

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\
PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

が可換となるfが唯一つ存在する。

ここにPfは$\exists f$とも書かれ、これによって$X \mapsto PX$はcovariant functor (imageをあらわす)となるものである。

集合論では monic, recursive は extensional, well founded relation を与える.

<u>inclusion</u>　2つの tr-set object $A \xrightarrow{r} PA$ と $B \xrightarrow{s} PB$ の inclusion とは map $A \xrightarrow{i} B$ で

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ PA & \longrightarrow & PB \end{array}$$

が可換となるものである.

このとき次のことが成立つ.

① inclusion はつねに mono である.

② inclusion は存在すれば唯一つである.

このとき $i = in(sr)$ と書き,　$r \subset s$ と記す.

③ 任意の2つの tr-set-object r, s に対し, $\subset$ に関して上限下限の性質をもつ $r \cup s$, $r \cap s$ が存在する.

7.2 <u>Set-object</u> in Topos

Topos における set-object とは　pair $(r, N) = (A \xrightarrow{r} PA,\ A \xrightarrow{N} \Omega)$ のことである. ここに r は transitive set object, N は A の subobject.

7.3. <u>Model of Z_0 in SL</u>

(1) SL の set-object (r, N) (r, M) に対し.

$(r, N) \in (r, M) \Longleftrightarrow$ Ne factor through r (すなわち $1 \xrightarrow{Ne} PA = 1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{r} PA$ と書ける) かつ $x \in_A M$.

ここに $1 \xrightarrow{Ne} PA$ は $A \xrightarrow{N} \Omega$ に対応する $1 \to \Omega^A (= PA)$

$$x \in_A M \Longleftrightarrow 1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{N} \Omega = 1 \xrightarrow{t} \Omega$$

(2) SL の set-object (r, N), (s, M) に対し 相等 $\sim$ を次のように

定義する。

$$(r, N) \sim (s, M) \iff in(r, r\cup s)[N] = in(s, s\cup r)[M]$$

$in(r, r\cup s)$ は 7.1 の inclusion $r \to r\cup s$

$i[N]$ 等は N の、map i による image を指す。

(3) SL の set-object (r, N) (s, M) に対する membership relation $\in$

$$(r, N) \in (s, M) \iff in(r, r\cup s)[N] \underset{A\cup B}{\in} in(s, r\cup s)[M]$$

ただし、tr-set-object $r\cup s$ を $A\cup B \to P(A\cup B)$ と書き、$\underset{A\cup B}{\in}$ は (1) の意味である。

<u>7.4. 定理</u> 7.3 (2), (3) によって SL の set-object の全体は Z_0 の model となる。

<u>問題提起</u> 以上の諸結果をふまえて、2つばかり問題を提起したい。一つは 7 の結果を一般の Topos において考え直観主義的集合論としての Z_0 を考えること。今一つは Lawvere 的なカテゴリー一元論的 "Z_0 in ZF" の定式化に関してである。

<u>8. Z_0 と Topos の関係 (3)</u> <u>Z_0 の Topos での解釈</u>

7 の諸論の直観主義化を考える。それは Z_0 を SL においてではなく一般の Topos または Topo, +(A, I) における解釈を意味する。

もし Mithel-Bénabou Language の Analogy ならば次のようになる。

各 t_r-set-object: $A \xrightarrow{r} PA$ に対し、形式的な r-variable

$X_1^r, X_2^r, \cdots$ を導入し

$X_1 \underset{r}{\in} X_2 \quad : \quad A \times A \xrightarrow{1 \times r} A \times PA \xrightarrow{ev} \Omega$

$X_1 \underset{r}{\sim} X_2 \quad : \quad A \times A \xrightarrow{r \times r} PA \times PA \xrightarrow{=} \Omega$

という対応を考える.

$A \xrightarrow{r} PA$, $B \xrightarrow{s} PB$ -variable に対しては η と同様に

$C \xrightarrow{r \cup s} PC$ に imbedding して考える. $i = in(r, r \cup s)$, $j = (s, r \cup s)$ とし.

すなわち r-variable X, s-variable Y に対し 対応

$X \in Y \quad : \quad A \times B \xrightarrow{i \times j} C \times C \xrightarrow{1 \times (r \cup s)} C \times PC \xrightarrow{ev} \Omega$

$X \sim Y \quad : \quad A \times B \xrightarrow{i \times j} C \times C \xrightarrow{(r \cup s) \times (r \cup s)} PC \times PC \xrightarrow{=} \Omega$

を考える.

今 Z_0 の任意の formula $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ に対し.

$a_1, \cdots a_n$ を $r_1, \cdots, r_n$-variable ($A_i \xrightarrow{r_i} PA_i$) と考えれば

上の $\in$, $\sim$ と Mitchel-Bénabou-language の解釈によって

$\|\varphi\| : A_1 \times \cdots \times A_r \longrightarrow \Omega$

が対応する.

その解釈のもとで φ が Z_0 の Axiom のとき

$\|\varphi\| : 1 \xrightarrow{t} \Omega$

となるということを η の intuitionistic version といってよかろう.

この解釈では r-variable X, Y に対する pair $\{X, Y\}$ は

term $\{Z \mid Z = X \vee Z = Y\}$ の M-B-interpretation であり

Sum $\cup X$ には $A \xrightarrow{r} PA \xrightarrow{Pr} PPA \xrightarrow{\cup} PA$ （$\cup$ は union map）が
power PX には $PA \xrightarrow{Pr} PPA$ が対応する。

この解釈を complete Heyting algebra Ω 上の sheaf の Topos に適用すること、および竹内の $V^{(\Omega)}$ との関係を調べること等が課題として意義があると思う。

9 Category 一元論化された "Z_0 in ZF"

Lawvere SL, L.C.C. の精神で Z_0 の universe の hierarchy に対応する SL の hierarchy を次のように逆向きに考えることができる。それは object of universe を考えることである。

Def Category LS における object of universe とは

(i) internal category である

$$U = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$$

ここに C_0, C_1 は object, $C_1 \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} C_0$, $C_0 \xrightarrow{i} C_1$, $C_1 \underset{C_0}{\times} C_1 \xrightarrow{m} C_1$

すなわち任意の object of X of SL に対し

$(X, U) = ((X, C_0), (X, C_1), (X, C_1) \underset{xd_1}{\overset{xd_0}{\rightrightarrows}} (X, C_0), (X, C_0) \xrightarrow{xi} (X, C_1)$

$(X, C_1) \underset{(X, C_0)}{\times} (X, C_1) \xrightarrow{xm} (X, C_1))$ において

$(X, C_0), (X, C_1)$ は object, map の集合

xd_0, xd_1 は domain, codomain, xi identity

$\times^m$ composition と考えるとき、ふつうの意味で category となる

(ii) $X = 1$ (terminal object) のとき external category $(1, U)$ は SL の公理をみたす.

$(1, U)$ はふつうの意味で category of SL となるから 同様にして その中の object of universe を定義することができる. こうして symbolic な意味で任意の長さの universe 列

$$SL \ni U_1 \ni U_2 \ni \cdots \ni U_n$$

を考えることができる.

それは "Z_0 in ZF" に model をもつから、この universe の列の存在の仮定は無矛盾である.