数理解析研究所講究録
336巻 1978年 38-40

$\mathcal{B}^{(\mathcal{B}')}$- valued extensions for $\mathcal{B}$- valued structures

早大 理工　田嶋 信一

Boolean ultrapowers については [1]、[2]、[3] などで研究されており、その拡張は [4]、[5] などに見られる。私は、Boolean algebra の Boolean ultrapowers を考えることにより、Boolean valued structure M に対し $M^{(\mathcal{B}')}$ を構成した。すなわち、complete Boolean algebra $\mathcal{B}'$ と $\mathcal{B}$- valued structure M に対し

$$M^{(\mathcal{B}')} = \{ f : M \to \mathcal{B}' \mid \forall n.m \in M (n \neq m \to f(n) \wedge f(m) = 0) \ \& \bigvee_{m \in M} f(m) = \mathbb{1} \}$$

次に、文の値を Boolean ultrapowers $\mathcal{B}^{(\mathcal{B}')}$ で考えた。この $\mathcal{B}^{(\mathcal{B}')}$ は次の operation により Boolean algebra となる。$u, v \in \mathcal{B}^{(\mathcal{B}')}$ に対し、

(1) $(u \vee v)(a) = \bigvee_{a_1 \vee a_2 = a} u(a_1) \wedge v(a_2)$

(2) $(\neg u)(a) = u(\neg a)$

また、$\exists$ に対する operation として、$\bigvee_{i<\lambda} u_i$ を定義

(3) $(\bigvee_{i<\lambda} u_i)(a) = \bigvee_{\bigvee_{i<\lambda} a_i = a} \ \bigwedge_{i<\lambda} u_i(a_i)$

した。ところが、無条件では $\bigvee_{i\in\lambda} u_i \in B^{(B')}$ とならない。そこで、B' が common refinement を持つ という条件をつけた。以下 これを 条件(1) と呼ぶ。条件(1)は便宜的な条件であり、もっと弱い条件があることも予想していたが、予稿を送った後に、高田君が、条件(1)は $\bigvee_{i\in\lambda} u_i \in B^{(B')}$ となるための必要十分条件であり、しかも B' が power set algebra と同型となってしまうことを証明してくれた。つまり、私の方法では、B'としては power set しかとれないことがわかった。このことにより、すべては意味を失った。したがって、以下述べることは、単なる計算でしかない。

Prop.1 complete Boolean algebra B と power set algebra B' に対し、$B^{(B')}$ は (1)、(2)、(3) の operation のもとで complete Boolean algebra となる。

証明は、次の lemma より明らか。

lemma

u、$v \in B^{(B')}$ に対し、

$$u \leq v \quad \text{iff} \quad {}^{\forall} a \in B \quad u(a) \leq \bigvee_{a\leq b} v(b)$$

次に、atomic formula $R(x_1 \cdots x_k)$ に対し、

$$\|R(f_1 \cdots f_k)\|(b) = \bigvee_{\|R(m_1 \cdots m_k)\| = b} \bigwedge_{j=1}^{k} f_j(m_j)$$ と定義し、

構成に関する帰納法により、任意の formula θ に対し、

$$\|\theta(f_1 \cdots f_k)\|(b) = \bigvee_{\|\theta(m_1 \cdots m_k)\| = b} \bigwedge_{j=1}^{k} f_j(m_j)$$ を得る。

この系としては、

Cor 1

$\mathcal{M}$ が maximum principle を満足すれば、$\mathcal{M}^{(B)}$ も満足する。

Cor 2

$\mathcal{M}$ が separated ならば $\mathcal{M}^{(B)}$ も separated

などがある。

また、2-valued structure $\mathcal{N}$ に対しては、

$$(\mathcal{N}^{(B)})^{(B')} \cong \mathcal{N}^{(B^{(B')})}$$ を得る。

REFERENCES

[1] R.Mansfield, The thery of Boolean ultrapowers,Ann.Math.Logic 2 (1971) 297-323

[2] K.Potthoff, Boolean ultrapowers,Arch,Math,Logic 16(1974) 37-48

[3]B.Koppelberg and S.Koppelberg, A Boolean ultrapower which is not an ultrapower, J.S.L. 41(1976) 245-249

[4]D.P.Ellerman, Sheaves of structures and generalized ultraproducts Ann.Math.Logic 7 (1974) 163-195

[5] A.Urquhart, Boolean model theory I and II (preprint, Toronto)