数理解析研究所講究録
337巻 1978年 74-91



# 双曲系に対する混合問題の $L^2$-well posedness について

北大 理 久保田幸次

§1. 序. 双曲型方程式に対する混合問題が、どのような境界条件の下で $L^2$-well posed となるかを考える。単独2階（又は 2×2 system）の場合は、"変数係数の混合問題が $L^2$-well posed" であるための必要十分条件は "係数を境界点に凍結して得られる定係数問題の各々が $L^2$-well posed" であることが知られている（[1], [11], [4], [14]）。

ここでは、上のことが高階（又は system）の場合にどのような形で拡張されるかを調べ、特に、変数係数の問題が $L^2$-well posed となるためには、"凍結された問題の各々が $L^2$-well posed" のほかに一種の "一様性" も要求されることを示す。

半空間で次の境界値問題を考える：

$$(P, \widetilde{B_1}, \widetilde{B_2}) \begin{cases} P(x, D)u = f & \text{in } \Omega, \\ \widetilde{B_j}(x', D)\, u = g_j & \text{on } \Gamma,\ j = 1, 2, \end{cases}$$

ここで、

$\Omega = \{ x = (x', x_n) = (x_0, x'', x_n) ; x_0 \in R^1, x'' \in R^{n-1}, x_n > 0 \}$,

$\Gamma$ は $\Omega$ の境界, $D = (D_0, D_1, \cdots, D_n)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$,

$(x_0, x'', x_n)$ の covector を $(\eta, \sigma, \lambda)$ とかくと

$$P(x, \eta, \sigma, \lambda) = \prod_{j=1}^{2} P_j(x, \eta, \sigma, \lambda),$$

$$P_j(x, \eta, \sigma, \lambda) = \eta^2 - a_j(x)^2(|\sigma|^2 + \lambda^2),$$

$$a_j(x) > 0, \quad a_1(x) \neq a_2(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

$$\widehat{B_1}(x', \eta, \sigma, \lambda) = B_1(x', \eta, \sigma, \lambda),$$

$$\widehat{B_2}(x', \eta, \sigma, \lambda) = B_2(x', \eta, \sigma, \lambda) P_1(x', \eta, \sigma, \lambda),$$

$B_j(x', \eta, \sigma, \lambda) = \lambda - \alpha_j(x', \eta, \sigma)$, $\alpha_j$ は $\eta, \sigma$ の一次同次関数, 微分作用素の係数はすべて $\overline{\Omega}$ で $C^\infty$ かつ有界集合の外で定数とする. 又、簡単のため、境界点 $(x', 0) \in \Gamma$ を $x'$ と略記する.

<u>定義.</u> $(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})$ が $L^2$-well posed とは、

$\forall \gamma \geq \gamma_1$, $\forall f \in H_{1,\gamma}(\Omega)$, $g_j = 0$, $j = 1, 2$ に対して一意的な解 $u \in H_{4,\gamma}(\Omega)$ が存在して

(1.1) $\qquad \gamma \| u \|_{3,\gamma} \leqq C \| f \|_{0,\gamma}$

が成立するときを云う. ここで、$\gamma_1, C$ は $P, B_j$ のみで決まる正の定数,

$$H_{k,\gamma}(\Omega) = \{ u ; e^{-\gamma x_0} u \in H_k(\Omega) \}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\| u \|_{k,\gamma} = \| e^{-\gamma x_0} u \|_{H_k(\Omega)}.$$

注意. 上の意味で $(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})$ が $L^2$-well posed ならば、$k=0,1,\cdots$, $\gamma \geq \gamma_k$, $f \in H_{k,\gamma}(\Omega)$, $g_j \in H_{2(2-j)+\frac{1}{2}+k,\gamma}(\Gamma)$, $j=1,2$ に対して一意的な解 $u \in H_{3+k,\gamma}(\Omega)$ が存在して

$$\gamma \|u\|_{3+k,\gamma} \leqq C_k \left( \|f\|_{k,\gamma} + \sum_{j=1}^{2} |g_j|_{2(2-j)+\frac{1}{2}+k,\gamma} \right),$$

かつ $f = g_j = 0$ $(x_0 < T)$ のとき $u = 0$ $(x_0 < T)$ が成立する ([8]). ここで $\gamma_k$, $C_k$ は正の定数, $H_{s,\gamma}(\Gamma)$ 及びその norm $|\cdot|_{s,\gamma}$ ($s$ は実数) は、$H_{k,\gamma}(\Omega)$ の場合と同様に定義されるものである. 従って、$(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})$ が $L^2$-well posed ならば、$P$ 及び $\widehat{B_j}$ に任意の低階項をつけ加えてもやはりそうであることが分る.

次の事実は一般の場合にも成立する：

命題. ([1]). ($\alpha$) から ($\beta$) が従う. ここで、

($\alpha$): $(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})$ が $L^2$-well posed.

($\beta$): $P$ 及び $\widehat{B_j}$ の係数を境界点 $x' \in \Gamma$ に凍結することによって得られる定係数問題：$(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})_{x'}$ の各々が $L^2$-well posed かつこれらの問題に対する不等式 (1.1) の中の定数 $C$ がパラメーター $x'$ に無関係とれる.

従って、"($\beta$) から ($\alpha$) が従うか？" のみが問題となるが、$B_j$, $j=1,2$ の係数が実の場合には、

定理 1. ([10]). ($\beta$) から ($\alpha$) が従う.

例. $B_j(x', \eta, \sigma, \lambda) = \lambda - c_j(x')\eta$, $a_2(x') < a_1(x')$ かつ

$c_j(x')$ は実数値とする．このとき、定理1の証明（§2）より容易に次の系が得られる：

系1.（[10]）．$(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})$ が $L^2$-well posed であるための必要十分条件は、

1) $c_j(x') \geqq 0 \quad (x' \in T,\ j=1,2)$ かつ

2) $c_1(x^0) = 0$ なる点 $x^0$ の近くで

$$c_2(x')^2 \leqq \text{const.}\, c_1(x') \tag{1.2}$$

が成立することである．

注意．上の例の場合、凍結された問題 $(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})_{x'}$ が $L^2$-well posed であるための必要十分条件は、"$c_j(x') \geqq 0$，かつ $c_1(x') = 0$ のとき $c_2(x') = 0$" であることが知られている（[2], [3]）．従って、(1.2) は、$(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})$ の $L^2$-well posedness が各 $(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})_{x'}$ のそれのみからは必ずしも従わないことを示している．これは、2階又は 2×2 system の場合と対照的である．

次の節で定理1を証明し、§3で一般化を試みる．なお、講演では主に一階の systemについてのべたが、その大部分は [10] と重複するので、ここでは省く．

__§2. 定理1の証明.__ (α) を証明するには、$T^*(\Gamma)$ の各点で microlocal a priori estimate を求めればよい. その際、問題となるのは、ロパチンスキー行列式が零になる点である. 以下、$x^0 \in \Gamma$, $(\eta^0, \sigma^0) \in R^n$, $|\eta^0|^2 + |\sigma^0|^2 = 1$ として、$(x', \tau, \sigma) \equiv (x', \eta - i\gamma, \sigma)$ は $(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ の適当な近傍 ($\Gamma \times \mathbb{C} \times R^n$ における) を動くものとする. 又、$(x', \tau, \sigma)$ に無関係な定数達を $C$ とかく.

__記号.__ $P_j(x, \tau, \sigma, \lambda) = 0$ の $\lambda$ に関する2根を $\lambda_j^\pm(x, \tau, \sigma)$ とかく. 但し、$\mathrm{Im}\,\tau < 0$ のとき $\pm \mathrm{Im}\,\lambda_j^\pm(x, \tau, \sigma) > 0$ なるものをとり、これらを $\mathrm{Im}\,\tau \geqq 0$ に 接続しておく. 次に

$$B_\pm(x', \tau, \sigma) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1(\lambda_1^\pm) & \tilde{B}_1(\lambda_2^\pm) \\ \tilde{B}_2(\lambda_1^\pm) & \tilde{B}_2(\lambda_2^\pm) \end{bmatrix} & (\eta^0 \neq 0 \text{ のとき}), \\ \begin{bmatrix} \tilde{B}_1(\lambda_1^\pm) & \dfrac{\tilde{B}_1(\lambda_2^\pm) - \tilde{B}_1(\lambda_1^\pm)}{\lambda_2^\pm - \lambda_1^\pm} \\ \tilde{B}_2(\lambda_1^\pm) & \dfrac{\tilde{B}_2(\lambda_2^\pm) - \tilde{B}_2(\lambda_1^\pm)}{\lambda_2^\pm - \lambda_1^\pm} \end{bmatrix} & (\eta^0 = 0 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$\tilde{B}_j(\lambda_k^\pm) = \tilde{B}_j(x', \tau, \sigma, \lambda_k^\pm(x', \tau, \sigma))$$

とおいて、$(P, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2)$, $(P_j, B_j)$ のロパチンスキー行列式 $L, L_j$ をそれぞれ

$$L(x', \tau, \sigma) = \det B_+(x', \tau, \sigma),$$

$$L_j(x', \tau, \sigma) = \lambda_j^\pm(x', \tau, \sigma) - \alpha_j(x', \tau, \sigma),$$

$(P, \widehat{B_1}, \widehat{B_2})$ の反射係数 $c_{ij}(x', \tau, \sigma)$, $i,j = 1,2$ を

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = (B_+)^{-1} B_-$$

と定義する. ここで、$(P_j, B_j)$ は、$P_j$ に対する境界値問題:

$$\begin{cases} P_j(x, D)\,u = f & \text{in } \Omega, \\ B_j(x', D)\,u = g & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

である.

これらの定義より直ちに、$c_{21}(x', \tau, \sigma) = 0$ 及び

(2.1) $\qquad L = L_1 \cdot L_2 \cdot (\textit{nonzero factor})$

が従う.

はじめに、一般的な事実を二つのべる.

<u>補題 2.1.</u> ([10]). $(\beta)$ が成立するための必要十分条件は、$\mathrm{Im}\,\tau < 0$ のとき $L(x', \tau, \sigma) \neq 0$ (Hersh の条件) かつ

(2.2) $\qquad |c_{jk}(x', \tau, \sigma)|^2$

$$\leqq C\,\gamma^{-2}\,|\mathrm{Im}\,\lambda_j^+(x', \tau, \sigma)| \cdot |\mathrm{Im}\,\lambda_k^-(x', \tau, \sigma)| \cdot |(\lambda_k^+ - \lambda_k^-)(x', \tau, \sigma)|^2,$$

$j, k = 1, 2$ が成立することである.

これは、定係数のときはよく知られている事実である ([5]).

<u>命題 2.1.</u> ([2]). 次の 1), 2) 及び 3) は、互に同値である:

1). 凍結された問題 $(P_j, B_j)_{x'}$ が $L^2$-well posed.

2). $\lambda_j^+(x', \tau, \sigma)$ が実重根でないとき

$$L_j(x', \tau, \sigma) \neq 0 \quad (\mathrm{Im}\,\tau \leqq 0).$$

3). 曲面 $\eta = a_j(x')|\sigma|$ 上で

(2.3) $\qquad \alpha_j(x', \eta, \sigma) \geqq 0$ .

<u>系 2.1.</u> $(P, \widehat{B}_1, \widehat{B}_2)_{x^0}$ が $L^2$-well posed かつ $L(x^0, \eta^0, \sigma^0) = 0$ ならば $P(x^0, \eta^0, \sigma^0, \lambda) = 0$ は実重根をもつ.

<u>証明.</u> $(P, \widehat{B}_1, \widehat{B}_2)_{x^0}$ が $L^2$-well posed ならば、$(P_j, B_j)_{x^0}$, $j=1,2$ もそうである([2])から、主張は(2.1)と命題 2.1 より直ちに従う.

従って、$L(x^0, \eta^0, \sigma^0) = 0$ かつ $P(x^0, \eta^0, \sigma^0) = 0$ が実重根をもつ点のみが問題となる. 以下、$(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ はこのような点とし、$\beta)$ を仮定する. 又、記述を簡単にするために、$\eta^0 > 0$ , $a_2(x^0) < a_1(x^0)$ としておく.

<u>補題 2.2.</u> ([10]). $\lambda_1^+(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ が実重根のとき、曲面 $\eta = a_1(x')|\sigma|$ 上で

(2.4) $\qquad |(\alpha_1 - \alpha_2)(x', \eta, \sigma)|^2 \leqq C\alpha_1(x', \eta, \sigma)$

が成立する.

<u>証明.</u> 命題 2.1 により、$L_1(x^0, \eta^0, \sigma^0) = 0$ , $L_2(x^0, \eta^0, \sigma^0) \neq 0$ であるから、

(2.5) $\qquad C_{12}(x', \eta - i\gamma, \sigma) = \dfrac{(\alpha_2 - \alpha_1)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)}{L_1 L_2}(x', \eta - i\gamma, \sigma)$

に注意すると、(2.2) より

$$|(\alpha_1 - \alpha_2)(x', \eta - i\gamma, \sigma)|^2$$
$$\leqq C\gamma^{-1} |\mathrm{Im}\, \lambda_1^+(x', \eta - i\gamma, \sigma)| \cdot |(\lambda_1^+ - \alpha_1)(x', \eta - i\gamma, \sigma)|^2 \quad (\gamma > 0)$$

が従う．ここで、$\mathrm{Im}\,\lambda_2^-(x', \eta - i\gamma, \sigma) = O(\gamma)$ を使った．それ故、$\eta = a_1(x')|\sigma|$ 上では、

$$\lambda_1^+(x', \eta - i\gamma, \sigma) = O(\gamma^{\frac{1}{2}})$$

に注意すると

$$|(\alpha_1 - \alpha_2)(x', \eta, \sigma)|^2 \leqq C\gamma^{-\frac{1}{2}}(\gamma + |\alpha_1(x', \eta, \sigma)|^2)$$

が成立することが分る．この式の右辺で、$\gamma > 0$ のみを動かしたときの最小値は、$C|\alpha_1(x', \eta, \sigma)|$ であるから、命題 2.1 を使うと（2.4）が得られる．

注意．従来は、補題 2.2 の結論は仮定されていた（[12], [13]）．

定理 1 の証明．　$\lambda_1^+(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ 又は $\lambda_2^+(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ が実重根のときは、それぞれ、補題 2.2 又は命題 2.1 を使って microlocal estimate が得られる（[10] 又は [12]）．他の場合はロパチンスキ行列式が零でないので estimate が得られることはよく知られている．又、dual problem についても同様であるから定理は証明される（[8]）．

## §3．一般化．

境界作用素 $B_j$ の係数が complex の場合、定理 1 は次のように拡張される：

定理 2．　$P(x^0, \eta^0, \sigma^0, \lambda) = 0$ が実重根と虚根の両方をも

つとき、十分小なる $\gamma>0$ に対して

(3.1) $$|L(x^0, \eta^0-i\gamma, \sigma^0)| \geqq \gamma^{\frac{1}{2}}$$

を仮定する．このとき $(\beta)$ より $(\alpha)$ が従う．

以下、定理２を証明する際、特に注意すべき点のみ述べる．（簡単のため、$a_2(x^0)<a_1(x^0)$ としておく）．

次の事実はよく知られている：

命題 3.1. $(P_j, B_j)_{x^0}$ が $L^2$-well posed ならば

$$|L_j(x^0, \eta^0-i\gamma, \sigma^0)| \geqq C\gamma^{k} \quad (\gamma>0)$$

が成立する．ここで、$\lambda_j^+(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ が実単根，実重根又は虚根に応じて、$k=0, \frac{1}{2}$ 又は 1．

系 3.1. $(P, \widehat{B}_1, \widehat{B}_2)_{x^0}$ が $L^2$-well posed ならば $L_1(x^0, \eta^0, \sigma^0) \neq 0$ 又は $L_2(x^0, \eta^0, \sigma^0) \neq 0$．

証明. $\lambda_j^+(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ の中の一つが実単根ならば命題 3.1 より直ちに従う．他の場合は、(2.2)，(2.5) 及び

$$C_{12}(x'; \tau, \sigma) = -2(L_1L_2)^{-1}\alpha_2(x'; \tau, \sigma) \qquad (\eta^0=0 \text{ のとき})$$

を使えばよい．

注意. 系 3.1 により、$(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ で $\lambda_2^+$ が実重根（従って $\lambda_1^+$ が虚根）のとき (イ) $L_1 \neq 0, L_2=0$ 又は (ロ) $L_1=0, L_2 \neq 0$ の二通りが可能であるが、(3.1) は後の場合を排除している．

以上のことから、問題となるのは、$L(x^0, \eta^0, \sigma^0)=0$ かつ

$P(x^0, y^0, \sigma^0, \lambda) = 0$ が実単根と虚根の両方をもつ場合と実重根をもつ場合であることが分る．以下、記述を簡単にするために、$y^0 > 0$ としておく．

1). $(x^0, y^0, \sigma^0)$ で $\lambda_1^+$ が虚根，$\lambda_2^+$ が実単根のとき、$L(x', \tau, \sigma)$ は $\tau$ につき正則、かつ (2.1) と命題 3.1 により $(\partial L/\partial\tau)(x^0, y^0, \sigma^0) \neq 0$ だから、陰関数の定理を使うと、

$$L(x', \tau, \sigma) = (\tau - \nu(x', \sigma)) \cdot (\textit{nonzero factor}) \tag{3.2}$$

と表わされる．ここで、Hersh の条件より $\mathrm{Im}\, \nu(x', \sigma) \geq 0$ が従う．更に

<u>補題 3.1.</u> ([10])． 曲面 $y = \mathrm{Re}\, \nu(x', \sigma)$ 上で

$$|(\alpha_1 - \alpha_2)(x', y, \sigma)|^2 \leqq C\, \mathrm{Im}\, \nu(x', \sigma) \tag{3.3}$$

が成立する．

<u>注意.</u> 従来は、$C_{12}(x', y - i\gamma, \sigma)$ の $(x', y, \sigma, \gamma)$ についてのなめらかさが仮定されていた（[12], [13]）．特に、[12] では $\mathrm{Im}\, \nu(x', \sigma) \equiv 0$ を仮定し、これより $C_{12}$ のなめらかさを導いている．しかし、簡単な例からも分るように（下の系2の証明参照）、この仮定は現実的ではない．それ故、ここでは "$C_{12}$ の分子" を評価するという方法をとった．

2). 次に、$\lambda_1^+$ が実重根のときは、命題 3.1 より $L_1(x^0, y^0, \sigma^0) = 0$ , $L_2(x^0, y^0, \sigma^0) \neq 0$ が従う．又、$\lambda_1^+$ は、

$$
(3.4)\quad
\begin{aligned}
\lambda_1^+(x',\tau,\sigma) &= -\sqrt{\tau-\theta(x',\sigma)}\;\; a_1(x')^{-1}\sqrt{\tau+\theta(x',\sigma)}\;, \\
\lambda_1^+(x',-\bar\tau,-\sigma) &= \sqrt{\bar\tau-\theta(x',\sigma)}\;\; a_1(x')^{-1}\sqrt{\bar\tau+\theta(x',\sigma)}
\end{aligned}
$$

と表わされる．ここで、$\sqrt{\ }$ は $\sqrt{1}=1$ なる branch，$\theta(x',\sigma) = a_1(x')|\sigma|$．今、$L_1(x',\tau,\sigma)$ において $\sqrt{\tau-\theta(x',\sigma)}$ を $z$ でおきかえたものを $\hat{L}_1(x',z,\sigma)$ とかくと、これは $z$ につき正則かつ命題 3.1 により $(\partial\hat{L}_1/\partial z)(x^0,0,\sigma^0) \neq 0$ だから、陰関数の定理を使うと

$$\hat{L}_1(x',z,\sigma) = (z - D(x',\sigma))\cdot(\text{nonzero factor})$$

と表わされる（[14]）。ここで、$D(x',\sigma)$ は $\sigma$ につき 1/2 次斉次かつ $D(x^0,\sigma^0) = 0$．又、$\alpha_1(x',\tau,\sigma)$ は $\tau,\sigma$ の奇関数だから、(3.4) を考慮すると

$$
(3.5)\quad
\begin{aligned}
L_1(x',\tau,\sigma) &= \left(\sqrt{\tau-\theta(x',\sigma)} - D(x',\sigma)\right)\cdot(\text{nonzero factor}), \\
L_1(x',-\bar\tau,-\sigma) &= \left(\sqrt{\bar\tau-\theta(x',\sigma)} - \overline{D(x',\sigma)}\right)\cdot(\text{nonzero factor})
\end{aligned}
$$

が得られる．これと Hersh の条件より

<u>命題 3.2.</u>（[14]）． $\mathrm{Re}\, D(x',\sigma) \leqq 0$．

更に

<u>補題 3.2.</u>　曲面 $\eta = \theta(x',\sigma) - |D(x',\sigma)|^2$ 上で

$$(3.6)\qquad |(\alpha_1-\alpha_2)(x',\eta,\sigma)|^2 \leqq -C\,\mathrm{Re}\, D(x',\sigma)$$

が成立する．

<u>証明.</u>　$\mathrm{Im}\, D(x',\sigma) \leqq 0$ の場合．$\gamma > 0$ とする．このとき、(2.2) と (2.5) より

$$|(\alpha_1-\alpha_2)(x',\eta-i\gamma,\sigma)|^2$$

$$\leqq C\gamma^{-1}|\mathrm{Im}\,\lambda_1^+(x',\eta-i\gamma,\sigma)|\cdot|L_1(x',\eta-i\gamma,\sigma)|^2$$

が従う．又、

$$\zeta=\eta-i\gamma-\theta(x',\sigma)$$

とおくと、(3.4) により $\lambda_1^+$ は

$$|\mathrm{Im}\,\lambda_1^+(x',\eta-i\gamma,\sigma)|\leqq C|\mathrm{Im}\sqrt{\zeta}|+O(\gamma)$$

と評価されるから (3.5) を使って

(3.7) $$|(\alpha_1-\alpha_2)(x',\eta,\sigma)|^2\leqq C\gamma^{-1}|\mathrm{Im}\sqrt{\zeta}|\cdot|\sqrt{\zeta}-D(x',\sigma)|^2+O(\gamma^2)$$

を得る．以下、

$$\eta=\theta(x',\sigma)-|D(x',\sigma)|^2,\ \text{即ち},\ \mathrm{Re}\,\zeta=-|D(x',\sigma)|^2$$

とする．このとき

(3.8) $$|\mathrm{Im}\sqrt{\zeta}|\leqq C(|D(x',\sigma)|+\gamma^{\frac12})$$

が成立する．次に $|\sqrt{\zeta}-D(x',\sigma)|^2$ を評価する．

(イ)． $0<-\mathrm{Re}\,D(x',\sigma)<-\mathrm{Im}\,D(x',\sigma)$ のとき．

$$\sqrt{\zeta}-D=(\zeta-D^2)(\sqrt{\zeta}+D)^{-1}$$

と変形して、 $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta}<0$ 及び

$$\zeta-D^2=-2D\,\mathrm{Re}\,D-i\gamma$$

に注意すると、

$$|\sqrt{\zeta}-D|\leqq C|\mathrm{Im}\,D|^{-1}(|\mathrm{Re}\,D|\cdot|\mathrm{Im}\,D|+\gamma)$$

が従う．これと (3.7)，(3.8) より

$$|(\alpha_1-\alpha_2)(x',\eta,\sigma)|^2$$
$$\leqq C\gamma^{-1}(|\mathrm{Im}\,D|+\gamma^{\frac{1}{2}})(|\mathrm{Re}\,D|\cdot|\mathrm{Im}\,D|+\gamma)^2|\mathrm{Im}\,D|^{-2}$$

を得る．$\gamma>0$ のみ動かしたときの右辺の最小値は $C|\mathrm{Re}\,D|$ である（例えば $\gamma=(\mathrm{Re}\,D)\cdot(\mathrm{Im}\,D)$ とおけばよい）から (3.6) が得られる．

(ロ). $\mathrm{Re}\,D(x',\sigma)=0<-\mathrm{Im}\,D(x',\sigma)$ のときは、

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\sqrt{\eta-i\gamma-\theta(x',\sigma)}=i\,\mathrm{Im}\,D(x',\sigma)$$

に注意すると、$\sqrt{\zeta}-D(x',\sigma)=O(\gamma)$ が従うから、(3.7) により (3.6) の左辺 $=0$ となる．

(ハ). $0\leqq-\mathrm{Im}\,D(x',\sigma)\leqq-\mathrm{Re}\,D(x',\sigma)$ のときは、(3.7), (3.8) と

$$|\sqrt{\zeta}-D|^2\leqq C(|\zeta|+|D|^2)$$

より、(3.6) の左辺は $\gamma^{-1}(|\mathrm{Re}\,D|^2+\gamma)^{3/2}$ で評価されるから、(イ) と同様の論法で (3.6) が得られる．

$\mathrm{Im}\,D(x',\sigma)\geqq 0$ のときは、$\alpha_j(x',\eta,\sigma)$ が $\eta,\sigma$ について奇関数である事実と $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta}>0$ にすれば、全く同様である．

<u>系 3.2.</u> 曲面 $|\alpha_1(x',\eta,\sigma)|^2+(\lambda_1^+(x',\eta,\sigma))^2=0$ 上で (3.6) が成立する．

<u>証明.</u> $\alpha_1(x^0,\eta^0,\sigma^0)=0$, $(\partial(\lambda_1^+)^2/\partial\tau)(x^0,\eta^0,\sigma^0)\neq 0$ より、$|\alpha_1(x',\eta,\sigma)|^2+(\lambda_1^+(x',\eta,\sigma))^2=0$ は $\eta=\rho(x',\sigma)$ と一意的に解かれる．それ故

$$(3.9) \qquad \rho(x',\sigma) - (\theta(x',\sigma) - |D(x',\sigma)|^2) = O(\mathrm{Re}\, D(x',\sigma))$$

を示せば十分である．今、(3.5) の第一式を

$$L_1(x',\tau,\sigma) = (\sqrt{\zeta} - D(x',\sigma))(l_1(x',\tau,\sigma) + \sqrt{\zeta}\; l_2(x',\tau,\sigma))$$

と書いて (3.4) 及び $L_1 = \lambda_1^+ - \alpha_1$ を使うと

$$(3.10) \qquad -\alpha_1(x',\eta,\sigma) = g_1 D + l_2(\mathrm{Re}\,\zeta - D^2)$$

が得られる（[14]）．ここで、$g_1 = a_1(x')^{-1}\sqrt{\eta + \theta(x',\sigma)}$ ．

これより、$(\lambda_1^+(x',\eta,\sigma))^2 = g_1^2\,(\mathrm{Re}\,\zeta)$ に注意すると、

$$|\alpha_1(x',\eta,\sigma)|^2 + (\lambda_1^+(x',\eta,\sigma))^2$$
$$= (\mathrm{Re}\,\zeta + |D|^2)(g_1^2 + o(1)) + O(|D|^2\,\mathrm{Re}\,D)$$

が従う．この式で $\eta = \rho(x',\sigma)$ とおけば (3.9) が得られる．

注意． 従来は、系 3.2 の結論は仮定されていた（[12],[13]）．

定理２の証明． 補題3.1 及び系 3.2 により、それらに対応する点での microlocal estimate が得られる（[10]）．又、$\lambda_2^\pm$ が実重根のときは、（$L_1$ を $L_2$ でおきかえた）命題 3.2 を適用すればよい．最後に、$\lambda_2^+$ が虚根のときは、$|L(x^0, \eta^0 - i\gamma, \sigma^0)| \geq C\gamma$ ($\gamma > 0$) が成立するから（(2.1), 命題3.1 及び系 3.1）、この場合はよく知られている（[10] 又は [12]）．

例． $B_j(x',\eta,\sigma,\lambda) = \lambda - c_j(x')\eta$ , $a_2 < a_1$ の場合、定理２の仮定は、" $\mathrm{Re}\, c_1(x^0) = 0$ のとき $(\mathrm{Im}\, c_1(x^0))^2 \neq a_2(x^0)^{-2} - a_1(x^0)^{-2}$ " となる．この条件の下で

系2. (α) が成立するための必要十分条件は、

1) $\mathrm{Re}\, c_j(x') \geqq 0 \quad (x' \in \Gamma,\ j=1,2)$,

2) $\mathrm{Re}\, c_1(x^0) = 0$, $(\mathrm{Im}\, c_1(x^0))^2 < a_2(x^0)^{-2} - a_1(x^0)^{-2}$ のとき、$x^0$ の近くで

(3.11) $\quad |c_1(x') - c_2(x')|^2 \leqq \mathrm{const.}\ \mathrm{Re}\, c_1(x')$ , かつ

3) $\lambda_2^+(x^0, \eta^0, \sigma^0)$ が虚根のとき、$|L(x^0, \eta^0 - i\gamma, \sigma^0)| \geqq c\gamma \quad (\gamma > 0)$

が成立することである。

証明. 1) は、$(P_j, B_j)_{x'}$ が $L^2$-well posed であるための必要十分条件だから ([11])、(3.3) 又は (3.6) と (3.11) が同値であることを示せばよい。以下、$\mathrm{Re}\, c_1(x^0) = 0$ とする。

(イ). $\mathrm{Im}\, c(x^0) = 0$ のとき、$\lambda_1^+(x^0, \eta^0, \sigma^0) = 0$ なる点で考えると (3.10) より、$\eta = \theta(x', \sigma) - |D(x', \sigma)|^2$ 上で

$$\mathrm{Re}\, \alpha_1(x', \eta, \sigma) = \mathrm{Re}\, D(x', \sigma) \cdot (\textit{negative factor})$$

が成立するから (3.6) と (3.11) は同値である。

(ロ). $0 < \mathrm{Im}\, c_1(x^0) < \sqrt{a_2(x^0)^{-2} - a_1(x^0)^{-2}}$ のときは、$\lambda_1^+$ が虚根, $\lambda_2^+$ が実単根となる点で考えると、(2.1) 及び (3.2) より

(3.12) $$\mathrm{Im}\, \nu(x', \sigma) = \mathrm{Re}\, c_1(x') \frac{|\mathrm{Im}\, c_1(x')| \cdot |\sigma|}{|a_1^{-2} - c_1^2|\, \mathrm{Re}\sqrt{a_1^{-2} - c_1^2}}$$

が得られる。ここで $\sqrt{1} = 1$. 従って (3.3) と (3.11) は同値である。

(ハ). $0 < -\mathrm{Im}\, c_1(x^0) < \sqrt{a_2(x^0)^{-2} - a_1(x^0)^{-2}}$ のときは、

$L_1(x',\tau,\sigma)$ を $L_1(x',-\tau,-\sigma)$ でおきかえば、(ロ)と同様にして (3.12) が得られる。証明終。

最後に、$P_j$ は今までと同じ形 で $P=\prod_{j=1}^{m} P_j$ が強双曲型，$\hat{B}_1,\cdots,\hat{B}_m$ は一般の normal な有次境界作用素として

$$(P,\hat{B}_1,\cdots,\hat{B}_m)\begin{cases} P(x,D)u=f & \text{in } \Omega, \\ \hat{B}_j(x',D)u=g_j & \text{on } T,\ j=1,\cdots,m \end{cases}$$

を考える。このときは一般性を失わずに $a_m<\cdots<a_1$ と仮定できる。今、$\lambda_l^+(x^0,\eta^0,\sigma^0)$ が実重根かつ $L(x^0,\eta^0,\sigma^0)=0$ とする。このとき、(3.1) を仮定すれば、$L$ は

$$L(x',\tau,\sigma)=(\lambda_l^+(x',\tau,\sigma)-\beta(x',\tau,\sigma))\cdot(\text{nonzero factor})$$

と書くことができるが、$\beta$ が $\tau,\sigma$ について斉関数であることは一般に期待できない。従って (3.5) の第二式の $D(x',\sigma)$ は、第一式のそれとは(一般に)異るので、これを $\hat{D}(x',\sigma)$ とかく。この記号を使うと

<u>定理3.</u> 下に述べる二つの仮定の下に $\beta$) から ($\alpha$) が従う。

<u>仮定I.</u> $|L(x^0,\eta^0-i\gamma,\sigma^0)|\geq C\gamma^k \ (\gamma>0)$. ここで、$P(x^0,\eta^0,\sigma^0,\lambda)=0$ が実重根をもつとき $k=\frac{1}{2}$，もたないとき $k=1$.

<u>仮定II.</u> $L(x^0,\eta^0,\sigma^0)=0$ かつ $\lambda_l^+(x^0,\eta^0,\sigma^0)$ が実重根のとき、(イ) $\exists\,\delta>0$;

$$\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \arg D(x',\sigma) \leqq \frac{3}{2}\pi,\quad \frac{\pi}{2} \leqq \hat{D}(x',\sigma) \leqq \frac{3}{2}\pi-\delta,$$

又は、(ロ)　$\beta(x',\tau,\sigma)$ が $\tau,\sigma$ につき奇関数，かつ

$$\sum_{j=l+1}^{m}\left(|(C_{lj}L)(x',\eta,\sigma)|^2 + |(\lambda_l^{+}-\lambda_l^{-})^{-1}(C_{jl}L)(x',\eta,\sigma)|^2\right)$$

と、$(\eta,\sigma)$ を $(-\eta,-\sigma)$ でおきかえたものが互に他をおさえる。

<u>証明.</u>　仮定IIの(ロ)の場合は、これまでの議論より明らかであろう。(イ)の場合は[10]で証明されている。

<u>§4. おわりに.</u>　上の仮定Iを除くことには本質的な困難が伴うようである。例えば、定理2で(3.1)を仮定しないとき、新に、系3.1の下の注意,(ロ)の可能性が生ずる。この場合も $L_1$ は(3.2)と同じ表現をもつ。更に、(3.3)が成立すれば *microlocal estimate* が得られるが、(2.2)から(3.3)を引き出すのは困難であるように思われる。これについては、他日を期したい。

References

[1] R. Agemi, Remarks on $L^2$-well-posed mixed problems for hyperbolic equations of second order, Hokkaido Math. J., Vol. 2, 214-230 (1973).

[2] _______, Iterated mixed problems for d'Alembertians, ibid., Vol. 3, 104-128 (1974).

[3] _______, Iterated mixed problems for d'Alembertians II, ibid., Vol. 4, 281-294 (1975).

[4] _______, On a characterization of $L^2$-well posed mixed problems for hyperbolic equations of second order, Proc. Japan Acad., Vol. 51, 247-252 (1975).

[5] R. Agemi and T. Shirota, On necessary and sufficient conditions for $L^2$-well posedness of mixed problems for hyperbolic equations, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, Vol. 21, 133-151 (1970).

[6] M. S. Agranovich, Boundary value problems for systems with a parameter, Math. USSR Sbornik, Vol. 13, 25-64 (1971).

[7] H. O. Kreiss, Initial boundary value problems for hyperbolic systems, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 23, 277-298 (1970).

[8] K. Kubota, Remarks on boundary value problems for hyperbolic equations, Hokkaido Math. J., Vol. 2, 202-213 (1973).

[9] _______, A characterization of $L^2$-well posedness for iterations of hyperbolic mixed problems of second order, Proc. Japan Acad., Vol. 52, 492-495 (1976).

[10] _______, Remarks on $L^2$-well posedness of mixed problems for hyperbolic systems, to appear in Hokkaido Math. J., Vol. 6, No. 1.

[11] S. Miyatake, Mixed problems for hyperbolic equations of second order with first order complex boundary operators, Japanese J. Math., New Series, Vol. 1, 111-158 (1975).

[12] T. Ohkubo and T. Shirota, On structure of $L^2$-well-posed mixed problems for hyperbolic systems of first order, Hokkaido Math. J., Vol. 4, 82-158 (1975).

[13] R. Sakamoto, On a class of hyperbolic mixed problems, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 16, 429-474 (1976).

[14] S. Sato and T. Shirota, Remarks on modified symmetrizers for $2\times 2$ hyperbolic mixed problems, Hokkaido Math. J., Vol. 5, 120-138 (1976).