数理解析研究所講究録
338巻 1978年 103-107

作用素のベクトル値関数空間への表現について

東北大 教養　吉野 崇

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界線型作用素Tを扱う。$\|T\|<1$とするとき、$x\in\mathcal{H}$に対して、$Wx=\hat{x}(z)$, $\hat{x}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}T^n x]z^n$で定義されるWは、$\mathcal{H}$から$H^2_{\mathcal{H}}(dz)$の中へのisometryで、このWによってTは$H^2_{\mathcal{H}}(dz)$上のbackward shiftのrestrictionとして表現出来ることが知られている。即ち、$T=W^{-1}(S^*|W\mathcal{H})W$と表わせる。(ここでSは$H^2_{\mathcal{H}}(dz)$上のshiftである。)

この表現は$W\mathcal{H}$の構造が詳しく解析出来るならば、contractionに対するunitary dilationの理論に比較して、表現が同型表現であるからTを解析するのに非常に有効な手段であると思われる。この観点から、ここでは$W\mathcal{H}$の$H^2_{\mathcal{H}}(dz)$の中での構造を調べる。

<u>定理 1</u>　$\mathcal{H}$上の線型作用素Tが、$\|T\|<1$とすると、$\mathcal{H}$から$H^2_{\mathcal{H}}(dz)$の中へのisometry Wが存在して、$W\mathcal{H}$はS^*で不変で、$T=W^{-1}(S^*|W\mathcal{H})W$である。ここでSは$H^2_{\mathcal{H}}(dz)$上の片側shiftである。

証明　$x \in \mathcal{H}$ に対して、$Wx = \hat{x}(z)$, $\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}T^n x]z^n$ とせよ。$\|\sum_{n=0}^{k}[(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}T^n x]z^n\|^2 = \sum_{n=0}^{k}\|(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}T^n x\|^2 = \sum_{n=0}^{k}\langle (I-T^*T)T^n x, T^n x\rangle$ $= \sum_{n=0}^{k}[\|T^n x\|^2 - \|T^{n+1}x\|^2] = \|x\|^2 - \|T^{k+1}x\|^2$ だから、$\|T\| < 1$ により、$\|Wx\|^2 = \lim_{k\to\infty}\|\sum_{n=0}^{k}[(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}T^n x]z^n\|^2 = \|x\|^2 - \lim_{k\to\infty}\|T^{k+1}x\|^2 = \|x\|^2$. 又、$WTx = \widehat{Tx}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}T^{n+1}x]z^n = S^*\hat{x}(z) = S^*Wx$, for all $x \in \mathcal{H}$ だから、$W\mathcal{H}$ は S^* で不変で、$T = W^{-1}(S^*/W\mathcal{H})W$ である。

$x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ に対して、E_x を $H^2_{\mathcal{H}}(dz)$ から $\vee\{xz^n ; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ $= H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$ 上への orthogonal projection とすると、E_x は S と可換だから次を得る。

補助定理 1　$\phi(z) \in H^\infty(dz)$ に対して、各 $E_xW\mathcal{H}$ 及び $\widehat{E_xW\mathcal{H}}$ (the closure of $E_xW\mathcal{H}$) は $\phi(S)^*$ で不変である。

証明　$\phi(S)^* E_xW\mathcal{H} = E_x\phi(S)^*W\mathcal{H} \subset E_xW\mathcal{H} \subset \widehat{E_xW\mathcal{H}}$ だから、$\phi(S)^*\widehat{E_xW\mathcal{H}} \subset \widehat{E_xW\mathcal{H}}$.

E_x は S と可換だから、$S_x = E_xSE_x$ は $H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$ 上の simple unilateral shift であり、補助定理 1 より $\widehat{E_xW\mathcal{H}}$ は S_x^* で不変である。

補助定理 2　$\widehat{E_xW\mathcal{H}} \subsetneqq H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$ で $\dim \widehat{E_xW\mathcal{H}} > 1$ ならば、S_x^* の閉不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在して、$\{0\} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \widehat{E_xW\mathcal{H}}$ 且つ $\mathcal{M} \cap E_xW\mathcal{H} \neq \{0\}$.

証明　$\dim \widehat{E_xW\mathcal{H}} > 1$ のとき，$\{0\} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \widehat{E_xW\mathcal{H}}$ なる S_x^* の閉不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在することは知られているから、条件 $\widehat{E_xW\mathcal{H}} \subsetneqq H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$ の下で $\mathcal{M} \cap E_xW\mathcal{H} \neq \{0\}$ なることを示せばよい。$H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz) \ominus \widehat{E_xW\mathcal{H}}$ $= \phi_1(S_x)H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$, $H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz) \ominus \mathcal{M} = \phi_2(S_x)H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$ with $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ inner

とせよ. $\phi(z)=\phi_2(z)\phi_3(z)$ for some inner $\phi_3(z)$ と分解出来るから、$\mathcal{M}=\{f(z)\in H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)\,;\ \phi_2(S_x)^*f(z)=0\}$ で $\widetilde{E_xW\mathcal{H}}=\{f(z)\in H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)\,;\ \phi_2(S_x)^*\phi_3(S_x)^*f(z)=0\}$ $=\phi_3(S_x)\mathcal{M}\oplus\{f(z)\in H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)\,;\ \phi_3(S_x)^*f(z)=0\}$ である. 従って, $g(z)\in E_xW\mathcal{H}$, $g(z)\neq 0$ は $g(z)=g_1(z)\oplus g_2(z)$, $g_1(z)\in\phi_3(S_x)\mathcal{M}$, $g_2(z)\in\{f(z)\in H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)\,;\ \phi_3(S_x)^*f(z)=0\}$ と分解出来る。$g_1(z)=0$ の場合は $\mathcal{M}$ の代りに $H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)\ominus\phi_3(S_x)H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$ をとればよいから $g_1(z)\neq 0$ の場合を考える、$\phi_3(S_x)^*g(z)=\phi_3(S_x)^*g_1(z)\in\mathcal{M}$ だから、補助定理 1 によって、$0\neq\phi_3(S_x)^*g(z)\in\mathcal{M}\cap E_xW\mathcal{H}$.

<u>定理 2</u>　或る $x\in\mathcal{H}$, $x\neq 0$ に対して $\widetilde{E_xW\mathcal{H}}\subsetneqq H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$ ならば、T は自明でない閉不変部分空間を持つ.

<u>証明</u>　定理 1 により $S^*|W\mathcal{H}$ が自明でない閉不変部分空間を持つことを示せばよい. P_0 を $H^2_{\mathcal{H}}(dz)$ から $\mathcal{H}$ 上への orthogonal projection とすると, P_0 は E_x と可換だから、$P_0E_x\sum_{n=0}^{\infty}[(1-T^*T)^{1/2}T^n(1-T^*T)^{-1/2}x]z^n$ $=E_xP_0\sum_{n=0}^{\infty}[(1-T^*T)^{1/2}T^n(1-T^*T)^{-1/2}x]z^n=E_xx=x\neq 0$ 従って、$E_xW\mathcal{H}\neq\{0\}$ である. $\dim\widetilde{E_xW\mathcal{H}}=1$ の場合は, $E_x\hat{u}(z)=0$ となる $\hat{u}(z)\in W\mathcal{H}$, $\hat{u}(z)\neq 0$ が存在するから、$\mathfrak{M}=\vee\{S^{*n}\hat{u}(z)\,;\ n=0,1,2,\cdots\}$ とすると, $\mathfrak{M}\neq\{0\}$ で、$\mathfrak{M}$ は S^* で不変であり、$\phi(z)\in H^{\infty}(dz)$ に対して、$E_x\phi(S)^*\hat{u}(z)=\phi(S)^*E_x\hat{u}(z)=0$ だから、$E_x\mathfrak{M}=\{0\}$. 一方 $E_xW\mathcal{H}\neq\{0\}$ だから $\mathfrak{M}\subsetneqq W\mathcal{H}$ である. 故に、$\mathfrak{M}$ は求める不変部分空間である。次に $\dim\widetilde{E_xW\mathcal{H}}>1$ の場合は、補助定理 2 により $\{0\}\subsetneqq\mathcal{M}\subsetneqq\widetilde{E_xW\mathcal{H}}$ 且つ $\mathcal{M}\cap E_xW\mathcal{H}\neq\{0\}$ なる S_x^* の閉不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在するから、$g(z)\in\mathcal{M}\cap E_xW\mathcal{H}$, $g(z)\neq 0$ に対して、$E_x\hat{u}(z)=g(z)$ なる $\hat{u}(z)\in W\mathcal{H}$

が存在する。そこで、$\mathfrak{M} = \vee\{S^{*n}\hat{u}(z);\ n=0,1,2,\cdots\}$ とすると、$\mathfrak{M}$ は明らかに S^* で不変で $\{0\} \subsetneq E_x\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$ である。何故なら、$\phi(z) \in H^\infty(dz)$ に対して、$E_x \phi(S)^*\hat{u}(z) = \phi(S)^* E_x\hat{u}(z) = \phi(S)^* g(z) \in \mathcal{M}$ で $g(z)\neq 0$ だから。従って、$\{0\}\subsetneq \widehat{E_x\mathfrak{M}} \subset \mathcal{M} \subsetneq \widehat{E_xW\mathcal{H}}$ となり $\{0\}\subsetneq\mathfrak{M}\subsetneq W\mathcal{H}$ である。故に $\mathfrak{M}$ は求める $S^*|W\mathcal{H}$ の不変部分空間である。

註　$\{0\}\subsetneq \widehat{E_xW\mathcal{H}} \subsetneq H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$ の場合は、$H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)\ominus\widehat{E_xW\mathcal{H}} = g(S_x)H^2_{E_x\mathcal{H}}(dz)$, for some inner $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ だから、$\langle g(S_x)x, W\mathcal{H}\rangle = \langle g(S_x)x, E_xW\mathcal{H}\rangle = 0$ 従って、$y\in\mathcal{H}$ に対して、$\langle g(T^*)(1-T^*T)^{1/2}x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n x, (1-T^*T)^{1/2}T^n y\rangle = \langle g(S_x)x, \hat{y}(z)\rangle = 0$ よって、$g(T^*)(1-T^*T)^{1/2}x=0$。$(1-T^*T)^{1/2}x\neq 0$ だから、$g(T^*)=0$ 又は、$0\in\sigma_p(g(T^*))$ である。$g(T^*)=0$ の場合は、T^* は、Sz.-Nagy & C. Foias の意味の class C_0 の operator である。

次に $H^2_{\mathcal{H}}(dz)\ominus W\mathcal{H}$ の構造を調べる。

補助定理 3　$y\in\mathcal{H}$, $y\neq 0$ に対して、

$\mathfrak{M}_y = \vee\{[-(1-T^*T)^{-1/2}T^*y]z^n + [(1-T^*T)^{-1/2}y]z^{n+1};\ n=0,1,2,\cdots\}$ とすると、$\mathfrak{M}_y$ は S で不変で $\mathfrak{M}_y \subset H^2_{\mathcal{H}}(dz)\ominus W\mathcal{H}$ である。

証明　$\mathfrak{M}_y$ の作り方から S で不変なることは明らかである。$\hat{x}(z)\in W\mathcal{H}$ に対して、$\langle [-(1-T^*T)^{-1/2}T^*y]z^n+[(1-T^*T)^{-1/2}y]z^{n+1}, \hat{x}(z)\rangle$

$= \langle -(1-T^*T)^{-1/2}T^*y, (1-T^*T)^{1/2}T^n x\rangle + \langle (1-T^*T)^{-1/2}y, (1-T^*T)^{1/2}T^{n+1}x\rangle$

$= \langle -T^*y, T^n x\rangle + \langle y, T^{n+1}x\rangle = 0.$

定理 3　$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の complete orthonormal basis とすると、$H^2_{\mathcal{H}}(dz)\ominus W\mathcal{H} = \vee\{\mathfrak{M}_{(1-T^*T)^{1/2}x_n};\ n=0,1,2,\cdots\}$ である。

証明　補助定理3により、$\vee\{\mathfrak{M}_{(1-T^*T)^{1/2}x_n}\,;\, n=0,1,2,\cdots\} \subset H^2_{\mathcal{H}}(dz)\ominus W\mathcal{H}$ である。$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \in [H^2_{\mathcal{H}}(dz)\ominus W\mathcal{H}]\ominus \vee\{\mathfrak{M}_{(1-T^*T)^{1/2}x_n}\,;\, n=0,1,2,\cdots\}$ とすると、$\hat{x}(z)\in W\mathcal{H}$ に対して、$\langle \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(1-T^*T)^{1/2}g_n\,,\, x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle g_n\,,\,(1-T^*T)^{1/2}T^n x\rangle$ $=\langle g(z),\,\hat{x}(z)\rangle = 0$ だから、$\sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(1-T^*T)^{1/2}g_n = 0$. 一方 $g(z)$ は各 $\mathfrak{M}_{(1-T^*T)^{1/2}x_n}$ と直交しているから、$\langle -(1-T^*T)^{1/2}T(1-T^*T)^{-1/2}g_m + g_{m+1}\,,\, x_n\rangle$

$$= \langle -T(1-T^*T)^{-1/2}g_m + (1-T^*T)^{-1/2}g_{m+1}\,,\,(1-T^*T)^{1/2}x_n\rangle$$

$$= \langle g_m\,,\, -(1-T^*T)^{-1/2}T^*(1-T^*T)^{1/2}x_n\rangle + \langle g_{m+1}\,,\,(1-T^*T)^{-1/2}(1-T^*T)^{1/2}x_n\rangle$$

$$= \langle g(z)\,,\,[-(1-T^*T)^{-1/2}T^*(1-T^*T)^{1/2}x_n]z^m + [(1-T^*T)^{-1/2}(1-T^*T)^{1/2}x_n]z^{m+1}\rangle = 0.$$

従って、$g_{m+1} = (1-T^*T)^{1/2}T(1-T^*T)^{-1/2}g_m = (1-T^*T)^{1/2}T^2(1-T^*T)^{-1/2}g_{m-1}$

$=\cdots\cdots = (1-T^*T)^{1/2}T^{m+1}(1-T^*T)^{-1/2}g_0$ となり、前式に代入して、

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(1-T^*T)^{1/2}g_n = \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(1-T^*T)T^n(1-T^*T)^{-1/2}g_0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[T^{*n}T^n - T^{*n+1}T^{n+1}](1-T^*T)^{-1/2}g_0 = (1-T^*T)^{-1/2}g_0 - \lim_{n\to\infty}[T^{*n}T^n](1-T^*T)^{-1/2}g_0$$

$= (1-T^*T)^{-1/2}g_0$. 故に $g_0=0$ よって、前に得られた漸化式によって、

$g_n = 0$ だから $g(z)=0$.

以上.

参考文献

[1]. H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic press 1964.

[2]. B. Sz.-Nagy & C. Foiaş, Analyse harmonique des opèrateurs de l'espace de Hilbert, Acadèmiai Kiadò 1967.

[3]. H. Radjavi & P. Rosenthal, Invariant subspaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 77 1973.