数理解析研究所講究録
338巻 1978年 92-102

QUASI-SIMILARITY OF OPERATORS

富山大 理　　北野孝一

線形作用素についての quasi-similarity の概念は Sz.-Nagy と Foias [18] により導入されて以来、不変部分空間の問題と関連が深いこともあり、近年多くの研究が発表されている。

1. Quasi-similarity と Hyperinvariant Subspaces

[定義]　H, K は Hilbert 空間とし、$A \in B(H)$, $B \in B(K)$ に対して、A が B の quasiaffine transform である（記号 $A \prec B$）というのは、H から K への 1 対 1 かつ dense range をもつ作用素 S が存在して $SA = BS$ が成り立つことである。A と B が quasi-similar である（記号 $A \overset{q}{\sim} B$）というのは、A が B の、かつ B が A の quasiaffine transform になっているときである。

quasi-similarity と hyperinvariant subspace の関係については、

[定理]（[18, 8, 16, 20]）　$A \in B(H)$, $B \in B(K)$ に対して、$A \overset{q}{\sim} B$ で、B が hyperinvariant subspace をもつ（即ち B の hyperinvariant subspacesの全体を $\mathrm{Lat}_h B$ で表わすとき，$\mathrm{Lat}_h B \supsetneqq \{0, K\}$)

$\Rightarrow$ Aもhyperinvariant subspaceをもつ(即ち，$\mathrm{Lat}_h A \supsetneqq \{0, H\}$).

この定理に関連して Sz.-Nagy, Foias [18] は unitary operator と，Hoover [16] は normal operator と quasi-similar な作用素に対して．

[定理] $A \in B(H)$, $B \in B(K)$，Bは unitary 又は normal で，

$A \overset{q}{\sim} B$

$\Rightarrow$ Bの hyperinvariant subspacesの lattice $\mathrm{Lat}_h B$ と $\mathrm{Lat}_h A$ の sublattice との間に lattice isomorphism が存在する．

Fialkow [7] は non-normal operator まで拡張することを試みている．まず $T \in B(H)$ に対して，$(T)'$：Tの commutant，$(T)''$：Tの second commutant，$\varphi(H)$：Hの closed subspacesの全体，$\gamma(T) = \{\mathfrak{M} \in \varphi(H);\ \mathfrak{M} = \overline{Q_{\mathfrak{m}} H}$ for some operator $Q_{\mathfrak{m}} \in (T)''\}$ とするとき．

[定理] (I) $T \in B(H) \Rightarrow \gamma(T) \subset \mathrm{Lat}_h T$.

(II) $S, T \in B(H)$, $S \overset{q}{\sim} T \Rightarrow {}^{\exists}$function $g : \gamma(T) \to \varphi(H)$ s.t.

(1) $g(\mathfrak{M}) \in \mathrm{Lat}_h S$ for ${}^{\forall}\mathfrak{M} \in \gamma(T)$.

(2) g injective.

(3) $g(\{0\}) = \{0\}$, $g(H) = H$.

(4) $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \gamma(T)$, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N} \Rightarrow g(\mathfrak{M}) \subset g(\mathfrak{N})$.

(5) $\{\mathfrak{M}_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \gamma(T)$, $\bigcap_\alpha \mathfrak{M}_\alpha = \{0\} \Rightarrow \bigcap_\alpha g(\mathfrak{M}_\alpha) = \{0\}$.

(6) $\{\mathfrak{M}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset \gamma(T)$, $\bigvee_\alpha \mathfrak{M}_\alpha \in \gamma(T) \Rightarrow g(\bigvee_\alpha \mathfrak{M}_\alpha)=\bigvee_\alpha g(\mathfrak{M}_\alpha)$.

(7) $S|g(\mathfrak{M}) < T|\mathfrak{M}$ for $^\forall\mathfrak{M}\in\gamma(T)$.

(8) R が non-zero part of $S|g(\mathfrak{M}) \Rightarrow$ $^\forall$nonempty closed-and-open subset of $\sigma(R)$ は $\sigma(T|\mathfrak{M})$ と交わる.

(9) V が non-zero part of $T|\mathfrak{M} \Rightarrow$ $^\forall$nonempty closed-and-open subset of $\sigma(V)$ は $\sigma(S|g(\mathfrak{M}))$ と交わる.

[例]. Eを spectral operator $T\in B(H)$ の spectral measure とする. Tの spectral subspaces は次のようになる

$$\mathrm{Lat}_{sp}T=\{E(\sigma)H\,;\ \sigma \text{ は Borel set }\}$$

ところで $E(\sigma)$は $(T)''$ の元で, idempotent であるから $\mathrm{Lat}_{sp}T \subset \gamma(T)$ が成り立つ.

[系]. $T\in B(H)$ spectral operator, $S\overset{q}{\sim}T$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Lat}_h S$ にはTの spectral subspaces の lattice $\mathrm{Lat}_{sp}T$ と lattice isomorphic な sublattice が存在する.

[注1] AとBが similar 即ち invertible なJが存在して $AJ=JB$ が成り立つならば (i) $\mathfrak{M}\in \mathrm{Lat}\,B \Leftrightarrow J\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}A$ (ii) $^\forall\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}\,B$ に対して $B|\mathfrak{M}$ と $A|J\mathfrak{M}$ は similar になる. これらは quasi-similar の場合には拡張できない. (ii)については Fialkow [7] は $A\overset{q}{\sim}B$ であるが, $\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}\,A$ に対して $A|\mathfrak{M}$ はBのどんな part とも quasi-similar にならないような作用素が存在することを示している.

[注2] lattice isomorphic に関して、Herrero [14] は、2つの quasi-similar な order 3 の nilpotent operators で hyperinvariant な subspaces の lattices で isomorphic にならないものが存在することを示している.

2. Quasi-similarity と Jordan Operator

Apostol [1] は normal operator と quasi-similar になる条件を求めている.

[定理] X を complex Banach space とし、$T \in B(X)$ が Hilbert space 上の normal operator と quasi-similar である.

$\Longleftrightarrow$ $X_n \in \mathrm{Lat}\,T$ $(n=1,2,\cdots,m)$, $T|X_n$ は normal operator と similar かつ $\bigcap_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{n=i}^{m} X_n\right)=\{0\}$ if $m=\infty$ なるような basic sequence $\{X_n\}_{n=1}^{m}$ が存在する.

ここで countable sequence $\{X_n\}_{n=1}^{m} \subset \varphi(X)$ が basic であるとは、for any n, X_n と $\bigvee_{k\neq n}^{m} X_k$ が complementary で $\bigcap_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{n=i}^{m} X_n\right)=\{0\}$ if $m=\infty$ が成り立っていることである.

Fialkow [7] は上の定理を spectral operator に拡張を試みている.

[定理] $T \in B(H)$ が spectral operator と quasi-similar である.

$\Longleftarrow$ $\mathfrak{M}_n \in \mathrm{Lat}\,T$ $(n=1,2,\cdots,m)$, $T|\mathfrak{M}_n$ spectral operator

かつ $\bigcap_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{n=i}^{m}\mathfrak{M}_n\right)=\{0\}$ if $m=\infty$ をみたすような basic sequence $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=1}^{m}$ が存在する.

[注] $\Rightarrow$ が成り立つかどうかは未解決である.

次に有限次元の空間の operator が Jordan canonical form と similar になることの無限次元の空間の場合への拡張を考えてみよう.

[定義] $\widetilde{H}=\overbrace{H\oplus\cdots\oplus H}^{n}$ に act している（H は Hilbert space）$n\times n$ 行列 $[A_{ij}]$ で定義される nilpotent operator

$$A_{i,i+1}=1_H \quad \text{for } i=1,2,\cdots,n-1$$
$$A_{i,j}=0 \quad \text{for other entries}$$

を order n の Jordan block operator という（H 上の zero operator は order 1 の Jordan block operator である）. 次に, H_1, $H_2,\cdots,H_m$ を Hilbert spaces とし、$n_1,\cdots,n_m$ を自然数とする. $\widetilde{H}_k=\overbrace{H_k\oplus\cdots\oplus H_k}^{n_k}$ $(k=1,2,\cdots,m)$ とし、$\widetilde{H}_k$ に act する order n_k の Jordan block operator を J_k とするとき、$\widetilde{H}_1\oplus\cdots\oplus\widetilde{H}_m$ に act している operator $J_1\oplus\cdots\oplus J_m$ を Jordan operator という.

Apostol, Douglas, Foias [2]（Williams [21] で別証）は nilpotent operator に対して.

[定理] 任意の nilpotent operator は Jordan operator と quasi-similar である.

これを Williams [23] は algebraic operator まで拡張した.

[定理] AをH上のalgebraic operatorとし、$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ ($i\neq j$ ならば $\lambda_i\neq\lambda_j$) であるとする.

$\Rightarrow$ Hilbert spaces $H_1,\cdots,H_n$ にそれぞれactしているJordan operators $J_1,\cdots,J_n$ が存在して $A \overset{q}{\sim} B=\sum_{k=1}^{n}\oplus(\lambda_k 1_{H_k}+J_k)$ が成り立つ.

Sz.-Nagy, Foias [19] はJordan modelのgeneralizationに対応する概念を用いて、C_0 operatorの性質をquasi-similarityとの関連で調べている.

3. Quasi-similarityとSpectrumの関係.

quasi-similarityとspectrumの関係については、normal operatorの場合には、Douglas [5] によれば、

[定理] quasi-similar normal operatorsはunitary同値である. 従ってquasi-similar normal operatorsはequal spectraをもつ.

[注] unitary equivalentの手法ではhyponormal operatorに拡張できない.

[例] Sarason [Halmos 13, P309] : similarにもかかわらずunitary equivalentでない2つのhyponormal operatorsが存在する.

Clary [4] は別の手法により、hyponormal operatorま

で拡張した．

［定理］ quasi-similar な hyponormal operators は equal spectra をもつ．

それから，Hoover [17] によれば，

［定理］ quasi-similar isometries は unitary equivalent．従って equal spectra をもつ．

ところが一般には quasi-similarity は spectrum を保存しない（Sz-Nagy, Foias [18, P250]）．Hoover [17] は更に，compact 性も保存されないことを示している．

［例］ $A \overset{q}{\sim} B$ であって，$\sigma(A)=\{z : |z| \leq 1\}$，$\sigma(B)=\{0\}$ しかも B は compact operator であるようなものが存在することを示している．勿論 A は compact にならない．

［注］ [18] では spectrum は保存されないが spectrum の boundary についてはどうか？．これに対する否定的解答にもなっている．

ところが point spectrum については，Rosenthal [Duke Math. J. 41(1974)] によれば，

［定理］ $A \overset{q}{\sim} B \Rightarrow \sigma_p(A) = \sigma_p(B)$．

direct sum に関連して，Herrero [15] は，

［定理］ $T = \sum \oplus T_n$ (direct sum)

$\Rightarrow \sigma(S) = \overline{\bigcup_n \sigma(T_n)}$ であり，かつ $T \overset{q}{\sim} S$ となる S が存在する．

この定理の証明には、Gilfeasther [12] の結果を用いている。次に Rosemblum の定理に関連するものとして、Hoover [17] は、

[定理] $A \overset{q}{\sim} B \Rightarrow \sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \phi$.

実際はもっと弱い条件で成り立つのである。

$B \prec A \Rightarrow \sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \phi$.

quasi-invertible operator X が存在して、$AX = XB$ が成り立っているとする。今 $D_{A,B}$ を $B(H)$ 上に次のように定義する。$D_{A,B}(T) = AT - TB$ for $T \in B(H)$. この $D_{A,B}(\cdot)$ は linear かつ continuous となることは明らか。ここで、$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \phi$ であると仮定しておくことにする。そして $D_{A,B}(\cdot) = \mathcal{R} - \mathcal{L}$ とおく。但し $\mathcal{R} = AT$, $\mathcal{L} = TB$ である。このとき $\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$ である。従って $\sigma(\mathcal{R} - \mathcal{L}) \subset \sigma(\mathcal{R}) - \sigma(\mathcal{L})$ であるから $\sigma(D_{A,B}) \subset \sigma(A) - \sigma(B)$ となり、$0 \notin \sigma(D_{A,B})$ となる。これより $D_{A,B}$ は invertible となる。しかし今の場合 $D_{A,B} = 0$ 従って $D_{A,B}$ は not invertible である(矛盾)。ゆえに $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \phi$ が成り立つ。

essential spectrum に関しては、Williams [22], Fialkow [6] によれば、

[定理] $A \overset{q}{\sim} B \Rightarrow \sigma_e(A) \cap \sigma_e(B) \neq \phi$.

quasi-similarity と spectrum の関係については、operator

を制限した場合等に関する詳しい研究は Fialkow [6] 等に見られる.

4. Compact や Quasi-nilpotent Operator との関連.

Apostol, Douglas, Foias [2], Foias, Pearcy [9], Williams [21] によれば compact operator との関連では,

[定理] 任意の nilpotent operator は compact operator と quasi-similar である.

quasinilpotent の場合には, Foias, Pearcy [9] によれば,

[定理] T は quasinilpotent operator とする.
$\Rightarrow$ compact operators K_1, K_2 で次の関係をみたすものが存在する. $K_1 < T < K_2$.

しかし, quasi-similar まではもって行けないのである.

[定理] どんな compact operator とも quasi-similar にならない quasinilpotent operator が存在する.

次に Fialkow [6] による quasinilpotent operator と quasi-similar になる operator についての若干の結果をあげておく. まず Q_{qs} を定義しておく.

$$Q_{qs} = \{ T \in B(H) : T \text{ はある quasinilpotent operator と quasi-similar である} \}.$$

[定理] Q_{qs} は nilpotent operators 全体の norm closure の真の subset である。

Q_{qs} は countable direct sum で closed である。

[定理] $X \subset \mathbb{C}$ が Q_{qs} に属する operator の spectrum になる。

$\Longleftrightarrow$ X は compact, connected かつ 0 を含んでいる。

最後に、Apostol, Foias, Pearcy [3] によれば algebraic operator の場合には、

[定理] 任意の algebraic operator は normal + compact なる形の operator と quasi-similar になる。

invariant subspace の存在との関連では、

[定理] T が quasi-nilpotent で、normal + compact なる形の operator に quasi-similar である。

$\Longrightarrow$ T は nonzero compact operator と commute する。

REFERENCES

[1] C. Apostol, Operators quasisimilar to a normal operator, Proc. Amer. Math. Soc., 53(1975), 104-106.

[2] C. Apostol, R. G. Douglas & C. Foias, Quasisimilar models for nil-potent operators, Trans. Amer. Math. Soc., 224(1976), 407-415.

[3] C. Apostol, C. Foias & C. Pearcy, Quasiaffine transforms of operators, Notices of Amer. Math. Soc., 25(1978).

[4] S. Clary, Equality of spectra of quasisimilar hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 53(1975), 88-90.

[5] R. G. Douglas, On the operator equation S*XT = X and related topics, Acta Sci. Math. (Szeged), 30(1969), 19-32.

[6] L. A. Fialkow, A note on quasisimilarity of operators, Acta Sci. Math. (Szeged), 39(1977), 67-85.

[7] L. A. Fialkow, A note on quasisimilarity II, Pacific J. Math., 70 (1977), 151-162.

[8] P. A. Fillmore, Notes on operators Theory, van Nostrand, 1970.

[9] C. Foias & C. Pearcy, A model for quasinilpotent operators, Michigan Math. J., 21(1974), 399-404.

[10] C. K. Fong & M. Radjabalipour, On quasiaffine transforms of spectral operators, Michigan Math. J., 23(1976), 147-150.

[11] C. K. Fong, Quasiaffine trnansforms of subnormal operators, Pacific J. Math., 70(1977), 361-368.

[12] F. Gilfeather, Norm conditions on resolvents of similarities of Hilbert space operators and applications to direct sums and integrals of operators, Proc. Amer. Math. Soc., 68(1978), 44-48.

[13] P. R. Halmos, Hilbert space problem book, van Nostrand, 1967.

[14] D. A. Herrero, Quasisimilarity does not preserve the hyperlattice, Proc. Amer. Math. Soc., 65(1977), 80-84.

[15] D. A. Herrero, Quasisimilar operators with different spectra, (Preprint).

[16] T. B. Hoover, Hyperinvariant subspaces for n-normal operators, Acta Sci. Math. (Szeged), 32(1971), 109-119.

[17] T. B. Hoover, Quasisimilarity of operators, Illinois J. Math., 16 (1972), 678-686.

[18] B. Sz.-Nagy & C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, 1967. [English Transl. 1970].

[19] B. Sz.-Nagy & C. Foias, On injections, intertwining operators of class C_o, Acta Sci. Math. (Szeged), 40(1978), 163-167.

[20] C. Pearcy & A. Shields, A survey of the Lomonosov technique in the theory of invariant subspaces, Mathematical Surveys, 13(1974), Amer. Math. Soc.

[21] L. R. Williams, Similarity invariant for a class of nilpotent operators, Acta Sci. Math. (Szeged), 38(1976), 423-428.

[22] L. R. Williams, Quasisimilar operators have overlapping essential spectra, (to appear Acta Sci. Math.)

[23] L. R. Williams, A quasisimilarity model for algebraic operators, Acta Sci. Math.(Szeged), 40(1978), 185-188.