数理解析研究所講究録
338巻 1978年 77-83

Concavity of Certain maps on Matrix Spaces

北大 応用電気研 安藤 毅

1.序 n次の Hermite 行列の空間 H_n には positive semidefinite 性をもとにして自然な順序が入る; $A \geqslant B$ とは $A-B$ が positive semi-definite のことである. したがって行列空間での写像に関して,その Convex 性また Concave 性を問題にすることが出来る. 例えば $H_\ell \times H_m$ の凸部分集合から H_n への写像ΦがConvex であるとは

$$\Phi(\lambda A_1+(1-\lambda)A_2,\ \lambda B_1+(1-\lambda)B_2)$$
$$\leqslant \quad \lambda\Phi(A_1,B_1) \ + \ (1-\lambda)\Phi(A_2,B_2) \qquad (0<\lambda<1)$$

以下の研究は Lieb [3] により証明された定理;

$(A,B) \longmapsto A^{1-p}\otimes B^{p} \quad (0<p<1)$ は $A\geqslant 0, B\geqslant 0$ で concave ,に触発され,更に一般な Concavity定理を確立することを目標とした。応用として行列 $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$ の Hadamard積 $A*B=(a_{ij}b_{ij})$ に対する種々の上,下からの評価が出る. 詳細は Lin. Alg. Appl. に出版予定.

2. 基本的演算　以下 n 次の positive definite 行列の全体を H_n^+ とかく.

定理 1　$A, B \in H_n^+$ のとき

$$BA^{-1}B = \text{minimum}\left\{C \geq 0 : \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \geq 0\right\}$$

となり, したがって写像 $(A,B) \longmapsto BA^{-1}B$ は Convex.

これから直ちに Anderson-Duffin [1] の定理

$$(A,B) \longmapsto A!B \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\tfrac{1}{2}(A^{-1}+B^{-1})\right\}^{-1} \quad \text{Concave}$$

が出る. 実際, $A!B = 2\{B - B(A+B)^{-1}B\}$ である.

定理 2. (Pusz-Woronowicz [4])　$A, B \in H_n^+$ のとき

$$A\#B \overset{\text{def}}{=\!=} A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{maximum}\left\{C \geq 0 ; \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \geq 0\right\}$$

となり, したがって写像 $(A,B) \longmapsto A\#B$ は concave.

ここで maximum の存在は写像 $A \longmapsto A^{\frac{1}{2}}$ が H_n^+ で順序を保存することから出る.

$A!B$, $A\#B$ はそれぞれ A, B の調和平均, 幾何平均と考えられるもので, A と B が可換なら $A\#B = (AB)^{\frac{1}{2}}$ である. 一般に次の算術 − 幾何 − 調和平均不等式が成たつ.

$$\frac{1}{2}(A+B) \geqslant A\#B \geqslant A!B.$$

これ等の演算が $H_n \longmapsto H_m$ の positive linear map Φ で filtre をかけられたときどうなるを見ると，よく知られた Kadison の不等式（例えば [2]）を使うと

$$\Phi(A\#B) \leqslant \Phi(A)\#\Phi(B), \quad \Phi(A!B) \leqslant \Phi(A)!\Phi(B)$$

が出る，この不等式から容易に写像 $H_n^+ \ni A \longmapsto \Phi(A^{-1})^{-1}$ の concavity が導かれる.

3. Operator-monotone 函数.

Hermite 行列から新らしい Hermite 行列を生み出す一つの方法は functional calculus である. $f(\lambda)$ が $(0,\infty)$ 上の実数値連続函数のとき f の A による値を $f[A]$ とかこう. $f(\lambda)$ が順序を保存するとき，すなわち $A \leqslant B \Rightarrow f[A] \leqslant f[B]$ の性質をもつとき operator-monotone と呼ぶ. よく知られた Löwner の定理（[2] を見よ）によれば $f(\lambda)$ が operator-monotone である必充条件は，$\alpha \in R$, $\beta \geqslant 0$ と $(-\infty, 0]$ 上の正測度 $\mu(\cdot)$ を使って

$$f(\lambda) = \alpha + \beta\lambda + \int_{-\infty}^{0} \frac{1+\lambda t}{t-\lambda}\, d\mu(t)$$

と積分表示をもつことである. $f(\lambda) \geqslant 0$ のときは

$$f(\lambda) = \gamma + \beta\lambda + \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda+t}\, d\nu(t)$$

の形にかける，但し $\gamma, \beta \geqq 0$．$\nu(\cdot)$ は $[0,\infty)$ の正測度．
最も重要な operator-monotone 函数としては $\log\lambda$，λ^p $(0<p\leqq 1)$ がある。

上の積分表示と定理 1 を使うと次の定理が容易に出る．

定理3．$f(\lambda)$ が operator-monotone のとき H_n^+ からの写像 $A \longmapsto f[A]$ は concave，しかし $A \longmapsto A\cdot f[A]$ は convex．

$H_n \longmapsto H_m$ の positive linear map Φ で，$\Phi(I_n)=I_m$ なるものを使って filtre をかけると

$$\Phi(f[A]) \leqq f[\Phi(A)]$$

となる．

4．Tensor 積．2つの Hermite 行列 A, B の tensor 積 $A\otimes B$ はまた Hermite 行列になり，A, B が positive definite なら $A\otimes B$ も positive definite になる．tensor 積の演算と # 演算の可換性と，算術－幾何平均不等式を使うと容易に次がでる．

定理4．Φ, Ψ が共に $H_n^+ \longmapsto H_m^+$ の concave 写像なら，写像 $(A,B) \longmapsto \Phi(A)^{-1}\otimes\Psi(B)^{-1}$ は convex．

これから直ちに Lieb の定理[3]；$0 < p, q \leq 1$ のとき写像 $(A,B) \longmapsto A^{-p} \otimes B^{-q}$ は convex，が出る。

定理 1 を少し改良すれば，Φ, Ψ が共に $H_n^+ \longmapsto H_m^+$ の concave 写像であれば $(A,B) \longmapsto \Phi(A) ! \Psi(B)$ も concave 写像になることがわかるから，§3 の積分表示と結びつけると次の二つの主要定理が出る。

<u>定理 5.</u> $f(\lambda) \geq 0$ が operator-monotone で Φ, Ψ が共に $H_n^+ \longmapsto H_m^+$ の concave 写像のとき

$$(A,B) \longmapsto f[\Phi(A)^{-1} \otimes \Psi(B)] \cdot (\Phi(A) \otimes I_m)$$

も concave な写像になる。

<u>定理 6.</u> $f(\lambda)$ が operator-monotone，Φ が affine Ψ が concave 写像のとき

$$(A,B) \longmapsto f[\Phi(A) \otimes \Psi(B)^{-1}] \cdot (\Phi(A) \otimes I_m)$$

は convex な写像になる。

定理 5 からは $f(\lambda) = \lambda^p$ $(0<p<1)$ として序にのべた Lieb の定理が出る，また定理 6 からは次がでる

$$(A,B) \longmapsto A^{1+p} \otimes B^p \quad (0<p<1) \quad \text{convex.}$$

$$(A,B) \longmapsto (A \log A) \otimes I_m - A \otimes \log B \quad \text{convex.}$$

5. Hadamard 積. Tensor 積と並んで興味あるのは Hadamard 積である; $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in H_n$ に対しその Hadamard 積 $A*B \overset{\mathrm{def}}{=} (a_{ij}b_{ij})$. 重要なのは可換性 $A*B = B*A$ である. $A*B$ は tensor 積 $A\otimes B$ の主小行列になっている, この事は次のように表現すると使い良い; H_{n^2} から H_n への positive linear map Φ があり

$$\Phi(A\otimes B) = A*B \quad , \quad \Phi(I_{n^2}) = I_n.$$

このことから, 直ちに $A, B\in H_n^+$ なら $A*B\in H_n^+$ がでる. また前節の主定理を使うと, $H_n^+\times H_n^+$ からの写像として

$$(A,B) \longmapsto A^{1/p}*B^{1/q} \quad (1/p+1/q=1) \text{ は concave,}$$
$$(A,B) \longmapsto A^{-1/p}*B^{1/q} \quad (1/q-1/p=1,\ q\geq 1/2) \text{ は convex}$$

等がでる, 例えば上の concavity は

$$\sum_{i=1}^{k}(A_i*B_i) \leq \Big\{\sum_{i=1}^{k}A_i^p\Big\}^{1/p}*\Big\{\sum_{i=1}^{k}B_i^q\Big\}^{1/q}$$

といった Hölder 型の不等式となる.

定理 7. $A, B\in H_n^+$ のとき

$$A*B \leq (A^p*I)^{1/p}(B^q*I)^{1/q} \quad (1/p+1/q=1).$$

これには $C\overset{\mathrm{def}}{=}(A^p*I)^{1/p}$, $D\overset{\mathrm{def}}{=}(B^q*I)^{1/q}$ として上の concavity から出る不等式

$$A*B \leqq \frac{d}{d\varepsilon}(C^p+\varepsilon A^p)^{1/p} * (D^q+\varepsilon B^q)^{1/q}\Big|_{\varepsilon=0}$$

の右辺を計算すればよい。 同様に上の Convexity から

<u>定理 8.</u> $A, B \in H_n^+$ のとき

$$A*B \geqq (A^{-p}*I)^{-1/p}\cdot(B^q*I)^{1/q}. \quad (1/q-1/p=1,\ p\geqq 1\geqq q\geqq 1/2)$$

$A*B$ が $A\otimes B$ から Φ を通して得られることを考えると, operator-monotone 函数 $f(\lambda)=\log\lambda$ を使って

<u>定理 9.</u> $\log[A*B] \geqq (\log A+\log B)*I$.

したがって $A\in H_n^+$ のとき $A*A^{-1}\geqq I$ がわかる.

<u>定理 10.</u> $A*B \geqq (A\# B)*(A\# B)$.

これは Hadamard 積の可換性と Φ と演算 $\#$ の関連から容易にわかる.

<u>文献</u>

1. W. N. Anderson – R. J. Duffin, J. Math. Anal. Appl. 26 (1969) 576-594
2. Ch. Davis, in Proc. Symp. Pure Math. 「Convexity」 Amer. Math. Soc. 1963
3. E. Lieb, Advance in Math. 11 (1973), 267-288
4. W. Pusz – S. L. Woronowicz, Rep. Math. Phys 8 (1975) 159-170