数理解析研究所講究録
338巻 1978年 48-59

Positive operator の pole について

お茶の水女大 理　　竹尾富貴子

§1. 序

順序Banach空間上の positive operator T に対して, Cesaro mean の一様収束, 即ち uniform ergodicity と, スペクトル半径 $r(T)=1$ の点が, $R(\lambda, T)$ の1位のpole になる事との同値性が, S. Karlin によって示されている [3]。この拡張として, $r(T)=1$ が k位のpoleになる為の必要かつ十分条件を, あるtypeの多項式の一様収束として求めた。そして、この結果を使って、Peripheral spectrum が, pole のみからなる為の必要かつ十分条件を求めた。これは、M. A. Kaashoek and T. T. West が求めている Peripheral spectrum が simple pole のみからなるための必要かつ十分条件 [2] に対して, simple pole を任意の位数の pole にした点で、拡張になっている。

§2. 定義及び準備

Banach空間E上のoperator Tに対して
Peripheral spectrumは

$$\mathrm{Per}\,\sigma(T)=\{\lambda\in\sigma(T):\ |\lambda|=r(T)\},$$

S(T)は集合$\{T, T^2, \cdots\}$の$\mathcal{L}(E)$における閉包，
A(T)は集合$\{\sum_{i=1}^{m} a_i T^i\ ;\ a_i\geqq 0,\ m\in Z^+\}$の閉包，
$k\geqq 1$に対して$C_k(T)$は

集合$\{\sum_{i=1}^{m} a_i T_{k,i}\ ;\ a_i\geqq 0,\ m\in Z^+\}$である．

ここで，

$$T_{k,i}=\binom{k+i-1}{k}k\sum_{s_{k-1}=0}^{1}\cdots\sum_{s_1=0}^{1}(-1)^{\sum_{r=1}^{k-1}s_r}\frac{T^{i+\sum_{r=1}^{k-1}s_r}}{i+\sum_{r=1}^{k-1}s_r}$$

$$=\binom{k+i-1}{k}k\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\binom{k-1}{s}\frac{T^{i+s}}{i+s}$$

である。

$k=1$の場合，$T_{1,i}=T^i$であり，又，$C_1(T)$の閉包はA(T)となっている。A(T)はsemi-algebraになっているが，$C_k(T)$は$k\neq 1$の場合はconeではあるが，semi-algebraにはなっていない。

semi-algebra A(T)が<u>strict</u>とは$A(T)\cap(-A(T))=\{0\}$であり，<u>locally compact</u>とは集合$\{x\in A(T);\|x\|\leqq 1\}$が$\mathcal{L}(E)$でcompactであり，又<u>semi-simple</u>とはA(T)におけるclosed ideal Jが$J^2=\{0\}$なら$J=\{0\}$であることをいう。

<u>定義</u> 集合 $\{g(T)\in C_k(T)\ ;\ \sup_{|\beta|=1}\|g(\beta T)(I-\beta T)^{k-1}\|\leqq 1\}$ が $\mathcal{L}(E)$ で relatively compact subset のとき，cone $C_k(T)$ が，<u>k-relatively locally compact</u> であると定義する．

$A(T)$ が locally compact なら $C_1(T)$ は 1-relatively locally compact であるが，逆は必ずしも成り立たない．しかし，少し条件を加えると，次の補題を得る．

<u>補題 1</u>． Banach 空間上の $r(T)=1$ なる operator T に対して次は同値である。

i) $A(T)$ が locally compact, semi-simple かつ strict である。

ii) $S(T)$ が compact で，1 はスペクトル $\sigma(T)$ に属する．

iii) $|\alpha|=1$ なる任意の α に対して $C_1(\alpha T)$ は 1-relatively locally compact で，集合 $\{\|T^n\|\ ;\ n=1,2,\cdots\}$ は有界で，1 は $\sigma(T)$ に属する。

iv) $C_1(T)$ は 1-relatively locally compact で，集合 $\{\|T^n\|\ ;\ n=1,2,\cdots\}$ は有界で，1 は $\sigma(T)$ に属する。

§3. $r(T)=1$ が pole になる条件。

順序Banach空間上の $r(T)=1$ なる positive operator T に対して S. Karlin は次の定理を得ている.[3]

定理(S. Karlin)

次は同値である。

i) $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i$ が一様にあるoperatorに収束する。

ii) $r(T)=1$ は1位の pole である。

この拡張として次の結果を得た[7]。

定理1.

順序Banach空間上の $r(T)=1$ なる positive operator T に対して,次は同値である。

i) 1は高々 k 位の pole である。

ii) $f_{k,n}(T)$ は ある operator P_k に一様収束する。

ここで

$$f_{k,n}(\lambda)=\sum_{s=1}^{k} a_{k,s}\,\frac{g_{k,s,n-1}(\lambda)}{g_{k,s,n-1}(1)}$$

$$g_{k,s,n-1}(\lambda)=\sum_{i_k=0}^{n-1}\cdots\sum_{i_2=0}^{i_3}\sum_{i_1=0}^{i_2}\frac{(i_1+s-1)!}{i_1!}\lambda^{i_1}$$

かつ $a_{k,s}=(-1)^{s+1}\binom{k}{s}\binom{2k+s-2}{k-1}\Big/\binom{2k-2}{k-1}$

である。

上定理の多項式 $f_{k.n}(T)$ は一見複雑であるが，$k=1$ の場合は Cesaro mean になっており，又，その係数 $a_{k.s}$ は次のような簡単な連立方程式の解になっている．

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{k} a_{k.s} = 1 \\ \sum_{s=1}^{k} \dfrac{1}{k+j+s-1}\, a_{k.s} = \dfrac{1}{k+j-1} \qquad 1 \leqq j \leqq k-1 \end{cases}$$

さらに，この多項式は次の性質を持っている。

$$f_{k.n}(1) = 1 \quad \text{かつ} \quad f_{k.n}^{(j)}(1) = 0 \qquad 1 \leq j \leq k-1$$

この多項式の性質から，N. Dunford の定理［[1]の Th. 3.6］を用いて，上定理は証明できる。

ここで，上定理における T の positivity は 1 が k 位の pole の場合に $T^n/n^k \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ を示すために必要であるので，T の positivity をなくしても次の定理が得られる。

<u>定理 2.</u>

Banach 空間上の $r(T)=1$ なる operator T に対して，$T^n/n^k \to 0$ の仮定のもとに，次は同値である．

i) 1 は $\rho(T)$ に属するか，又は高々 k 位の pole である。

ii) $f_{k.n}(T)$（定理 1 で定義したもの）はある operator P_k に一様収束する．

§4. Peripheral spectrum.

Banach 空间上の operator T が quasi-compact であるか[9]，又は Banach lattice 上の positive operator T が $r(T)=1$ で $R(\lambda, T)$ の pole で，$R(\lambda, T)$ の $\lambda=1$ における residuum が finite rank であるならば[4]，$\mathrm{Per}\,\sigma(T)$ は pole のみからなること，あるいは，Banach lattice 上の positive operator T に対して，T が irreducible で $r(T)=1$ が $R(\lambda, T)$ の pole ならば，$\mathrm{Per}\,\sigma(T)$ は simple pole のみからなること[5]が，知られている。しかし，これらの逆は必ずしも成り立たない。最近 M. A. Kaashoek and T. T. West は Banach algebra の element T に対して，その $\mathrm{Per}\,\sigma(T)$ が $r(T)=1$ を含み，かつ pole のみからなる必要かつ十分条件として，$A(T)$ が locally compact，semi-simple かつ strict であることを求めている([2]の Th. III. 2.1)。そこで，ここではこの拡張として $\mathrm{Per}\,\sigma(T)$ が simple pole に限らず，pole のみからなる必要かつ十分条件を求めた[8]。

<u>定理 3</u>

Banach 空间上の $r(T)=1$ なる operator T に対して、次は同値である

i) $\mathrm{Per}\,\sigma(T)$ は $R(\lambda, T)$ の高々 k 位の pole からなり，少くとも1つは k 位の pole がある。

ii) $|\alpha| = 1$ なる任意の α に対して，$C_k(\alpha T)$ は k-relatively locally compact で $\|T^n\|$ の order は n^{k-1} である。

この定理の証明に必要な補題を述べる。

補題 2.

T を Banach 空間上の $r(T) = 1$ なる operator とし，1は $R(\lambda, T)$ の k 位の pole とする。このとき，任意の多項式 $h(\lambda)$ に対して次式が成りたつような $L \geqq 0$ が存在する。

$$r(h(T)) \leqq L \, \| h(T)(I-T)^{k-1} \|$$

証明　$k = 1$ の場合は $L = 1$ で成り立つ。

$k \geqq 2$ とすると，spectral set $\{1\}$ に対する spectral idempotent P_1 に対し，$Q_{k-1} = P_1(I-T)^{k-1}$ とおくと，$Q_{k-1} \neq 0$ かつ $TQ_{k-1} = Q_{k-1}$ となる。これより

$$\begin{aligned} r(h(T)) &\leqq r(h(T)P_1) + r(h(T)(I-P_1)) \\ &\leqq \left(\|P_1\| / \|Q_{k-1}\| + \|(I-P_1)S_1\| \right) \| h(T)(I-T)^{k-1} \| \end{aligned}$$

を得る。

ここで S_1 は $I - P_1 = (I-T)^{k-1} S_1 (I - P_1)$ をみたすものである。

定理3の証明

i) ⇒ ii)　Per $\sigma(T)=\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$ とし，それぞれの spectral idempotent を $P_1, \cdots, P_s$ とし，又，$Q_{j,m}=P_j(\lambda_j I-T)^m$ $(1\leqq j\leqq s,\ 1\leqq m\leqq k-1)$ とおく。このとき

$$\frac{T^n}{n^{k-1}}=\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{\lambda_j^n}{n^{k-1}}P_j+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{m}\lambda_j^{n-m}Q_{j,m}\right\}+\frac{1}{n^{k-1}}T^n(I-P_0)$$

から，$\|T^n\|$ の order が n^{k-1} であることが得られる。

次に i) の条件は T の代わりに (αT) としても成り立つので，あと，$C_k(T)$ が k-relatively locally compact であることを示せばよい。$g_n(T)\in C_k(T)$ かつ $\sup_{|\beta|=1}\|g_n(\beta T)(I-\beta T)^{k-1}\|\leqq 1$ としたとき，$\{g_n(T)\}$ が収束する部分列をもつことをいう。

$$g_n(T)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(n)\,T_{k,i}\ ,\quad a_i(n)\geqq 0,\ i\text{が十分大で } a_i(n)=0$$

と書ける。α_0 を k 位の $R(\lambda, T)$ の pole とすると，spectral mapping theorem より

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i(n)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(n)\,1_{k,i}\ \in\sigma(g_n(\alpha_0^{-1}T))$$

となる。補題2を使って $\sum_{i=1}^{\infty}a_i(n)\leqq L$ が言えるので，compact 性と対角線論法から，任意の i に対して $\{a_i(n_j)\}$ が収束するような増加列 $\{n_j\}$ がとれる。n_j を n と書きなおして，各 i に対し，$b_i=\lim_n a_i(n)$ が

存在するとしてよい。このとき，$b_i \geqq 0$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i \leqq L$ である。P_0 を spectral set $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| = 1\}$ に対する spectral idempotent とし，$S = T(I - P_0)$ とおくと，$r(S) < 1$ で集合 $\{\| S_{k,i} \| : i = 1, 2 \cdots\}$ の有界性がいえて，$\sum_{i=1}^{n} b_i S_{k,i}$ が $\mathcal{L}(E)$ における Cauchy sequence となる。$D = \sum_{i=1}^{\infty} b_i S_{k,i}$ とおくと $D = \lim_n g_n(T)(I - P_0)$ が得られる。又 $\{g_n(T)P_0\}$ は TP_0 により generate される $\mathcal{L}(E)$ の有限次元の subalgebra における有界列となるので，収束する部分列をもつ。従って $g_n(T) = g_n(T)P_0 + g_n(T)(I - P_0)$ より $\{g_n(T)\}$ は収束する部分列をもつ。

ii) $\Rightarrow$ i) 定理1で定義した $f_{k,n}(T)$ は次式のようにも，書きなおせる。

$$f_{k,n}(T) = \sum_{i=0}^{n-k} b_{k,i} T_{k,i}$$

ここで

$T_{k,0} = I$ で，$i \geqq 1$ に対する $T_{k,i}$ は§2で定義されたものである。又

$$b_{k,0} = 1 - \binom{n+k-2}{2k-1} \Big/ \binom{n+2k-2}{2k-1}$$

かつ，$i \geqq 1$ に対しては

$$b_{k,i} = \binom{n+k-i-2}{2k-2} \Big/ \binom{n+2k-2}{2k-1}$$

である。

このようにして求めた$b_{k,i}$は，$b_{k,i} \geqq 0$ かつ $\sum_{i=0}^{n-k} b_{k,i} = 1$ となり，$f_{k,n}(T)$は$T_{k,i}$の convex combination になっており，$\{f_{k,n}(T) - b_{k,0}\}$は$C_k(T)$に属している。$\|T^n\|$の order が n^{k-1} より，集合$\{\|f_{k,n}(\beta T)(I-\beta T)^{k-1}\|$; $|\beta|=1$, $n=1,2,\cdots\}$が有界となるので，$|\alpha|=1$なる任意のαに対して，$C_k(\alpha T)$が k-relatively locally compact から，$f_{k,n}(\alpha T)$は収束し，定理2から 1は$\rho(\alpha T)$に属するか，又は$R(\lambda, \alpha T)$の高々k位のpole になる。即ち，α^{-1}は$\rho(T)$に属するか，又は$R(\lambda, T)$の高々k位のpole となるので，i)が得られる。

順序Banach空間上のoperator Tがpositive で$r(T)$が$R(\lambda, T)$のpoleなら，それは$\mathrm{Per}\,\sigma(T)$における maximal order であることはよく知られている[6]。Tがpositiveに対応する$A(T)$がstrict の条件を加えて，次の定理4を得る。

定理4

Banach 空間上の$r(T)=1$なるoperator Tに対して次は同値である。

i) $\mathrm{Per}\,\sigma(T)$は$R(\lambda, T)$の高々k位のpoleからなり，1は order k のpole である。

ii) $|\alpha|=1$ なる任意の α に対して，$C_k(\alpha T)$ は k-relatively locally compact で，$\|T^n\|$ の order は n^{k-1} で $A(T)$ は strict である。

<u>考察</u>　定理4の $k=1$ の場合は，補題1を使うと，M. A. Kaashoek and T. T. West の結果（[2] の Th. III. 2.1）と一致することがわかる.

参考文献

[1] N. Dunford : Spectral theory 1. Convergence to projections, Trans. Amer. Math. Soc., <u>54</u> (1943) 185 - 217.

[2] M. A. Kaashoek and T. T. West : Locally compact semi-algebras with applications to spectral theory of positive operators. Mathematics studies <u>9</u> North-Holland 1974.

[3] S. Karlin : Positive operators, J. Math. Mech., <u>8</u> (1959) 907 - 937.

[4] H. P. Lotz und H. H. Schaefer ; Über einen Satz von F. Niiro und I. Sawashima. Math. Z. <u>108</u> (1968) 33 - 36.

[5] F. Niiro and I. Sawashima; On the spectral properties of positive irreducible operators in an arbitrary Banach lattice and problems of H. H. Schaefer, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo, __16__ (1966) 145-183.

[6] H. H. Schaefer; Topological vector spaces. Macmillan, New York 1966.

[7] F. Takeo; On a pole of the resolvent of positive operators. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., __29__ (1978), 55-59.

[8] F. Takeo; On the peripheral spectrum of operators, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. __29__ (1978), to appear.

[9] K. Yosida; Quasi-completely continuous linear functional operators. Jap. J. Math. __15__ (1939) 297-301.