数理解析研究所講究録
338巻 1978年 12-28

Operators Extreme in Some Convex Sets of Operator Algebras

北大 応電研　　久保文夫

1. 作用素環の単位球の端点については，R.V.Kadison [5] によって研究が始められて以来，多くの人々によってそれを特徴付けるさまざまな form が与えられて来ました．P.Miles [9] によって Kadison の結果が改良されました． P.R. Halmos [3] によって与えられた B(H) (= Hilbert space H 上の全ての bounded linear operator のなす環) の端点の特徴付けは，H.Choda [2] によって一般の W^*-環 の単位球の端点の特徴付けに拡張されました． また H.Choda, Y.Kijima, Y.Nakagami [1] によっても別の特徴付けが与えられています． 最近のテキストなどにも Kadison-Miles の特徴付けのいろいろな証明や応用が紹介されております，cf. [10], [11].

ここでは，良く知られたこれらの定理が1つの簡単な等式，1つの簡単な lemma，及びいわゆる極分解によって簡単に証明できることをまず示します，cf. [7]

次に端点の中が再び端点となっている事に注目します. これを用いて端点が, unitary, unilateral shift 及び backward shift の直和に分解できることを示します.

最後に作用素環の numerical radius 及び spectral radius による単位球を考え, これらの端点が norm による単位球の端点ほどいい性質は持っていないことを示します, cf. [8].

用いる notation をまとめておきます. C^*-環A及びAの convex subset Kに対して:

$A_1 = \{x \in A : \|x\| \leq 1\}$: Aの単位球

$proj(A) = \{x \in A : x^2 = x = x^*\}$: Aの projection の全体

$symm(A) = \{x \in A : x^2 = 1, x = x^*\}$: Aの symmetry の全体

$PI(A) = \{x \in A : x^* x \in proj(A)\}$: Aの partial isometry の全体

$A_1^h = \{x \in A_1 : x = x^*\}$

$A_1^+ = \{x \in A_1^h ; x \geqq 0\}$

$ext(K) = \{x \in K ; x = (u+v)/2, u, v \in K \Rightarrow x = u = v\}$

: Kの端点の全体

としておきます. また $x, y \in PI(A)$ に対して order を

$$y \geqq x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} y x^* x = x$$

によって定義します. これは Halmos が PI(B(H)) の間に定義した order を algebraic にいいかえたものです.

この order に関して次の事は簡単な代数計算からわかります;

i) $x \in PI(A) \Rightarrow x \succeq x$

ii) $x \succeq y,\ y \succeq x \Rightarrow x = y$

iii) $x \succeq y,\ y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$

iv) $x \succeq y \Rightarrow x^* \succeq y^*$

v) $x \succeq y \Rightarrow x^*x \succeq y^*y$

vi) $x \succeq y \Rightarrow x^*y = y^*y = y^*x$.

∵) i) $(x - xx^*x)^*(x - xx^*x) = x^*x - (x^*x)^2 - (x^*x)^2 + (x^*x)^3 = 0$. よって $xx^*x = x$.

vi) $(x^*y - y^*y)^*(x^*y - y^*y) = y^*xx^*y - y^*xy^*y - y^*yx^*y + (y^*y)^2 = y^*(xx^*)y - y^*y - y^*y + y^*y \leq y^*y - y^*y = 0$.
よって $x^*y = y^*y = (y^*y)^* = (x^*y)^* = y^*x$.

v) $x^*x \cdot y^*y = x^*(xy^*y) = x^*y = y^*y$. よって $x^*x \succeq y^*y$.

iv) $x^*yy^* = x^*y \cdot y^* = y^*y \cdot y^* = y^*$.

iii) $xz^*z = x(y^*y \cdot z^*z) = (xy^*y)z^*z = yz^*z = z$.

ii) v)より $x^*x = y^*y$. よって $x = y \cdot x^*x = y \cdot y^*y = y$.

特に $x, y \in proj(A)$ の時，通常の order と一致します．

2. 次に述べる等式は端点の特徴付けの証明に役立ちます．

$$(\mathrm{PL}) \qquad (u+v)^*(u+v) + (u-v)^*(u-v) = 2(u^*u+v^*v).$$

二次形式の時にならってこの等式を Parallelogram Law と呼んでおきます． 等式(PL)を用いると，$\mathrm{ext}(A_1^+)$ を特徴付ける Kadison の定理が証明できます．

Theorem 1. C^*-環 A に対して $\mathrm{ext}(A_1^+) = \mathrm{proj}(A)$ である．

Proof. p を A の projection とし，$p=(u+v)/2$ のように $u, v \in A_1^+$ によって表わされたとします． 等式(PL)により

$$\begin{aligned}(u-v)^*(u-v) &= 2(u^*u+v^*v) - (u+v)^*(u+v)\\ &\leq 2(u+v) - (2p)^*(2p)\\ &= 4p-4p = 0,\end{aligned}$$

となり $u=v=p$ です． 従って p は A_1^+ の端点になります．

逆に p を A_1^+ の端点とします． $0 \leq p^2 \leq 1$ 及び $2p-p^2 = 1-(1-p)^2$ より $0 \leq 2p-p^2 \leq 1$ でしかも $p=((2p-p^2)+p^2)/2$ より $p=p^2$ です． よって $p \in \mathrm{proj}(A)$ となります．

Remark. $A_1^+ \ni x \longmapsto 2x-1 \in A_1^h$ が affine map である事と，それが proj(A) を symm(A) の上に写すことから Theorem 1 の結論は $\mathrm{ext}(A_1^h) = \mathrm{symm}(A)$ といいかえることができます.

更に次の lemma を準備しますと，A_1 の端点の特徴付け定理が証明できます.

Lemma 2. C^*-環 A の元 x, a, b, c 及び d に対して

$$a \geq b \geq 0, \quad c \geq d \geq 0 \quad \text{及び} \quad axc = 0$$

ならば $bxd = 0$ である.

Proof. $0 \leq (b^{\frac{1}{2}}xc)^*(b^{\frac{1}{2}}xc) = cx^*bxc \leq cx^*axc = 0$ より $bxc = 0$ を得，更に $0 \leq (bxd^{\frac{1}{2}})(bxd^{\frac{1}{2}})^* = bxdx^*b \leq bxcx^*b = 0$ より，$bxd = 0$ を得ます.

Theorem 3. W^*-環 A の元 x に対して次は同値：

1) $x \in \mathrm{PI}(A)$ で $1-z \geq 1-x^*x$，$z \geq 1-xx^*$ をみたす A の central projection z が存在する.

2) (VO)： $(1-x^*x)A(1-xx^*) = 0$.

3) $x \in \mathrm{ext}(A_1)$

4) $x \in PI(A)$ で $PI(A)$ の order に関して maximal.

Proof. 1)⇒2). $1-z \geq 1-x^*x$, $z \geq 1-xx^*$, $(1-z)Az=0$ 及び Lemma 2 より 等式(VO)を得ます.

2)⇒3). $u, v \in A_1$ によって $x=(u+v)/2$ と表わされたとします. 等式(PL)によって

$$(u-v)^*(u-v) = 2(u^*u+v^*v)-(u+v)^*(u+v)$$
$$\leq 4-4x^*x = 4(1-x^*x)$$

及び

$$(u-v)(u-v)^* \leq 4(1-xx^*)$$

を得ます. Lemma 2 によって $(u-v)^*(u-v)A(u-v)(u-v)^*=0$ を得, 従って $((u-v)^*(u-v))^3=0$ となり $u=v=x$ を得ます.

3)⇒4). x を A_1 の端点とし, $x=w|x|$ を x の A での極分解とします. $|x|=(u+v)/2$ と $u, v \in A_1^+$ で表わされたとしますと, $x=w|x|=(wu+wv)/2$ となり, $x \in \mathrm{ext}(A_1)$ であることより $x=wu=wv$ を得ます.

$$|x|^2 = x^*x = u^*w^*wu \leq u^*u = u^2$$
$$|x|^2 = x^*x = v^*w^*wv \leq v^*v = v^2$$

より $|x| \leq u$, $|x| \leq v$ を得, $|x|=u=v$ が分ります. よって $|x| \in \mathrm{ext}(A_1^+)$ となり Theorem 1 から $|x|$ は projection

であることが分ります. $|x|=|x|^2=x^*x\in proj(A)$ より $x\in PI(A)$ です. 次に $x\leq y\in PI(A)$ としますと,

$$\begin{aligned}(2x-y)^*(2x-y) &= 4x^*x-2x^*y-2y^*x+y^*y\\ &= 4x^*x-2x^*x-2x^*x+y^*y\\ &= y^*y\end{aligned}$$

となり $2x-y\in A_1$ を得ます. $x=((2x-y)+y)/2$ ですから, x の端点性より $x=2x-y=y$ を得, x が maximal である事が分ります.

4)⇒1). $e=1-x^*x$ と $f=1-xx^*$ とに比較可能定理を適用して, A の central projection z で

$$ez\precsim fz \quad 及び \quad ez^\perp\succsim fz^\perp$$

なるものが存在します. 従ってある $v\in PI(A)$ で $ez=v^*v$, $vv^*\leq fz$ と書けますが

$$xv^*=xv^*vv^*=xezv^*=x(1-x^*x)zv^*=0$$

$$x^*v=x^*vv^*v=x^*fzvv^*\cdot v=x^*(1-xx^*)zv$$
$$=0$$

となる事より $x+v\in PI(A)$ で $x+v\geqq x$ となります. x の maximality より $v=0$ となり $ez=v^*v=0$ 即ち $1-x^*x\leq 1-z$ を得ます. 同様にして $fz^\perp=0$ となり $1-xx^*\leq z$ を得ます.

Remark. この同値性の他の多くの implication もまた，上の3つの原理によって証明できます．

$ext(A_1) \subset PI(A)$ の証明について．上では W^*-環の中で行っていますが，Miles が示したように C^*-環の中ででも証明できます．$h = x^* x$，$S_\pm = x[1 \pm h(1-h)^2]$ とおくと $S_\pm \in A_1$ で $x = (S_+ + S_-)/2$ より $x = S_\pm$ となり $h(1-h) = 0$ が出て来ます．この事から C^*-環 A に対しても 2)⇔3) である事が分かり，$x \in A$ が A_1 の端点である事と，A の適当な topology による closure $\overline{A}$ の単位球の端点である事が同値になります．

3. 端点の特徴付けである Theorem 3, 2) の条件 (VO) について次の様なことがわかります．この結果より少し弱い定理を B.Yood [12] が得ています．

Theorem 4. C^*-環 A の単位球 A_1 の元 x に対して，x が (VO) をみたす事と x の巾 x^n が (VO) をみたす事とは同値である．

Proof. xが(VO)をみたしているとします．　$n=2$の時．

$$
\begin{aligned}
&(1-x^{*2}x^2)A(1-x^2x^{*2})\\
&=(1-x^*x+x^*(1-x^*x)x)A(1-xx^*+x(1-xx^*)x^*)\\
&=(1-x^*x)A(1-xx^*)+(1-x^*x)Ax(1-xx^*)x^*\\
&+x^*(1-x^*x)xA(1-xx^*)+x^*(1-x^*x)xAx(1-xx^*)x^*\\
&=0
\end{aligned}
$$

より x^2 も (VO) をみたしている．　一般のnに対しては，

$$1-x^{*n}x^n=1-x^{*n-1}x^{n-1}+x^{*n-1}(1-x^*x)x^{n-1}$$

によって帰納法が使えることからわかります．

逆に x^n が (VO)をみたしているとき，$x\in A_1$より

$$x^*x\geq x^{*n}x^n\quad,\quad xx^*\geq x^nx^{*n}$$

$$1-x^*x\leq 1-x^{*n}x^n\,,\quad 1-xx^*\leq 1-x^nx^{*n}$$

ですから Lemma 2 より xが(VO)をみたしていることがわかります．

等式(VO)をみたすxは $(1-x^*x)x^*(1-xx^*)x=0$ となり，$x^*x(1-x^*x)^2=0$ となり $x\in PI(A)$ であることが代数計算から出て来ます．　従って Theorem 4と組合わせると，それは単に partial isometry というだけでなく，そのあらゆる巾がまた partial isometry であるいわゆる power partial isometryです．　このようなxに対して P.R. Halmos-L.J. Wallen [4] は次の様な分解定理を得ています．

Theorem A.　xをW*-環Aの power partial isometry とすると，xは次のようにAの central projection によって直和分解ができる：

$$x = u \oplus s \oplus t \oplus v,$$

ここに　uは unitary, sは unilateral shift, tは unilateral shift の adjoint, vは truncated shifts の直和である．（ここで unilateral shift とは Wald 分解に従って completely non-unitary isometry の事であるとします.）

A_1の端点xは，上のように分解すると，現れてこない part があります．　xを central projection zで切った xzが $(Az)_1$ の端点ですから，その巾 $x^n z$ もまた，$(Az)_1$ の端点です．$x^n z \neq 0$ が全ての nに対して成立ちますから，Theorem A における truncated shift part v は現れない事が分ります．

Theorem 5.　W*環Aの単位球A_1の端点xに対しAの central projections z_u, z_s, z_t が存在して互いに直交し

$z_u+z_s+z_t=1$ で xz_u は unitary, xz_s は unilateral shift,
xz_t は unilateral shift の adjoint と書ける.

Corollary 6. W^*環 A の単位球 A_1 の端点 x, $n>m\geq 1$ なる整数 n, m に対して $x^n=x^m$ ならば x は unitary で $x^{n-m}=1$ である.

4. C^*環 A の元 x に対してその numerical radius $w(x)$ 及び spectral radius $r(x)$ は代数的に

$$w(x)=\sup|f(x)|\ ;\ f\in\Sigma_A$$

$$r(x)=\sup|\lambda|\ ;\ \lambda\in\sigma(x)$$

によって与えられています. 但し Σ_A は A の state の全体, $\sigma(x)$ は x の spectrum を表わします.

A の w, r による単位球をそれぞれ A_w, A_r とおきます.

Theorem 7. C^*環 A の w-単位球 A_w の元 x に対し実部 $\mathrm{Re}\,x$ 及び虚部 $\mathrm{Im}\,x$ が $\mathrm{ext}(A_1)$ に属する時 x は $\mathrm{ext}(A_w)$ に属する.

Proof. $x=(u+v)/2$, $u, v \in A_w$ とします. $x^*=(u^*+v^*)/2$ より $\mathrm{Re}\,x=(\mathrm{Re}\,u+\mathrm{Re}\,v)/2$, $\mathrm{Im}\,x=(\mathrm{Im}\,u+\mathrm{Im}\,v)/2$ で, w が Banach space-norm であることより

$$\|\mathrm{Re}\,u\| = w(\mathrm{Re}\,u) \leq w(u) \leq 1.$$

同様にして $\|\mathrm{Re}\,v\| \leq 1$, $\|\mathrm{Im}\,u\| \leq 1$, $\|\mathrm{Im}\,v\| \leq 1$ です. 従って $\mathrm{Re}\,x=\mathrm{Re}\,u=\mathrm{Re}\,v$, $\mathrm{Im}\,x=\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Im}\,v$ となり $x=u=v$ ですから, $x \in \mathrm{ext}(A_w)$ です.

Example 8. A として 2×2 行列の全てから成るC^*環を考えます. $x=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して,

$$\mathrm{Re}\,x=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}\,x=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

は $\mathrm{ext}(A_1)$ の元で $x \in A_w$ ですから $x \in \mathrm{ext}(A_w)$ です. 然し $x^2=0$ となり巾はもはや A_w の端点とはなりません. $r(x)=0$, $w(x)=1$ $\|x\|=2$ です. 更に, hermitean unitary $\mathrm{Re}\,x$ でさえも A_w の端点ではないという事が起っています.

然し一般に "1" は A_w の端点です.

Theorem 9. $1 \in \mathrm{ext}(A_w)$.

Proof. $1=(u+v)/2$ と $u, v \in A_w$ によって表わされたとします。$1=1^*=(u^*+v^*)/2$ より

$$1=(\mathrm{Re}\,u+\mathrm{Re}\,v)/2, \quad 0=(\mathrm{Im}\,u+\mathrm{Im}\,v)/2$$

$$\|\mathrm{Re}\,u\| \leq 1, \quad \|\mathrm{Re}\,v\| \leq 1$$

より $u=v^*$ を得ます。よって $u=2-v=2-u^*$ となり u^* と u とが交換し, $\|u\|=w(u) \leq 1$ です。従って $u, v \in A_1$ ですから $1=u=v$ となり $1 \in \mathrm{ext}(A_w)$ を得ます。

Remark. 一般の Banach 環の単位元については T. Kato の note [6] があります。

A_r の場合には, 1 が A_r の端点であるか否かが A の可換性を左右します。

Lemma 10. W^*-環 A が可換でない必要十分条件は $x \neq 0$, $x^2=0$ となる $x \in A$ が存在することである。

Proof. A が可換なら上のようなxは存在しません

からAが非可換の時上のようなxがあれば証明が終ります．Aが非可換なら互いに直交する equivalent な projection e, f がありますから，$e = v^*v$, $vv^* = f$ とおくと，$v^*v\, vv^* = 0$ より $0 = v \cdot v^*v \cdot vv^* \cdot v = v^2$, $v \neq 0$ を得ます．

Theorem 11. W^*-環Aが可換となる必要十分条件は，1がA_rの端点となる事である．

Proof. Aが可換の時，$\|x\| = r(x)$ より $A_r = A_1$です．よって $1 \in ext(A_1) = ext(A_r)$． 逆にAが非可換の時，$x^2 = 0$ なる $0 \neq x \in A$ があります． $\sigma(1 \pm x) = 1 \pm \sigma(x) = \{1\}$ ですから $r(1 \pm x) = 1$ で $x = ((x+1)+(x-1))/2$ となり $1 \notin ext(A_r)$ となります．

Appendix 1. W^*-環の端点と type との関係は，多くの人に論じられていますが，そのうちのあるものは，Choda, Kijima and Nakagami [1] の指適した次の関係によります．

Theorem. C^*-環 A に対し $x \in PI(A)$, $p \in proj(A)$, $p \leq x^*x$, $1-p \leq xx^*$, $px = xp$ のとき, $x^*x \sim xx^* \sim 1$ である.

Proof. $p = x^*xp = x^*px = (px)^*px \sim px \cdot (px)^* = pxx^*p = xpx^*p = xx^*p$, で一方 $1-p = xx^*(1-p)$ より辺々加えて $1 = p + 1 - p \sim xx^*p + xx^*(1-p) = xx^*$.

このことより, また Theorem 3 の端点の特徴付けから x が端点なら $x^*x \sim 1 \sim xx^*$ を得ます. 従って次のことが成立ちます. i), iii) は Yood [12] によります.

Theorem. W^*-環 A の単位球の端点 x に対して次が成立つ

(i) x^*x : abelian projection $\Leftrightarrow$ A は可換

(ii) x^*x : finite projection $\Leftrightarrow$ A は finite

(iii) x^*x : minimal projection. $\Leftrightarrow$ A は division algebra.

Appendix 2. W^*-環 A の uniformly closed ideal I による quotient algebra を A/I とします. $ext(A/I)_1$ の

元は ext(A1) の元に lifting ができます.　然し一般の[illegible]環に対してそうではない事が最近 綿谷安男氏 によって反例が与えられました.　Cunlz の finiteness を用いた議論によって反例が得られるようです.

References.

[1] H. Choda, Y. Kijima and Y. Nakagami, Some extremal properties in the unit ball of von Neumann algebras, Kodai Math. Sem. Rep., 21(1969) 175-181.

[2] H. Choda, An extremal property of the polar decomposition in von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 46(1970) 341-344.

[3] P.R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, Princeton, (1967).

[4] P.R. Halmos and L.J. Wallen, Powers of partial isometries, J. Math. and Mech., 19(1970) 657-663.

[5] R.V. Kadison, Isometries of operator algebras, Ann. Math., 54(1951) 325-338.

[6] T. Kato, On a theorem of Kakutani (in Japanese), Sugaku, 21(1961) 40-41.

[7] K. Kubo and F. Kubo, Extreme points of the unit ball in an operator algebra, to appear in Math. Japonica, 23(1978).

[8] K. Kubo and F. Kubo, Some extreme properties in the convex sets in operator algebras, to appear in Math. Japonica, 23(1978).

[9] P. Miles, B*-algebra unit ball extreme points, Pacif. J. Math. 14(1964) 627-637.

[10] S. Sakai, The Theory of W*-algebras, Lecture Note, Yale Univ., (1962).

[11] S. Sakai, C*-algebras and W*-algebras, Springer-Verlag Berlin, (1971).

[12] B. Yood, On Kadison's condition for extreme points of the unit ball in a B*-algebra, Proc. Edinburgh Math. Soc., 16(1968/69) 245-250.