数理解析研究所講究録
340巻 1978年 42-55

閉リーマン面の動きについて

滋賀大 教育　　山口博史

§0. <u>序論</u>　$\mathcal{D}$は2次元の複素多様体，Δはz－平面上の円板：$|z|<\rho$，πは$\mathcal{D}$からΔの上への解析写像とする。triple $(\mathcal{D},\Delta,\pi)$は次の性質をもつとする。

i) $\pi:\mathcal{D}\to\Delta$はsubmersionであって，任意の$z\in\Delta$に対して，$\pi^{-1}(z)$は既約である；

ii) 任意の$z_0\in\Delta$に対して，z_0の適当な近傍$\Delta_0(\subset\Delta)$が存在して，$\mathcal{D}$の部分領域$\pi^{-1}(\Delta_0)$はStein多様体である。

各$z\in\Delta$に対して，$\pi^{-1}(z)$は$\mathcal{D}$から自然に導びかれる解析構造によって，一変数の閉リーマン面である。上の性質 i)，ii)をもつ2つのtriples $(\mathcal{D}_1,\Delta,\pi_1)$，$(\mathcal{D}_2,\Delta,\pi_2)$を考える。今，$\varphi$は$\mathcal{D}_1$から$\mathcal{D}_2$の上への写像とする。この写像$\varphi$が$\Delta$-homéomorphisme (resp. Δ-difféomorphisme, resp. Δ-isomorphisme analytique)とは，φが$\mathcal{D}_1$から$\mathcal{D}_2$へのhoméomorphisme (resp. difféomorphisme, resp. isomorphisme analytique)であって，$\pi_2\circ\varphi=\pi_1$をみたす，ときを言う。φが$\mathcal{D}_1$から$\mathcal{D}_2$へのΔ-isomorphisme analytique

ならば，明らかに，任意の $z \in \Delta$ に対して，2つの fibres $\pi_1^{-1}(z)$ と $\pi_2^{-1}(z)$ とは一変数リーマン面として同値である。これの逆を問題としよう.

<u>問題</u>　上の性質 i), ii) をもつ2つの triples $(\mathfrak{D}_1, \Delta, \pi_1)$, $(\mathfrak{D}_2, \Delta, \pi_2)$ を考える. 今，任意の $z \in \Delta$ に対して，2つの fibres $\pi_1^{-1}(z)$ と $\pi_2^{-1}(z)$ とは一変数リーマン面として同値:

(*)　$\pi_1^{-1}(z) \sim \pi_2^{-1}(z)$　où $\forall z \in \Delta$

と仮定する。このとき，いかなる条件のもとで $\mathfrak{D}_1$ から $\mathfrak{D}_2$ への Δ-isomorphisme analytique が存在するであろうか？

ここでは，そのような Δ-isomorphisme analytique が存在するための，いくつかの十分条件をのべる。

§1. <u>直積の場合</u>

triple $(\mathfrak{D}_2, \Delta, \pi_2)$ が直積の場合を考えよう，即ち

$$(\mathfrak{D}_2, \Delta, \pi_2) = (\Delta \times R, \Delta, p)$$

但し，R は一変数の開リーマン面，p は $\Delta \times R$ から Δ への射影である. すぐわかるように，R が次の2つの場合には，性質 i), ii) をもつ勝手な triple $(\mathfrak{D}_1, \Delta, \pi_1)$ について，上の条件 (*) は $\mathfrak{D}_1$ から $\mathfrak{D}_2$ への Δ-isomorphisme analytique の存在を導びくとは限らない:

$$R \sim (|w| < 1) \quad \text{又は} \quad (0 < |w| < 1).$$

ところで，この場合を除けば，次が言える（参照［8-(1)］，p.533）。

<u>Case I</u>　Rは，上の2つの場合を除く，任意の開リーマン面とする。$(\mathfrak{D}_1, \Delta, \pi_1)$ は性質 i)，ii) をもつ任意の *triple* であって，各 *fibre* $\pi_1^{-1}(z)$ （*où* $\forall z \in \Delta$）はRとリーマン面として同値と仮定する。このとき，$(\mathfrak{D}_1, \Delta, \pi_1)$ から $(\Delta \times R, \Delta, p)$ への Δ-*isomorphisme analytique* が存在する。

§2．<u>境界が小さい場合</u>　各 *fibre* $\mathfrak{D}_i(z)$（*où* $z \in \Delta$, $i = 1, 2$）の境界が大きい場合には，たとえ，$\mathfrak{D}_i(z)$ の種数や境界要素の数が $\geqq 2$ であっても，条件(*)は $\mathfrak{D}_1$ から $\mathfrak{D}_2$ への Δ-*isomorphisme analytique* の存在を導びくとは限らない。そこで，各 *fibre* $\mathfrak{D}_i(z)$ へ条件を加えてみよう：　一般に，リーマン面Rがクラス O_{AD} に属するとは，R上の任意の一価正則函数 $f(p)$ で

$$\iint_R \frac{i}{2} df \wedge \overline{df} < \infty$$

をみたすものは，定数に限るときを言う．次のことは良く知られている（参照 Ahlfors-Sario［1］，オIV章）：

(イ)　O_{AD} に属するリーマン面Rは，その"境界"が函数論的意味において"小さい"

(ロ) 開リーマン面の全体を函数論的に分類するとき，クラス O_{AD} は一つの重要な „大きな" クラスである。

各 fibre $\mathfrak{D}_i(z)$ が O_{AD} に属しているとき，我々は次のことを言える（参照 [8-(2)]）：

Case II　2つの triples $(\mathfrak{D}_1, \Delta, \pi_1)$, $(\mathfrak{D}_2, \Delta, \pi_2)$ は性質 i), ii) をもち，次の条件をみたすと仮定する，

a)　φ は $\mathfrak{D}_1$ から $\mathfrak{D}_2$ への Δ-difféomorphisme であり，φ を各 fibre $\pi_1^{-1}(z)$ (où $z \in \Delta$) に制限すれば，解析的である：

$$\varphi(z, \cdot) : \pi_1^{-1}(z) \sim \pi_2^{-1}(z) \quad \text{où } z \in \Delta \ ;$$

b)　$\pi_1^{-1}(z) \in O_{AD}$ (où $\forall z \in \Delta$) ;

c)　各 fibre $\pi_1^{-1}(z)$ (où $z \in \Delta$) の種数 $\geqq 2$.

このとき，φ は $\mathfrak{D}_1$ から $\mathfrak{D}_2$ への Δ-isomorphisme analytique である。

Case II′　triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ は性質 i), ii) をもち，次の条件をみたすと仮定する，

a)′ 任意の $z_0 \in \Delta$ に対して，z_0 の近傍 $\Delta_0 (\subset \Delta)$ が存在して，$\mathfrak{D}$ の部分領域 $\pi^{-1}(\Delta_0)$ から，直積 $(\Delta_0 \times D_0, \Delta_0, p)$ への Δ_0-homéomorphisme が存在する；

b)′ D_0 は平面領域である；

c)′ $\pi^{-1}(z) \in O_{AD}$ (où $\forall z \in \Delta$)

このとき，$\mathfrak{D}$ から直積 $(\Delta \times \mathbb{P}^1, \Delta, p)$ の適当な部分領域への Δ-isomorphisme analytique が存在する。

注意1　T. Nishino は一連の論文（[I]〜[V] dans J. Math Kyoto Univ. 1968〜1975）にて，2変数整函数 $f(x,y)$ の研究を，その定数面 $\{f(x,y)=z\}$（但し $z\in\mathbb{C}$）を観察することによって，行っている。更に，次の問題を提示した：

問題（T. Nishino）　$\mathbb{C}^2$ での2つの整函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が与えられていて，任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して，2つの方程式 $f(x,y)=z$, $g(x,y)=z$ によって定まる $\mathbb{C}^2$ の中の2つの定数面（高々可算個の開リーマン面の集り）は一変数リーマン面として同値：$\{f(x,y)=z\}\sim\{g(x,y)=z\}$ où $\forall z\in\Delta$，と仮定する。このとき，どのような条件のもとで $f=g\circ\Psi$ となる $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ の上への解析変換 Ψ が存在するであろうか？

本稿に述べていることを考える動機を与えたのは，この提示された問題である。さて，T. Nishino [6-(2)] は $\mathbb{C}^2$ の整函数の全体 (E) を分類した。$f(x,y)$ ($\in$ E) のうちで，各定数面 $\{f(x,y)=z\}$（但し $z\in\mathbb{C}$）の既約成分がリーマン面として，楕円型となるような $f(x,y)$ の全体を考え，それを (P) と記した。ところで楕円型リーマン面はクラス O_{AD} に属するから，Case II によってほぼ「$f(x,y)$, $g(x,y)\in$ (P)，各定数面 $\{f(x,y)=z\}$（但し $\forall z\in\Delta$）の種数が $\geqq 2$ という条件のもとでは，上の問題にのべた Ψ の存在がいえる。」

<u>注意 2</u>　Case II$'$ は, T. Nishino [6-(1)] の中の lemme fondamental（即ち, Case II$'$ の条件 b)$'$ の D_0 が全平面 $\mathbb{C}$ の場合である）を一般化したものであるが, これには次のような応用がある：良く知られているように, P. Koebe (1910) は論文 [5] の中で,

閉リーマン面 S（但し種数 $\geqq 2$）の Schottky 被覆面 $\tilde{S}$ はクラス O_{AD} に属する開リーマン面で, $\tilde{S}$ には単葉な有理型函数 $\varphi(p)$ が存在する。

ことを示している。今, 閉リーマン面 S_z がパラメーター $z \in \Delta$ とともに解析的に変化してゆくと仮定しよう。各 S_z の Schottky 被覆面を $\tilde{S}_z$ とし, p を $\tilde{S}_z \to z \in \Delta$ なる射影として,

$$\text{triple} \quad \Big(\bigcup_{z \in \Delta} \tilde{S}_z, \ \Delta, \ p \Big)$$

を考えよう。これは性質 i), ii) 及び上の3つの条件 a)$'$, b)$'$, c)$'$ をみたすことは明らかである。従って Case II$'$ から「各 Schottky 被覆面 $\tilde{S}_z$（但し $z \in \Delta$）上の単葉な有理型函数 $\varphi_z(p)$ で, パラメーター $z \in \Delta$ について解析的であるものが存在する。」ことがわかる。これは L. Bers [2-(1),(2)], Hejhal [3] と関連をもつ事実である。

§ 3. <u>Koebe 領域の場合</u>　各 fibre $\mathcal{D}_i(z)$（où $z \in \Delta$, $i = 1, 2$）

の境界が大きい，特別の場合を考えよう。P. Koebe [5] は次のことを示した：

N個の境界要素をもつ平面領域は，常にリーマン球面 $\mathbb{P}^1 = (|w| \leqq \infty)$ からN個の互いに交わらない円板又は点を除いた残りの領域に一対一解析的に写される。更に，後者のような領域は $\mathbb{P}^1$ の一次変換を除き一意的に定まる。

これに因んで，§3 では便宜上，次の定義を設けよう：

<u>定義</u> 球面 $\mathbb{P}^1$ から互いに交わらない有限個の円板又は点を除いた残りの領域を Koebe 領域と言う。

Case III をのべるために良く知られた次の定義をのべよう：$\mathcal{D}$ は直積 $\Delta \times \mathbb{P}^1$（但し $\Delta = (|z| < \rho)$，$\mathbb{P}^1 = (|w| \leqq \infty)$）の部分領域であって，境界は滑らかとする。即ち，$\mathcal{D}$ のある近傍（$\subset \Delta \times \mathbb{P}^1$）で定義された C^2-クラスの実数値函数 $\varphi(z,w)$ があり，次の条件をみたす：

$$\mathcal{D} = \{(z,w) \in \Delta \times \mathbb{P}^1 : \varphi(z,w) < 0\}$$

$$\partial\mathcal{D} = \{(z,w) \in \Delta \times \mathbb{P}^1 : \varphi(z,w) = 0\}$$

<u>定義</u> 上の如き $\mathcal{D}$ が両面擬凸状領域であるとは，$\mathcal{D}$ を定義する，上にのべた函数 φ の Levi form $L\varphi$ が $\partial\mathcal{D}$ 上で零であるときを言う，即ち

$$L\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{z} \partial w} \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{w}} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial w \partial \bar{w}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2$$

$$= 0 \quad \text{sur } \varphi = 0$$

<u>Case III</u>　$\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ は直積 $\Delta \times \mathbb{P}^1$ の部分領域であって，各 fibre $\mathscr{D}_i(z)$ (où $z \in \Delta$, $i=1,2$) は $\mathbb{P}^1$ の Koebe 領域とする：

$$\mathscr{D}_i(z) = \mathbb{P}^1 - \sum_{j=1}^{N} [C_{ij}(z)],$$

$[C_{ij}(z)]$ = 中心 $a_{ij}(z)$, 半径 $r_{ij}(z)$ の円板

更に次の条件を置く，

(α)　$N \geqq 3$;

(β)　$\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ は両面擬凸状領域である。

このとき，各 $z \in \Delta$ に対して，$\mathscr{D}_1(z)$ と $\mathscr{D}_2(z)$ が解析的同値：$\mathscr{D}_1(z) \sim \mathscr{D}_2(z)$ (où $\forall z \in \Delta$) ならば，$\mathscr{D}_1$ と $\mathscr{D}_2$ とは複素2次元の領域として，解析的同値である。

証明の概略を述べよう：

(1). まず上にのべた Koebe の定理の後半，および $\mathscr{D}_1(z) \sim \mathscr{D}_2(z)$ という仮定より，$\mathscr{D}_1(z)$ から $\mathscr{D}_2(z)$ への一対一解析写像 $\varphi(z,w)$ は次の形である：

$$\varphi(z,w) = \frac{\alpha(z)\,w + \beta(z)}{\gamma(z)\,w + \delta(z)} \quad (\text{但し } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ sur } \Delta)$$

更に条件(α)からこのような $\varphi(z,w)$ は一般には一意的に定まる。従って，我々の目的は条件(β)のもとで係数 $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$ が $z \in \Delta$ について解析的であることを示すことである。

(2). 単純な計算を行うことにより次を得る。

補題 1 $\mathcal{D}$ は $\Delta\times\mathbb{P}^1$ の部分領域であって，各 *fibre* $\mathcal{D}(z)$ (où $z\in\Delta$) が Koebe 領域：

$$\mathcal{D}(z) = \mathbb{P}^1 - \sum_{j=1}^{N} [C_j(z)]$$

$[C_j(z)]$ は中心 $a_j(z)$，半径 $r_j(z)$ の円板，

と仮定する。このとき，$\mathcal{D}$ が両面擬凸状領域であるのは，二つの函数 $\{a_j(z), r_j(z)\}$ （但し $\forall z\in\Delta$, $\forall j=1,2,\cdots,N$）が Δ で次の連立微分方程式をみたすときに限る，

$$(\mathrm{E})\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial a}{\partial \bar z}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial r}{\partial z}\right|^2 = r\dfrac{\partial^2 r}{\partial z\partial \bar z} \\ r\dfrac{\partial^2 a}{\partial z\partial \bar z} = 2\dfrac{\partial a}{\partial \bar z}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial z}. \end{cases}$$

さらに，方程式(E) をみたす解は次の二つの場合に帰する：

(E1)：中心 $a(z)$ は Δ で正則であり，半径の対数 $\log r(z)$ は Δ で調和である；

(E2)：Δ での二つの正則函数 $f(z)$, $\xi(z)$ （但し $f(z)\neq 0$ où $\forall z\in\Delta$）及び非線型微分方程式

$$(\mathrm{E}^*)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar z} = e^{2u}$$

をみたす Δ での実数値函数 $u(z)$ が存在して，中心 $a(z)$，半径 $r(z)$ は次の様に一意的に表現される：

$$\begin{cases} r(z) = \dfrac{e^{u(z)}}{|f(z)|} \\ a(z) = \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big/ f(z) + \xi(z). \end{cases}$$

(3). Levi form = 0 を Koebe 領域の場合に計算することによって生じた非線型微分方程式 (E^*) は色々の分野に現われてきて，各々の目的に沿って詳しく調べられている。

良くしられているように，z-平面上の境界のある領域では，(E^*) の境界値問題の解の存在と一意性が成立する。また，ポアンカレは論文 (1898) "Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$" において，x と y との間に多項式の関係 $f(x,y)=0$ があるとき，二階線型微分方程式 $\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x,y)v$ の全体を考え，それを quelques types に分類すると「各 type には，必ず Fuchs 函数より生じるものが唯一つ存在する。」ことを示している。その証明では，$f(x,y)=0$ によって定まる閉リーマン面上に singularités を与えるとき，さきの(E^*) を少し変形した微分方程式を積分することがなされている。また，微分幾何学の Kazdan-Warner [4] の一連の仕事も，(E^*) を変形した微分方程式を取り扱っている。

我々の目的のためには，(E^*)の解の次の性質が必要である。

<u>補題2</u> 微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = e^{2u}$ の，円板 Δ での C^2-クラスの任意の解 $u(z)$ は常に次の形で表わせる：

$$u(z) = \log \frac{|g'(z)|}{1-|g(z)|^2} \quad \text{où } z \in \Delta$$

但し，$g(z)$は Δ での正則函数で，$g(0)=0$，$|g(z)|<1$ sur Δ である。

補題 3　$u_1(z)$, $u_2(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$ は円板 Δ で定義された C^2-クラスの 4つの実数値函数であって，微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = e^{2u}$ をみたすと仮定する。このとき

$$e^{2u_1} + e^{2u_2} = e^{2v_1} + e^{2v_2} \quad \text{sur } \Delta$$

ならば，$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ sur Δ 又は $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$ sur Δ である。

注意 3　補題 2 によって，補題 3 は次と同値である：

di-cylindre $D^2 = (|w_1| < 1) \times (|w_2| < 1)$ に非ユークリッド距離：$ds^2 = |dw_1|^2 / (1 - |w_1|^2)^2 + |dw_2|^2 / (1 - |w_2|^2)$ を入れるとき，そこへの，円板 Δ の埋め込みは rigide である。

(4)。まず (1) にのべた $\varphi(z, w)$ の係数のうちで，$\gamma(z) = 0$ sur Δ という特別の場合には，上の補題 1, 2, 3 によって，$\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\delta(z)$ の $z \in \Delta$ についての解析性を証明できる．次に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が $\bar{z}$ について高々一次式の場合には，$\gamma(z) = 0$ sur Δ の場合に帰着されることが次の補題でわかる。

補題 4　$\Delta \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Delta \times \mathbb{P}^1$ への次の写像を考える：

$$Z = z, \quad W = \frac{\alpha(z) w + \beta(z)}{\gamma(z) w + \delta(z)} .$$

これによって，$\Delta \times \mathbb{P}^1$ の section $w = \xi(z)$ (où $z \in \Delta$) が $\Delta \times \mathbb{P}^1$ の section $W = \eta(z)$ (où $z \in \Delta$) に写ってゆくと

する，即ち

$$\eta(z) = \frac{\alpha(z)\xi(z)+\beta(z)}{\gamma(z)\xi(z)+\delta(z)} \qquad \text{où } z\in\Delta .$$

このとき，２つの sections ξ, η が と 0 に解析的であるのは，$\xi(z)$ (où $z\in\Delta$) が次をみたすときに限る，

$$\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta} = \frac{\alpha_{\bar z}\xi+\beta_{\bar z}}{\gamma_{\bar z}\xi+\delta_{\bar z}} = \frac{\alpha_{\bar z\bar z}\xi+\beta_{\bar z\bar z}}{\gamma_{\bar z\bar z}\xi+\delta_{\bar z\bar z}} \quad \text{sur } \Delta .$$

特に，α, β, γ, δ が $\bar z$ について高々一次式ならば上をみたす $\xi(z)$ (où $z\in\Delta$) が少なくとも一つ存在する。

(5)．最後に $\varphi(z,w)$ の係数が一般の場合には，次の補題によって各係数が高々 $\bar z$ について一次式であるような $\varphi_1(z,w)$ によって近似させて，α, β, γ, δ の解析性を証明する。

<u>補題 5</u>　$z\in\Delta$ を固定するとき，w についての任意の一次変換：$\varphi(z,w) = (\alpha(z)w+\beta(z))/(\gamma(z)w+\delta(z))$ を考える。$z=0$ の近傍で各係数を Taylor 展開する：

$$\alpha(z) = \alpha_{00}+\alpha_{10}z+\alpha_{01}\bar z+\alpha_{11}z\bar z+A(z) \quad (=\alpha_1(z)+A(z) \text{ とおく}),$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\delta(z) = \delta_{00}+\delta_{10}z+\delta_{01}\bar z+\delta_{11}z\bar z+D(z) \quad (=\delta_1(z)+D(z) \text{ とおく}).$$

そこで，$\varphi(z,w)$ の次の近似一次変換：$\varphi_1(z,w) = (\alpha_1(z)w+\beta_1(z))/(\gamma_1(z)w+\delta_1(z))$ を考える。$z\in\Delta$ を固定するとき，一次変換 $\varphi(z,w)$ 及び $\varphi_1(z,w)$ による，単位円 $C=\{|w|=1\}$ の像

を各々 $C(z)$, $C_1(z)$：

$$C(z) = \text{中心 } a(z),\ \text{半径 } r(z) \text{ の円}$$

$$C_1(z) = \text{中心 } a_1(z),\ \text{半径 } r_1(z) \text{ の円}$$

と書こう。このとき，2つの函数 $\{a(z), r(z)\}$ が補題1でのべた連立微分方程式 (E) を原点 $z=0$ でみたすのは，$\{a_1(z), r_1(z)\}$ が (E) を原点でみたすときに限る。

文献

[1] L.V. Ahlfors - L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton Univ Press, 1960, 382 p..

[2] L. Bers, (1) Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), p. 98-103.
(2) Int. conf. on Riemann surfaces and Discontinuous Groups, Maryland (1973), p. 43—55.

[3] D. Hejhal, Advances Math., 15 (1975), p. 133-156.

[4] J. Kazdan - F. Warner, Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972)

[5] P. Koebe, Math. Annal., 69 (1910), p. 1—81.

[6] T. Nishino, (1) J. Math. Kyoto Univ., 9 (1969) p. 221-274, (2) ibd. 13 (1973) p. 217—272.

[7] H. Poincaré, Oeuvres, tome II (1952) p. 512—591.

[8] H. Yamaguchi, (1) J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976) p. 497-

530. (2) C. R. Acad. Sci. Paris, 286 (1978), p. 1121-1124。

1978年11月6日