数理解析研究所講究録
341巻 1978年 164-172

Fuchs双曲型方程式の初期値問題について

上智大 理工　　田原 秀敏

本稿では"Fuchs双曲型方程式"のC^∞枠内での初期値問題について論じる。解析的な枠内では特異点を持つ解とか佐藤超関数解も含めて、その解の構造は[3][4][5][6][8]の中で殆完全に解明されている。C^∞枠内での定式化，結果達は後で述べることにして最初に問題をC^∞枠内で論じることの必要性，その意義について説明しておきたい。

1° 何故にC^∞枠内で論じるのか？

本節では幾つかの例を掲げて，その"面白さ"を説明する．

《例1》古くから遷音速波の研究に関連してTricomi方程式が研究されてきた。古典的な解法は普通：

$$\begin{array}{ccc} \text{Tricomi方程式} & \xrightarrow[\text{変数変換}]{} & \text{Euler-Poisson-Darboux方程式} \\ P=\partial_t^2-t\partial_x^2 & & P=\partial_t^2-\partial_x^2+\frac{\alpha}{t}\partial_t \end{array}$$

と変換する事によって解かれる。右辺のEuler-Poisson-Darboux

方程式はFuchs双曲型方程式の最も代表的なものである。従来Tricomi方程式の様にタイプの変わる混合型の方程式は難かしいと考えられてきたが、上の $\rightsquigarrow$ の図式の立場からみれば、その一般論はFuchs双曲型方程式の一般論をつくることに吸収されてしまう。

《例2》最近弱双曲型方程式の初期値問題に於て、次の形の方程式が脚光を浴びている：

$$P = \partial_t^2 - t^{2k}\partial_x^2 + a(t,x)\partial_x + b(t,x)\partial_t + c(t,x).$$

この P についての初期値問題が C^∞-Well Posedとなる為の必要十分条件は $a(t,x) = t^{k-1}\tilde{a}(t,x)$ と表わせる事である。ここで t^{k-1} と巾が k よりひとつ下がる所に非常に興味が持たれ、こういう方程式の特徴付けについて多くの研究がなされている。我々のFuchs型の立場から言えば、次の様に解釈される。つまり『或るstrictly双曲型な作用素 $\tilde{P}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ が存在して低階も含めて、$t^2P(t,x,\partial_t,\partial_x) = \tilde{P}(t,x,t\partial_t,t^{k+1}\partial_x)$ と書ける』という事である。つまり t^{k-1} でひとつ下がるというのは、『t^2を掛けてFuchs型にしなさい』というわけである。

《例3》本報告集の瓜生氏の定理1の方程式（予稿集を参考にした）についても簡単な計算により次が判かる。つまり、瓜生氏の条件というのは『或るstrictly双曲型な作用素：$\tilde{P}(t,x,\partial_t,\partial_{x_1}\cdots\partial_{x_n})$ が存在して、低階も含めて $t^m P(t,x,\partial_t,\partial_{x_1}\cdots\partial_{x_n})$

$=\tilde{P}(t, x, t\partial_t, t^{k+1}\partial_{x_1}, \cdots, t^{k+1}\partial_{x_n})$ と書ける』という条件と同じである。低階の条件に関しては、この条件が C^∞-Well-Posedになる為の必要十分条件になる。以上《例2》《例3》より言える事は『t^mを掛けてFuchs型にした時に低階がうまく揃う』ことが C^∞-Well Posed になる為の必要十分条件になっている，という事である。

《例4》上を更に一般化しよう。今Pを『或るstrictly双曲型な作用素 $\tilde{P}$ が存在して、低階も含めて $t^m P(t, x, \partial_t, \partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_n})$
$=\tilde{P}(t, x, t\partial_t, t^{k_1+1}\partial_{x_1}, \cdots, t^{k_n+1}\partial_{x_n})$ と書ける』ものとする。もしも $k_1, \cdots, k_n$ が異なれば，特性根は滑らかにはならない、しかしFuchs型の立場から見れば、そう影響は受けない。結論を言えば、この時も C^∞-Well Posed がいえる。低階の条件が必要十分である事も正しい筈である。

以上4つの例を見てきたが，次の事が理解されたと思う．つまり，『 $t=0$（初期面）で退化した或る種の方程式については，たとえ非特性の場合でも，非特性の形そのままで扱かうよりも，t^mを全体に掛けて退化させ，Fuchs型の形で扱かう方が 自然な扱かいが出来る』。'退化していないものを、t^mを掛けて、わざわざ退化させた方が良い' というのは一見奇妙に思えるが，それこそ "Fuchs型" の面白い側面といえ

るであろう。特に特性根が滑らかでない場合も扱えるというのは特筆すべき事柄だと思うが，如何なものであろうか．

2° 定式化及び定理

$(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ として次の形の線形偏微分作用素を考える，

$$P(t,x,\partial_t,\partial_x)=t^k\partial_t^m+P_1(t,x,\partial_x)t^{k-1}\partial_t^{m-1}+\cdots+P_k(t,x,\partial_x)\partial_t^{m-k}$$
$$+P_{k+1}(t,x,\partial_x)\partial_t^{m-k-1}+\cdots+P_m(t,x,\partial_x).$$

更に上の形の作用素 P に対して次の条件達を仮定する：

(A-1)　$0\leqq k\leqq m$;

(A-2)　$\mathrm{ord}\,P_j(t,x,\partial_x)\leqq j$,　$1\leqq j\leqq m$;

(A-3)　$\mathrm{ord}\,P_j(0,x,\partial_x)\leqq 0$,　$1\leqq j\leqq k$.

以上の3条件を満足する時，P を“Fuchs型作用素”と呼ぶことにする。$k=0$ の時は Kowalevskian に他ならない．第3の条件より $P_j(0,x,\partial_x)=a_j(x)$ $(1\leqq j\leqq k)$ と書ける。この時，

$$\mathcal{C}(\lambda,x)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)+a_1(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2)$$
$$+\cdots+a_k(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)$$
$$=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)(\lambda-\rho_1(x))\cdots(\lambda-\rho_k(x))$$

を P の決定方程式と呼び，その根：$\lambda=0,1,\cdots,m-k-1,\rho_1(x),\cdots,\rho_k(x)$ を P の特性指数と呼ぶ。初期値問題というのは，特性指数 $\lambda=0,1,\cdots,m-k-1$ に対応する解を問題にするものである．更に P に対する条件を続けてゆこう。

(A-4) $P_j(t,x,\partial_x)=\sum_{|\alpha|\le j}a_{j,\alpha}(t,x)\partial_x^\alpha$ ($1\le j\le m$) とおく時；

(1) $a_{j,\alpha}(t,x)\in\mathcal{B}^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{B}^\infty$ は Schwartz の空間 $\mathcal{B}$)；

(2) $|\alpha|=j$ なる組 (j,α) に対しては或る $b_{j,\alpha}(t,x)\in\mathcal{B}^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ が存在して，$a_{j,\alpha}(t,x)=t^{\min\{j,k\}}b_{j,\alpha}(t,x)$ と書ける；

(A-5)（双曲性） $\lambda_i(t,x,\xi)$ ($1\le i\le m$) を次の代数方程式の根とする： $\lambda^m+\sum_{j=1}^m(\sum_{|\alpha|=j}b_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha)\lambda^{m-j}=0$.

この時，$\lambda_i(t,x,\xi)$ は $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ 上の実数値関数である；

(A-6)（分離性） 或る二次形式 $S(t,\xi)$ と或る正定数 c が存在して $|\lambda_i(t,x,\xi)-\lambda_j(t,x,\xi)|\ge c\sqrt{S(t,\xi)}$ ($i\ne j$) を満足する。但し $S(t,\xi)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t)\xi_i\xi_j$ は次の (1)(2)(3) を満たす：

(1) $a_{ij}(t)\in C^1([0,T])$，実数値関数で，$a_{ij}(t)=a_{ji}(t)$；

(2) 任意の $t>0$ に対して，$S(t,\xi)$ は ξ の二次形式として，正定値二次形式である；

(3) $\max_{|\xi|=1}|\partial_t\log S(t,\xi)|=O(\frac{1}{t})$ as $t\to+0$.

（上の (1)(2)(3) を満たす様な二次形式を Basic quadratic form と呼ぶ。）

(A-7)（最高階の評価） 任意の多重指数 β に対して或る正定数 $C_\beta>0$ が存在して $(0,T]\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ 上，次を満たす．

$$|\partial_x^\beta\sum_{|\alpha|=j}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha|\le C_\beta t^{\min\{j,k\}}(S(t,\xi))^{\frac{j}{2}},$$

$$|\partial_t\partial_x^\beta\sum_{|\alpha|=j}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha|\le C_\beta t^{\min\{j,k\}-1}(S(t,\xi))^{\frac{j}{2}}.$$

(A-8)（低階の評価） 任意の多重指数 β に対して或る正

定数 $C_\beta>0$ が存在して, $(0,T]\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\backslash 0)$ 上, 次を満たす.

$$\left|\partial_x^\beta \sum_{|\alpha|<j} a_{j,\alpha}(t,x)(\sqrt{-1}\xi)^\alpha\right| \leqq C_\beta t^{\min\{j,k\}-j}(1+t^2 S(t,\xi))^{\frac{j-1}{2}}.$$

(A-9)（特性指数） 或る正定数 $c>0$ が存在して次を満たす.

$$|(\lambda-\rho_1(x))\cdots(\lambda-\rho_k(x))| \geqq \frac{c}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)}$$

但し $x\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{Z}$ s.t $\lambda\geqq m-k$.

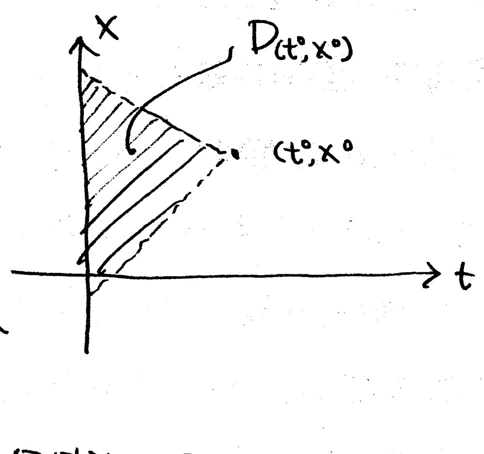
以上の (A-1)～(A-9) の条件のもとで次の定理を得る：

<u>定理</u> 任意の $u_1(x),\cdots,u_{m-k-1}(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と任意の $f(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ に対して次を満たす解 $u(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ が唯一つ存在する：

$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)\,u(t,x) = f(t,x), & [0,T]\times\mathbb{R}^n \text{上}; \\ \partial_t^j u(t,x)|_{t=0} = u_j(x), & 0\leqq j\leqq m-k-1. \end{cases}$$

更にこの解は有限伝播速度を持つ。伝播速度を上から評価すると次の通りである。

$$\lambda_{max} = \max_{\substack{(t,x)\\ |\xi|=1\\ 1\leqq i\leqq m}} |\lambda_i(t,x,\xi)|$$



この時 (t^0,x^0) $(t^0>0)$ に対して

$$D_{(t^0,x^0)} = \{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n;\ t\geqq 0\ \&\ |x-x^0| < \lambda_{max}|t-t^0|\}$$

とおく時 $D_{(t^0,x^0)}$ が (t^0,x^0) の依存領域になる。∎

3° 補足的な事柄達

《1》 条件が一見複雑にみえるが，"Fuchs型"の立場からみれば，どの条件も深い意味合いを持っている。例えば，"(A-1)～確定特異点を持つ事"，"(A-2)～方程式が m 階なる事"，"(A-3)～伝播速度に関係"，"(A-4)～伝播速度の有限性"，"(A-5)～双曲性"，"(A-6)(A-7)～主部の条件"，"Basic quadratic form～確定特異点"，"(A-8)～低階の条件"，"(A-9)～特性指数 $\rho_1(x),\cdots,\rho_k(x)$ に対応する解を除外"等々である。ここで(A-6)(A-7)の主部の条件と(A-8)の低階の条件については，Oleinik [2]の述べ方，つまり『主部で低階を評価する』という条件の述べ方を踏襲した。別の述べ方も可能であるが"評価"を使うと『特性根が滑らかでない場合も吸収できる』という利点をもつ故である。

《2》 上の定理によって，$t=0$ で多重度の変わる様な弱双曲型方程式は，基本的なものは大体吸収できる．初めの例にもどると，Tricomi方程式：$P=\partial_t^2-t\partial_x^2$ については"$m=2$, $k=0$, $S(t,\xi)=t\xi^2$"とおけば良いし，Euler-Poisson-Darboux方程式：$P=t(\partial_t^2-\partial_x^2)+\alpha\partial_t$ については"$m=2$, $k=1$, $S(t,\xi)=\xi^2$"とおけば良い。《例2》以下については，m=階数，$k=0$（非特性）は自明だから $S(t,\xi)$ のみ表わすと，《例2》～ $S(t,\xi)=t^{2k}\xi^2$，《例3》～ $S(t,\xi)=t^{2k}\xi_1^2+\cdots+t^{2k}\xi_n^2$，《例4》～ $S(t,\xi)=$

$t^{2k_1}\xi_1^2+\cdots+t^{2k_n}\xi_n^2$ によって定理に吸収される。

《3》 Ivrii-Petkov [1] は、その論文の中で "regular" とか "completely regular" とかの言葉を使って、任意の低階に対して C^∞ well posed になる様な方程式の特徴付けを試みている。我々の条件で、この様な方程式（つまり"強"双曲型）を捜してみると面白い例が数多く出てくる。代表的なものを掲ると、①多重度＝1の場合；strictly 双曲型 ($S(t,\xi)=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$)；②多重度＝2の場合；$P=\partial_t^2-t\partial_x^2$ ($S(t,\xi)=t\xi^2$)，$P=\partial_t^2-t^2\partial_x^2$ ($S(t,\xi)=t^2\xi^2$)，$P=\partial_t^2-\partial_{x_1}^2-t\partial_{x_2}^2-t^2\partial_{x_3}^2$ ($S(t,\xi)=\xi_1^2+t\xi_2^2+t^2\xi_3^2$) 等々； ③多重度＝3の場合；$P=\partial_t^3-t\partial_t\partial_x^2$ ($S(t,\xi)=t\xi^2$)，$P=\partial_t^3-\partial_{x_1}^2\partial_t-t\partial_{x_2}^2\partial_t$ ($S(t,\xi)=\xi_1^2+t\xi_2^2$) 等々，④多重度≧4の場合；我々の条件では発見できない； という結果となる。一方 Ivrii-Petkov は必要条件として『内部では多重度は高々2，境界で多重度は高々3』という結果を導びいている。ちゃんと我々の場合と符合している。なお，筆者の知る限りでは，多重度＝3の場合の"強"双曲型作用素の例は筆者の上の例が最初であろうと思われる。従来，多重度＝3の場合の方程式を扱った論文は幾つかあるが，それらは全て『特性根が滑らか』なる事を仮定している。所が，上の例でみる様に，多重度が3である様な強双曲型作用素の特性根は多分"必ず"滑らかにはなっていない。これが今迄，多重度

3の例が見い出され得なかった理由であろうと思われる。なお，一階双曲系の場合には，"強双曲型なる事"と"多重度"との間には Ivrii-Petkov の必要条件の類似は成り立たない．つまり，任意の m に対して，多重度が m でかつ強双曲型である様な作用素を構成する事が出来る。(非対称系で可能).

《4》 本稿までの結果は既に [7] に報告されている．本稿以降についても大幅に進展しているが，いづれどこかに全体を発表するつもりである。

References

[1] Ivrii-Petkov ; Uspehi Mat. Nauk, 29 (1974), 3-70,

[2] Oleinik ; Comm. Pure. Appl. Math. 23 (1970), 569-589,

[3] Tahara ; 数理解析研究所講究録 No. 248 (1975), 19-59,

[4] ——— ; Ibid. No. 266 (1976) 142-175,

[5] ——— ; Ibid. No. 281 (1976) 176-191,

[6] ——— ; Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12 (Suppl.) (1977) 465-468,

[7] ——— ; Proc. Japan Acad. 54 (1978), 92-96,

[8] ——— ; to appear in Japan J. Math. (題は Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations)

//