数理解析研究所講究録
341巻 1978年 80-92

線型常微分方程式系の変形理論

京大 数理研　上野 喜三雄

§.序　線型常微分方程式の(monodromy preserving) deformation の起源は古く，既に今世紀の初頭 L. Schlesinger [1], R. Fuchs [2] 等によって具体的な結果が得られている。Schlesingerは，canonical system

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i(a)}{x-a_i}\right)\vec{y} \qquad a=(a_1,\cdots,a_m)$$

$A_i(a)$は，aにholomorphicにdependする。

の変形の方程式として，いわゆるSchlesingerの微分方程式

$$dA_\mu = \sum_{\nu(\neq\mu)}[A_\nu, A_\mu]\, d\log(a_\nu - a_\mu) \quad (\mu=1,\cdots,m)$$

を得た。一方，Fuchsは，2階の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x.t)y$$

$$p(x.t) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda}$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon = 0$$

の変形の方程式として，

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-\lambda}\right)\frac{d\lambda}{dt}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)^2}\left\{k_\infty - k_0\frac{t}{\lambda^2} + k_1\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - k_t\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right\}$$

を得た。これは，Painlevé VI型と呼ばれる非線型微分方程式であって，その解は動く分岐点を持たない。2階の代数的微分方程式であって解が動く分岐点を持たないようなものは，6つの標準形に分類され，それらが，いわゆるPainlevé I型〜VI型と呼ばれる一連の微分方程式である。(Ince [6]) R. Garnier [5] は，1912年の論文で，I型からV型も，不確定特異点をもつ，2階の微分方程式の変形として得られるということを示している。

一方，近年においては，K. Okamoto [8] によるトーラス上の Fuchs 型微分方程式の変形の計算，Sato-Miwa-Jimbo [9] による holonomic quantum field に関連して行われた Euclidean Dirac 方程式に補助の方程式を付加して得られる holonomic system の変形の計算がある。

本稿においては，$x=\infty$ に一級，及び二級の不確定特異点をもつ常微分方程式系

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \left(\sum_i \frac{A_i(a)}{x-a_i} + B(a)\right)\vec{y}$$

$$x\frac{d}{dx}\vec{y} = \left(Ax^2+Bx+C\right)\vec{y}$$

の変形理論の構成，及びその背後の問題点を報告する。

我々は，有限の確定特異点の monodromy のみならず，不確定特異点における Stokes 係数，形式的 monodromy をも保存するように変形の方程式を構成する。

§1 変形理論の構成

$x=\infty$で1級の不確定特異点をもつ線型常微分方程式系

$$\frac{d}{dx}Y=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i(a)}{x-a_i}+B(a)\right)Y \quad ----(1)$$

$A_i(a)$ $(i=1,\cdots,N)$, $B(a)$は、aの正則函数を成分とする$n\times n$行列。ただし、次の条件を満足するものとしよう。

(1) $A_i(a)$; generic for $\forall i$　即ち、$A_i(a)$の固有値はすべて相異なる。

(2) $B(a)=\mathrm{diag}(b_1(a),\cdots,b_n(a))$ s.t $b_\alpha(a)-b_\beta(a)\notin\mathbb{Z}$ for $\forall\alpha\neq\beta$

以下の理論構成においては、漸近展開の理論が不可欠であるので、それを定理として述べておくことにする。

定理I　Sは、$x=\infty$を頂点とするopenな角領域で、その頂角は$\frac{\pi}{q+1}$よりも小とする。$T\subset\mathbb{C}$は、適当な有界領域とする。$A(x,t)$は$S\times T$で正則で、かつtに関して一様な漸近展開をもつとする。

$$A(x,t)\sim\sum_{r=0}^{\infty}A_r(t)x^{-r} \quad \text{in } S\times T \ (t\text{に関して一様})$$

また、A_0の固有値を$(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$, $(\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_m)$と2つのグループに分けたとき、$\lambda_j\neq\lambda_k$　$j\leq p$, $k\geq p+1$であるとしよう。この時次の微分方程式を考える。

$$x^{-q}\frac{d}{dx}Y=A(x,t)Y \quad ----(*)$$

このとき、Sの適当な部分角領域S'をとると、$S'\times T$で正則な函数$P(x,t)$で次の条件を満すものが存在する。

(1) $P(x,t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) x^{-r}$ in $S' \times T$ (tに関して一様)

(2) $\det P_0 \neq 0$

(3) $Y = PZ$ という変換を前述の方程式に施すと

$$x^{-q} \frac{d}{dx} Z = B(x,t) Z$$

ただし, $B(x,t)$は, 次の条件をみたす。

。 $B(x,t) = \begin{pmatrix} B^{11}(x,t) & \\ & B^{22}(x,t) \end{pmatrix}$ 　 B^{11}; $p \times p$ 行列　B^{22}: $(m-p) \times (m-p)$ 行列.

。 $B^{jj}(x,t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B_r^{jj}(t)$ in $S' \times T$ (tに関して一様) $j=1,2$

。 B_0^{jj}の固有値は, $\begin{cases} \lambda_1, \cdots, \lambda_p & j=1 \\ \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_m & j=2 \end{cases}$ である。

系　$A(x,t)$は定理と同じ条件をみたし, かつ固有値はすべて相異なるとする。このとき, 微分方程式(*)は角領域S'において次の条件を満足する解の基本系$Y(x,t)$をもつ。

(1) $Y(x,t) = \hat{Y}(x,t) x^{D(t)} \exp Q(x,t)$, $Y(x,t)$は$S' \times T$で正則。

(2) $D(t)$. $Q(x,t)$ に対角行列でともにtについて正則である。さらに$Q(x,t)$はxの$(q+1)$次の多項式である。

(3) $\hat{Y}(x,t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r(t) x^{-r}$ in $S' \times T$ (tに関して一様). $\det \hat{Y}_0 \neq 0$.

これらの証明は, Wasowの教科書[7] にある漸近展開の理論を助変数を含む場合に拡張すればよいのだが長くなるので省略する。従来, 助変数を含む場合の漸近展開の理論は, "大きな助

変数を含む場合に限られていたので，上述の様な定理は新しい。

さて角領域 S_j $(j=1,\cdots,6)$ を次の条件をみたす様にとる。

- S_j の頂角は，$\frac{\pi}{2}$ より小である。
- $S_j \cap S_{j+1} \neq \phi$，　$\bigcup_{j=1}^{5} S_j \supset \{x;\ |x|>x_0,\ 0 \leqq \arg x \leqq 2\pi\}$
- $S_6 = S_1 e^{2\pi i}$
- $\mathrm{Re}[(b_\alpha(a)-b_\beta(a))x]=0$ によって定まる放射線はすべて S_j の内部にある。

以上の仮定のもとで，定理の系より(1)の解の基本系 $\underbrace{Y_j(x,a)}_{(j=1,\cdots,6)}$ で次の条件を満足するものが存在する。

- $Y_j(x:a)$ は，a に関して正則
- $Y_j(x;a) \sim Y_\infty(x:a)x^{D(a)}\exp(xB(a))$　in S_j（a について一様）

  $D=\mathrm{diag}(d_1(a),\cdots,d_n(a))$

  $Y_\infty(x)=I+Y_\infty^{(1)}(a)x^{-1}+\cdots$，　I：$n\times n$ 単位行列
- $Y_6(x,a)=Y_1(x;a)e^{2\pi iD}$

<u>remark</u> 今の議論では必要ないが，$d_\alpha - d_\beta \notin \mathbb{Z}$ for $^\forall\alpha\neq\beta$ という仮定が後に必要となる。

ところで，Stokes 係数とは，$Y_{j+1}=Y_jC_j$ $(j=1,\cdots,5)$ をみたす非特異行列のことである。そして，$Y_1(x)$ は各 S_j を通過するごとに，$Y_1C_1^{-1}$，$Y_2C_2^{-1}C_1^{-1}$，$\cdots$，$Y_6C_5^{-1}\cdots C_1^{-1}$ という様に解析接続され S_6 に戻った時，${}^{r_\infty}Y_1(x)=Y_1(x)e^{2\pi iD}C_5^{-1}\cdots C_1^{-1}$ となる。そこで，我々は

次の仮定を措くことにする。

仮定(I)； $dC_j=0$ for $\forall j$, $dD=0$

ただし d は助変数 a についての外微分である。

即ち我々は，Stokes係数及び形式的monodromyは保存されるものとする。次に，有限の確定特異点のまわりでのmonodromyが保存されるとはどういうことかを説明する。

$x=a_i$ の近傍では，$Y_1(x)$は，

$$Y_1(x)=\Phi_i(x)(x-a_i)^{L_i}$$

ただし，$\Phi_i(x)$は $x=a_i$ の近傍で正則で $\det\Phi_i(a_i)\neq 0$ である。

と表わせる。従って，monodromyが保存されるとは，

仮定II； $dL_i=0$ for $\forall i$,

ということである。

今の場合，変形理論を構成するとは，仮定I, IIのもとで，函数 $\frac{\partial Y}{\partial a_j}\cdot Y^{-1}$（もしくは，$dY\cdot Y^{-1}$という1-form）を決定することを意味する。

以下において，このことを実行する。

仮定Iより，$\frac{\partial Y_k}{\partial a_j}Y_k^{-1}=\frac{\partial Y_{k+1}}{\partial a_j}Y_{k+1}^{-1}$ が従う。

次に，漸近展開の式

$$Y_j(x;a)\sim Y_\infty(x;a)x^{D(a)}\exp(xB(a)) \text{ in } S_j \quad (a\text{について一様})$$

の式を a_j で微分すると，仮定I及び上記のことに注意すれば，

$$\frac{\partial Y_1}{\partial a_j}\cdot Y_1^{-1}\sim\frac{\partial Y_\infty}{\partial a_j}Y_\infty^{-1}+Y_\infty\left(x\frac{\partial B}{\partial a_j}\right)Y_\infty^{-1} \quad \text{in the full nbd of } x=\infty$$

（この漸近展開は，助変数 a に関するuniformityより有効で

ある。）上の漸近展開は $x=\infty$ の全近傍で成立しているから，実は，

$$\frac{\partial Y_1}{\partial a_j}Y_1^{-1}=\frac{\partial Y_\infty}{\partial a_j}Y_\infty^{-1}+Y_\infty\left(x\frac{\partial B}{\partial a_j}\right)Y_\infty^{-1} \quad \text{---}(2)$$

である。又，仮定IIより，$x=a_i$ の近傍で，

$$\frac{\partial Y_1}{\partial a_j}Y_1^{-1}=\frac{\partial \Phi_i}{\partial a_j}\Phi_i^{-1}-\delta_{ij}\Phi_i\frac{M_i}{x-a_i}\Phi_i^{-1} \quad \text{----}(3)$$

が成立する。

従って，$\frac{\partial Y_1}{\partial a_j}Y_1^{-1}$ は $x=a_j$ で1位の極をもち，そこでの留数は，

$$\operatorname*{Res}_{x=a_j}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial a_j}Y_1^{-1}\right)=-A_j, \quad \operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial a_j}Y_1^{-1}\right)=\frac{\partial B}{\partial a_j}$$

であり，他では正則である。さらに，(2)の右辺の定数項を漸近展開を具体的に計算することにより求めることができて，

$$\frac{\partial Y_1}{\partial a_j}Y_1^{-1}=\frac{-A_j}{x-a_j}+\left\{\frac{\partial B}{\partial a_j},A\right\}_B+x\frac{\partial B}{\partial a_j} \quad \text{----}(4)$$

を得る。ただし，$A=\sum_{i=1}^{N}A_i$ である。また，$\{,\}_B$ の意味は次の通りである。

$$\left\{\frac{\partial B}{\partial a_j},A\right\}_B \text{の}(\mu,\nu)\text{成分}=\begin{cases} A_{\mu\nu}\dfrac{\frac{\partial b_\mu}{\partial a_j}-\frac{\partial b_\nu}{\partial a_j}}{b_\mu-b_\nu} & (\mu\neq\nu)\\[2ex] 0 & (\mu=\nu)\end{cases}$$

(4)を1-formの型で，

$$dY_1\cdot Y_1^{-1}=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{x-a_i}da_i+\{dB,A\}_B+x\,dB$$

とも書けることに注意する。

従って，

$$\begin{cases} P=\dfrac{d}{dx}-\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{x-a_i}+B\right)\\ \Omega=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{x-a_i}da_i+\{dB,A\}_B+x\,dB\end{cases}$$

とおけば，(1)に対する extended system

$$\begin{cases} PY = 0 \\ dY = \Omega Y \end{cases}$$

を得る。この system の積分可能条件は，

$$\begin{cases} dP = [\Omega, P] \\ d\Omega = \Omega \wedge \Omega \end{cases}$$

であるが，これを具体的に書き出せば，

$$\begin{cases} dA_i = \sum_{j(\neq i)} [A_j, A_i] d\log(a_j - a_i) + [\{dB, A\}_B, A_i] + [d(a_i B), A_i] \\ \{dB, dA\}_B = \{dB, A\} \wedge \{dB, A\}_B + [dB, \sum A_i da_i] \end{cases} \tag{5}$$

となる。

以上の長々しい考察の結果，我々は，仮定I，IIより非線型微分方程式系(5)を導出したのである。

<u>命題</u> (5)は，完全積分可能な外微分式系である。

証明は，省略する。（長い計算が必要。）

(5)において，$B \equiv 0$とすれば，Schlesingerの方程式に帰着されるのであるから，(5)は，まさに，Schlesinger方程式の拡張になっている。

逆に(5)が成立するとしよう。そのとき形式的monodromy Dは，一定である。即ち，$dD = 0$。実際，DはAのdiagonal成分に等しいが，(5)より，dA = off diagonal行列であるから，$dD = 0$であ

る。さて，Y_k $(k=1,\cdots,6)$を先に存在の保証された(1)の解の基本系とする。次の二つの補題が成立する。

補題I　ある定数行列$K(a)$が存在して，$dY_j=\Omega Y_j+Y_jK(a)$が成立する。

証明　$dP=[\Omega,P]$より，あるK_jが存在して$dY_j=\Omega Y_j+Y_jK_j$となるが，$K_j=Y_j^{-1}(dY_j-\Omega Y_j)$であるから，右辺の各$S_j$における漸近展開（それは$j$に依らない。）を計算すれば，$K_j$は$j$に依存しないことがわかる。　q.e.d

補題II　$K=0$　i.e　$dY_j=\Omega Y_j$．　$j=1,\cdots,6$

証明　$dD=0$より，$dY_1\cdot Y_1^{-1}-\Omega=dY_6\cdot Y_6^{-1}-\Omega$である。

$$左辺=Y_1KY_1^{-1},\quad 右辺=Y_6KY_6^{-1}=Y_1e^{2\pi iD}Ke^{-2\pi iD}$$

$$\therefore [e^{2\pi iD},K]=0$$

Dは対角行列でかつ成分の差は整数でないから，上の式よりKも対角行列である。これより

$$Y_1KY_1^{-1}\sim K+O(x^{-1})\quad \text{in } S_1$$

であるが，$dY_1\cdot Y_1^{-1}-\Omega$の漸近展開における定数項が0となることは，$\Omega$の取り方から明らか故，$K=0$である。　q.e.d

この補題によりStokes係数は保存されることがわかる。

実際，$dY_{j+1}\cdot Y_{j+1}^{-1}=dY_j\cdot Y_j^{-1}=\Omega$であるから，$Y_{j+1}=Y_jC_j$とすれば，$dY_{j+1}Y_{j+1}^{-1}=dY_j\cdot Y_j^{-1}+Y_jdC_j\cdot C_j^{-1}Y_j^{-1}$，であるから$dC_j=0$を得

る。有限の特異点での monodromy が保存されることは明らか故,以上をまとめると次の定理を得る。

定理II 仮定I, II が成立する為の必要かつ十分な条件は, A_i $(i=1,\cdots,N)$, B が非線型微分方程式系(5)を満すことである。

§2. 二級の不確定特異点を持つ場合の変形理論

$P = x\frac{d}{dx} + x^2A + xB + C$ とおいて,

$$PY = 0 \qquad ---(1)$$

という方程式を考える。ただし, A, B, C は, $n\times n$ 行列で, 適当な助変数に正則に依存しているものとする。また, A は対角行列で, 成分の差は, 相異なるとする。, $A = \mathrm{diag}(a_\mu)_\mu$, $B = (b_{\mu\nu})$ と書くことにする。§1 と同様な議論により, 漸近展開を計算することで, "変形の作用素" Ω

$$\Omega = x^2\Phi + x\Psi + \Theta$$

を得ることができる。ただし, Φ, Ψ, Θ は 1-form で,

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}dA$$

$$\Psi = -dB_d + \{-\tfrac{1}{2}dA, B\}_A$$

$$\Theta = \{\tfrac{-1}{2}dA, C\}_A + \{\Psi, B\}_A + \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{2}\sum_\nu d(a_\mu - a_\nu)\frac{b_{\mu\nu}b_{\nu\mu}}{(a_\mu - a_\nu)^2}\right\}_{\mu=1,\cdots,n}$$

と定義される。ここで, B_d は, B の対角成分, また, $\{,\}_A$ は §1 と同じ様に定義され, たとえば,

$$\{\Psi, B\}_{A,\mu\nu} = b_{\mu\nu}\frac{\Psi_{\mu\mu} - \Psi_{\nu\nu}}{a_\mu - a_\nu} \quad (\mu\neq\nu), \quad 0 \quad (\mu=\nu)$$

等と定義される。そして，我々は，(1)に対する extended system $PY=0,\ dY=\Omega Y$ を得るのであるが，この system の完全積分可能条件は，$dP=[\Omega,P]$，$d\Omega=\Omega\wedge\Omega$ である。これを書き下せば，次の外微分式系を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&[\Phi,A]=0\\
&[\Psi,A]+[\Phi,B]=0\\
&dA=-2\Phi+[\Psi,B]+[\Theta,A]+[\Phi,C]\\
&dB=-\Psi+[\Theta,B]+[\Psi,C]\\
&dC=[\Theta,C]\\
&d\Phi=[\Phi,\Theta]_{+}+\Psi\wedge\Psi\\
&d\Psi=[\Psi,\Theta]_{+}\\
&d\Theta=\Theta\wedge\Theta
\end{aligned}\right\}\ \text{----}\ (2)$$

<u>命題</u>　(2)は，完全積分可能な外微分式系である。

この証明は，頗る複雑であり，また，その為にブラケット{，}に関する幾つかの性質を調べねばならないので，ここでは，省略する。また§1と同じ議論により，次の定理も示せる。(§1で述べた形式的 monodromy が generic という条件が必要である。)

<u>定理</u>　微分方程式(1)の(適当な)解の基本系の monodromy, Stokes 係数，形式的 monodromy が保存される為の必要かつ十分な条件は，係数 A, B, C が，非線型微分方程式系(2)を満すことである。

例 $P = \frac{d}{dx} + \frac{A_+}{2(x-1)} + \frac{A_-}{2(x+1)} - \lambda\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$

$$A_\pm = \begin{bmatrix} \pm\dfrac{\eta^{\mp\frac{1}{2}}+\xi}{\eta^{\frac{1}{2}}-\eta^{-\frac{1}{2}}} & \mp\eta^{\pm\frac{1}{2}}\dfrac{\eta^{\mp\frac{1}{2}}+\xi}{\eta^{\frac{1}{2}}-\eta^{-\frac{1}{2}}} \\ \pm\eta^{\mp\frac{1}{2}}\dfrac{\eta^{\pm\frac{1}{2}}+\xi}{\eta^{\frac{1}{2}}-\eta^{-\frac{1}{2}}} & \mp\dfrac{\eta^{\pm\frac{1}{2}}+\xi}{\eta^{\frac{1}{2}}-\eta^{-\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$$

η, ξ は λ の正則函数である。

この場合について，変形の方程式を計算すると，変形の作用素は，

$$\Omega = \left\{ \frac{\xi}{2\lambda}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} \right\} d\lambda$$

であって，変形の方程式から ξ を消去して得られる方程式は，

$$\eta'' = \left(\frac{1}{2\eta} + \frac{1}{\eta-1}\right)(\eta')^2 - \frac{1}{\lambda}\eta' - \frac{8(\eta+1)\eta}{\eta-1}$$

である。これは Painlevé の V 型の特殊な場合である。さらに，$\eta = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$ と変換すれば，

$$y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{\lambda}y' + (y^3 - y^{-1})$$

を得るが，これは，Wu-McCoy の Painlevé Restricted III 型である。（Sato-Miwa-Jimbo [9]）

参考文献

[1] L. Schlesinger, J. Reine u. Angew. Math. 141 (1912) 96-145

[2] R. Fuchs, Math. Ann. 63 (1907) 301-321

[3] G. D. Birkhoff, Proc of American Academy (1913) 521-568

[4] 〃 , Amer. Math. Soc 10 (1909) 436-470

[5] R. Garnier, Ann. Éc. Norm. Sup. 43 (1912) 1–73

[6] E.L. Ince, Ordinary differential equations, Longmans-Green

[7] Wasow, Asymptotic expansion for ordinary differential equations, Interscience, 1965

[8] K. Okamoto, Funk. Ekva. 14 (1971) 137–152

[9] M. Sato, T. Miwa, and M. Jimbo, RIMS preprint-225 (1977)

[10] M. Kashiwara, T. Kawai, preprint (1977)