数理解析研究所講究録
341巻 1978年 55-64

特性要素の非正則度と
無限階擬微分作用素の増大度

東大 理　　青 木 貴 史

複素領域における擬微分方程式系の $\mathcal{E}^\infty$-加群としての構造はS-K-Kによって明らかにされたが $\mathcal{E}^\infty$の元(切断) 即ち一般に無限階の擬微分作用素(以下 Micro-Differential Operator; M.D.Op.と略記する)はひじょうに超越的なものである. その超越的なものをも扱いうる所に micro-local analysis の強力さがあるのではあるが, 一方では $\mathcal{E}$-加群 としての構造つまり有限階 M.D.Op. の category ではどうなるかは 確定特異点型方程式系の理論として 柏原-大島 [1] 等で研究されている. 以下ではそれらの中間として無限階ではあるが $\mathcal{E}^\infty$ よりは せまいクラスの category で考えると方程式系の構造は何に影響されるかを簡単な場合に考察する.

§1. 擬微分作用素の増大度

X を n 次元複素多様体 (以下 micro-local な話ゆえ $X = \mathbb{C}^n$ としてよい) とし, X 上の M.D.Op. の層を $\mathcal{E}^\infty$ とかく. また有限階 M.D.Op. からなる $\mathcal{E}^\infty$ の部分層を $\mathcal{E}$ とかく.

<u>定義 1.1.</u>　Ω を P^*X の開集合とする．$0<\rho<1$ なる ρ に対して

$$\mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}(\Omega) := \Big\{ P \in \mathcal{E}^{\infty}(\Omega) \;\Big|\; P(x,D) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P_j(x,D) \quad (P_j \text{ は } j \text{ 次斉次成分})$$

と表わした時 $\forall K \Subset \Omega \;\; {}^{\exists}h>0, {}^{\exists}C>0$ s.t.

$$\sup_{\substack{(x,\eta)\in K \\ |\eta|=1}} |P_j(x,\eta)| \leqq \frac{C h^j}{\Gamma\left(\frac{j}{\rho}+1\right)} \quad (j \geqq 0) \Big\}$$

とおく．ただし Γ はガンマ函数である．また $\rho=0,1$ に対してはそれぞれ $\mathcal{E}_{(0)}^{\infty}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$（有限階全体），$\mathcal{E}_{(1)}^{\infty}(\Omega) = \mathcal{E}^{\infty}(\Omega)$ とおく．$\Omega \longmapsto \mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}(\Omega)$ は自然な制限写像により層をなす．それを $\mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}$ とかく．$P \in \mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}(\Omega)$ のとき P の Ω における増大度は高々(ρ) であるという．

<u>例 1.2.</u>　$\cosh x_2\sqrt{D_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_2^{2k}}{(2k)!} D_1^k$ の増大度は $(\frac{1}{2})$ である．

<u>命題 1.3</u>　$\mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}$ は $\mathcal{E}^{\infty}$ の環構造についてその部分環である．

証明の方針：$0<\rho<1$ のとき $\mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}(\Omega)$ が M.D.Op. の積について閉じていることを示せばよいが，M.D.Op. の結合公式を用いてその各斉次成分を評価してやればよい．$0<\rho<\rho'<1$ なら $\mathcal{E} \subsetneqq \mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty} \subsetneqq \mathcal{E}_{(\rho')}^{\infty} \subsetneqq \mathcal{E}^{\infty}$ である．

$\mathcal{E}^{\infty}$ と同様，Späth 型の割算定理が $\mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}$ に制限しても成立する．すなわち増大度高々(ρ) の M.D.Op. を適当な有限階の M.D.Op. で割算したとき，その商，余りの増大度も高々(ρ) であることが証明できる．従って P^*X の接触変換に同伴した $\mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}$ の量子化変換が存在することが $\mathcal{E}^{\infty}$ の場

合と同様に証明できる.

$\mathcal{E}_{(p)}^{\infty}$ は ultra-distribution の理論と関係が深い. $\pi : P^*X \to X$ を projection とすると $\mathcal{D}^{\infty} \hookrightarrow \pi_* \mathcal{E}^{\infty}$ によって $\mathcal{D}^{\infty}$ の部分層 $\mathcal{D}_{(p)}^{\infty}$ が定義できるが $\mathcal{D}_{(p)}^{\infty}$ を実多様体に制限 (X をその複素化とみなして) したものは適当な class の ultra-distribution に作用する. 記号の混乱を避ける為に小松 [2] etc. における ultra-distributions の層 $\mathcal{D}^{(s)\prime}$ をここでは仮に $\mathcal{G}^{(s)\prime}$ とかくことにすると

<u>命題 1.4</u> (Cf. 小松 [3] Theorem 3.1) $p \leq \frac{1}{s}$ なる p に対して $\mathcal{G}^{(s)\prime}$ は 左 - $\mathcal{D}_{(p)}^{\infty}$ - 加群となる.

<u>§ 2. 非特異特性要素の非正則度</u>

標題の概念は微分作用素に対して小松 [2] で与えられた. われわれはそれを擬微分作用素および擬微分方程式に対して定義する

$P(x, D) = \sum_{j \leq m} P_j(x, D)$ を m 階の M. D. Op. とする. ただし P_j は j 階斉次成分を表わす. V を P の特性多様体とする : $V = \{(x, \eta) \in P^*X \mid P_m(x, \eta) = 0\}$

P に対して次の仮定を設ける. 考える点 $x_0^* \in V$ の近傍で P の重複度は一定で d とする. また V は x_0^* の近傍で正則, すなわち ω を P^*X の基本一次形式とするとき $\omega|_V \neq 0$ と仮定する.

このとき次の条件 (2.1) ~ (2.4) をみたす Ψ, G を選ぶことができる.

(2.1) Ψ, G は x_0^* の近傍で定義されたそれぞれ 1 階, 0 階の M. D. Op. である.

Ψ, G の主シンボルをおのおの ψ, g とするとき

(2.2)　x_0^* の近傍で $V=\{\psi=0\}$

(2.3)　$(\omega\wedge d_{(x,\eta)}\psi)_{x_0^*}\neq 0$,　$(d_{(x,\eta)}g)_{x_0^*}\neq 0$

(2.4)　$[\Psi, G]=1$　(従って $\{\psi, g\}=1$)

Pに対する仮定から

$$P_m(x,\eta)=e(x,\eta)\psi(x,\eta)^d$$

とかくことができる．ただし $e(x,\eta)$ は x_0^* の近傍で正則で η について $(m-d)$ 次斉次で $e(x_0^*)\neq 0$ である．また $\Psi(x,D)^d$ の主シンボルは $\psi(x,\eta)^d$ であることに注意すると Späth 型の割算定理 (cf. S-$\widetilde{\text{K-K}}$ 定理 1.8″) によって次の形に一意的に割算できる：

$$(2.5)\quad\begin{cases} P(x,D)=Q(x,D)\Psi(x,D)^d+R(x,D) \\ (\mathrm{ad}\,G)^d R=[G[\cdots[G,R]\cdots]]=0. \end{cases}$$

$(\mathrm{ad}G)^d R=0$ は (2.4) より次の形にかけることと同値である：

$$(2.6)\quad\begin{cases} R(x,D)=\sum_{j=0}^{d-1} R^{(j)}(x,D)\Psi(x,D)^j \\ \text{ただし}\ [G, R^{(j)}]=0 \qquad j=0,\dots,d-1. \end{cases}$$

(2.5) の両辺の主シンボルを比較して Q の主シンボルは $e(x,\eta)$ である．従って Q は $(m-d)$ 階で x_0^* の近傍で可逆な M.D.Op. である．また R が高々 $(m-1)$ 階であることもわかる．従って (2.6) における $R^{(j)}$ は高々 $(m-j-1)$ 階である．そこで $R^{(j)}$ の階数を r_j $(\leqq m-j-1)$ とし

$$q_j=\max\{0,\ r_j-(m-d)\}$$

と定める．$0\leqq q_j\leqq d-j-1$ である．

定義 2.1　（Cf. 小松 [2] DEFINITION 1.4）

このとき　$\sigma = \max_{0\le j<d} \left\{ \frac{d-j}{d-q_j-j} \right\}$　を P に対する特性要素 x_0^* の非正則度という.

定義から $1 \le \sigma \le d$ である. $\sigma = 1$ のとき P は V に沿って確定特異点をもつ, あるいは Levi 条件をみたすという. $\sigma > 1$ のとき P は V に沿って不確定特異点をもつという.

注意 1°　σ は $\{(j+q_j, j) \mid j = 0, 1, \cdots, d\}$　($q_d = 0$ とする) に同伴した Newton 多角形の辺の傾きの最大値である.

2°　特に P が微分作用素のときには 小松 [2] の定義と一致する.

3°　明らかに σ は特性多様体の regular part で一定である.

4°　σ は (2.1)〜(2.4) をみたす Φ, G の取り方によらずに定まる. 従って非正則度 σ は量子化された接触変換で不変である.

注意 4° から非正則度は特性多様体を標準形 $\eta_1 = 0$ に変換して計算すればよい.

命題 2.2　　E を x_0^* の近傍で可逆な M.D.Op. とすると, $P_1 = EP$, $P_2 = PE$ に対する x_0^* の非正則度はいずれも σ である.

命題 2.3　　P, Q を $\eta_1 = 0$ の近くで定義された それぞれ m 階, ℓ 階の M.D.Op. でその主シンボルは おのおの η_1^m, η_1^ℓ であると仮定する. 特性要素

$\eta_1=0$ の P, Q に対する非正則度をそれぞれ σ_1, σ_2 とすると $\eta_1=0$ の $R=PQ$ に対する非正則度 σ は $\sigma=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$ で与えられる.

定義 2.4　定義 2.1 の仮定をみたす P に対して単独擬微分方程式

$$\mathcal{M}:\ P(x,D)u=0 \qquad (\mathcal{M}=\mathcal{E}/\mathcal{E}P)$$

を考える時, 特性要素 $x_0^*\in \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ の $\mathcal{M}$ に対する非正則度を x_0^* の P に対する非正則度 σ として定義する.

定義 2.4'　$\mathcal{M}$ を射影次元 1 の regular system とする. (regular system の定義は S-K-K Chap II §5.3 参照. ここでは $\mathcal{E}$-加群のみを考える.) $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}=\Lambda$ とする. $\Lambda\ni x_0^*$ の近傍で $\mathcal{M}$ は Λ に台をもつ有限個の単独方程式 $\mathcal{M}_i=\mathcal{E}/\mathcal{E}P_i$ $(i=1,\cdots,p)$ の直和に $\mathcal{E}$-加群として同型になるが, x_0^* の P_i に対する非正則度を σ_i とするとき x_0^* の $\mathcal{M}$ に対する非正則度を

$$\sigma=\max_{1\le i\le p}\sigma_i$$

によって定める.

§3. 構造定理

以上のもとに擬微分方程式(系)の $\mathcal{E}^\infty_{\varphi_0}$-加群としての構造を調べる. つまり方程式を"標準型"に変換するときに用いる M. D. Op. の増大度を制限して考える.

<u>定理 3.1.</u> (Cf. S-K-K Chap II Theorem 5.2.1)

$P(x,D)$ を $(x^\circ,\eta^\circ)=(0;0,\cdots,0,1)$ の近傍で定義された m 階の M.D.Op. でその主シンボルは η_1^m であるとし，特性要素 (x°,η°) の非正則度は σ であると仮定する．このとき擬微分方程式

$$\mathcal{M}\ :\ P(x,D)u=0$$

は (x°,η°) の近傍で擬微分方程式

$$\mathcal{N}\ :\ D_1u_1=D_1u_2=\cdots=D_1u_m=0$$

と $p\geq\frac{\sigma-1}{\sigma}$ なる p に対して左 $\mathcal{E}^\infty_{(p)}$ - 加群として同型である．すなわち $\mathcal{E}^\infty_{(p)}\underset{\mathcal{E}}{\otimes}\mathcal{M}\simeq\mathcal{E}^\infty_{(p)}\underset{\mathcal{E}}{\otimes}\mathcal{N}$

<u>証明</u>　S-K-K の証明を少し精密化する．P に対する仮定より Weierstraß 型の割算定理を用いて (x°,η°) で可逆な因子をのぞいてはじめから

$$P(x,D)=D_1^m-P_0(x,D')D_1^{m-1}-\cdots-P_{m-1}(x,D'),\qquad D'=(D_2,\cdots,D_n)$$

と仮定してよい．P_j は高々 j 階の M.D.Op. である．P_j の階数を r_j，$q_j=\max\{0,r_j\}$ とおくと $\sigma=\max\limits_{1\leq j\leq m}\{j/(j-q_{j-1})\}$ である．

$s_j=[(j+1)\frac{\sigma-1}{\sigma}]$　$(j=0,\cdots,m-1$，$[\ ]$ は Gauß 記号）によって s_j を定めると，$q_j\leqq s_j\leqq j$，$s_j\leqq s_{j+1}$ で $\sigma=\max\limits_{1\leq j\leq m}\{j/(j-s_{j-1})\}$ となる．さて，$\mathcal{M}$ を行列を使って次の形に書きかえる：

(3.1)　$$D_1U=M(x,D')U\qquad U={}^t(u_1,\cdots,u_m)$$

ただし
$$M(x,D')=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\P_{m-1}&P_{m-2}&\cdots&P_1&P_0\end{pmatrix}$$

D_n は (x^0, η^0) の近傍で可逆だから

$$C = \begin{pmatrix} D_n^{s_{m-1}} & & & & \\ & D_n^{s_{m-2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & D_n^{s_1} & \\ & & & & D_n^{s_0} \end{pmatrix}$$

もまた可逆である. (3.1) をさらに C で変換すると $\mathfrak{M}$ は

$$(D_1 - A(x, D'))\, V = 0 \qquad V = {}^t(v_1, \dots, v_m)$$

ただし $A(x, D') = C\, M(x, D')\, C^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & D_n^{s_{m-1}-s_{m-2}} & & & \\ & 0 & D_n^{s_{m-2}-s_{m-3}} & & \\ & & 0 \ \ddots & D_n^{s_2-s_1} & \\ & & \ddots & 0 & D_n^{s_1-s_0} \\ P_{m-1} D_n^{-s_{m-1}} & P_{m-2} D_n^{-s_{m-2}} & \cdots & P_1 D_n^{-s_1} & P_0 D_n^{-s_0} \end{pmatrix}$$

と同型になる.

M.D.Op. の行列 $D_1 - A(x, D')$ に対して

(3.2) $\quad (D_1 - A(x, D'))\, R(x, D') = R(x, D')\, D_1$

をみたす $m \times m$ の可逆な M.D.Op. の行列をつくり その増大度を調べるのであるが存在は S-K-K で示されているので増大度のみをみる. ここでは簡単の為 $[D_1, A(x, D')] = 0$ すなわち $A = A(x', D')$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$ の場合に その方法を述べる. この場合 (3.2) をみたす R は

$$R(x, D) = \exp(x_1 A(x', D')) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1^k}{k!} A(x', D')^k$$

によって得られるから $A(x', D')^k$ の各行列要素の階数が問題になる. それを調べる為に $A(x', D') = A_0(x', D') + N$ と分解する. ただし A_0 の各行列要素は高々0階の M.D.Op. で

$$N = \begin{pmatrix} 0 & D_n^{s_{m-1}-s_{m-2}} & & & \\ & 0 & D_n^{s_{m-2}-s_{m-3}} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots\ 0 & D_n^{s_1-s_0} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

である. また $\Delta = \{ j \mid 0 \le j \le m-1,\ \sigma = \frac{j+1}{j+1-g_j} \}$ とおき

$$\mu = \max \{ j \mid j \in \Delta \} + 1$$

とすると定義から $\sigma = \frac{\mu}{\nu}$ である. ただし $\nu = \mu - g_{\mu-1}$ とおいた.

さて $\sigma = 1$ とすると $s_j = g_j = 0$ ゆえ A の各行列要素は高々 0 階ゆえ定理の主張はよく知られている. (cf. 柏原-大島 [1] Theorem 1.9) そこで以下 $\sigma > 1$ とする. $\mu > \nu$ である. N^k の階数を調べる. 明らかに $k \ge m$ なら $N^k = 0$ であり, $1 \le k \le m-1$ に対しては

$$N^k = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{k} & D_n^{s_{m-1}-s_{m-k-1}} & & & \\ & 0 & D_n^{s_{m-2}-s_{m-k-2}} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & D_n^{s_k-s_0} \\ & & & k\left\{ \right. & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

である. 従って $N^{\mu-1}$ の各要素の階数は高々 $s_{\mu-1} = g_{\mu-1} = \mu - \nu$ である.

μ の定め方に注意して $A(x', D')^k = (A_0(x', D') + N)^k$ と考えるとその各要素の階数は高々 $(k - \mu l) + (\mu - \nu) l = k - \nu l$ であることがわかる. ただし l は $\mu l \le k$ なる最大の整数である. 従って $k \to \infty$ のとき A^k の階数は高々 $k - \nu l \fallingdotseq k - \nu \frac{k}{\mu} = \frac{\mu - \nu}{\mu} k = \frac{\sigma - 1}{\sigma} k$ 程度になることがわかる. つまり $[\frac{\sigma-1}{\sigma} k]$ 階の係数が $\frac{x_1^k}{k!} \times (k$ のベキ$)$ 程度であるから逆に見ると j 階の斉次成分が $C h^j / \Gamma(\frac{\sigma}{\sigma-1} j)$ 程度 $(\exists C, h > 0)$

であることがわかり定理が導かれる. 一般の場合も含め厳密に証明する為にはやはり formal norm の評価を用いるが問題は階数の評価のみでそれは上に示したのと全く同様である.

<u>定理 3.2.</u> Λ を P^*X の余次元 1 の正則な部分多様体とする. Λ を台とするふたつの regular systems $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_0$ を考える. $x_0^* \in \Lambda$ の近くで $\mathcal{M}_0$ の重複度は 1, $\mathcal{M}$ の重複度は d とし, さらに x_0^* の $\mathcal{M}$ に対する非正則度を σ とする. このとき $\rho \geqq \frac{\sigma - 1}{\sigma}$ なる ρ に対して $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}_0$ の d 個の直和に $\mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty}$-加群として同型である:

$$\mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_{(\rho)}^{\infty} \underset{\mathcal{E}}{\otimes} (\underbrace{\mathcal{M}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_0}_{d\text{ケ}}).$$

文献

[S-K-K] 佐藤-河合-柏原: Micro-functions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. No. 287 Springer, 1973.

[$\widetilde{S\text{-}K\text{-}K}$] ―――: 超函数論における擬微分方程式論, 数学 25 (1973).

[1] 柏原-大島: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. Math. 106 (1977) 145-200.

[2] 小松: Irregularity of characteristic elements and constructions of null solutions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. 23 (1976) 297-342.

[3] ――: Ultradistributions II. ibid.