数理解析研究所講究録
341巻 1978年 32-40

定係数の主部をもつ双曲型作用素に対する特異性の伝播

筑波大学 数学系　　若林誠一郎

定係数の主部をもつm階の双曲型作用素 $P(x,D)=P_m(D)+Q(x,D)$ を考える。ここで、$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $D=-i(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n)$,

$$Q(x,D)=\sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x)D^\alpha \quad (a_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n))$$

である。次の仮定の下で $P(x,D)$ に対する Cauchy 問題が well-posed であることは、Dunn [2] によって証明された：

(A) 各 $x\in\mathbb{R}^n$ に対して、$P(x,\xi)$ は $\vartheta=(1,0,\cdots,0)$ に関して双曲型多項式である。

ここでは、上の仮定の下で、解の波面集合についての定係数双曲型作用素に対する Atiyah-Bott-Gårding [1] の結果と同様の評価が得られることをしめす。

1. まず、Cauchy問題が well-posed であることを、[2] とは異なる方法でしめす。

$$(1)\quad \begin{cases} P(x,D)u=f\in\mathcal{D}',\ \operatorname{supp} f\subset\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_1\geq 0\}, \\ \operatorname{supp} u\subset\{x_1\geq 0\}\end{cases}$$

の解を逐次近似によってもとめよう。すなわち

$$P_m(D)\,u_0 = f,\quad P_m(D)\,u_{\ell+1} = -Q(x,D)\,u_\ell,\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

$$\operatorname{supp} u_\ell \subset \operatorname{supp} f + \Gamma(P_m,\vartheta)^*$$

とおけば、$u=\sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell$ が収束して(1)の解である。ここで、

$$\Gamma(P_m,\vartheta) = \text{‘}\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ P_m(\xi)\neq 0\}\text{ の }\vartheta\text{ を含む連結成分’},$$

$$\Gamma^* = \{x\in\mathbb{R}^n;\ x\cdot\xi\geqq 0\quad\text{for } {}^\forall\xi\in\Gamma\}$$

である。Dunn は Payser の方法によってこれを証明したが、ここでは u_ℓ の Fourier-Laplace 変換 $\hat{u}_\ell$ の評価によって証明する。

補題1 (Svensson [4]). $P_m(\xi)$ が ϑ に関して双曲型多項式でかつ斉次多項式で、多項式 $p(\xi)$ が $(m-1)$ 次以下であるとする。そのとき、次の3つは同値である:

(i) $P_m(\xi)+p(\xi)$ は ϑ に関して双曲型多項式である。

(ii) $p \prec P_m$

(iii) $C(>0)$ が存在して、

$$\xi\in\mathbb{R}^n,\ |\operatorname{Im} s|\geqq 1 \Longrightarrow \left|\frac{p(\xi+s\vartheta)}{P_m(\xi+s\vartheta)}\right| \leqq C\,|\operatorname{Im} s|^{-1}$$

ここで、$p^{(\alpha)}(\xi)=\dfrac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}p(\xi)$, $\tilde{p}(\xi)=\left(\sum_\alpha |p^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{1/2}$ とおけば、$p\prec P_m$ は $C(>0)$ が存在して

$$\tilde{p}(\xi) \leqq C\,\tilde{P}_m(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^n$$

が成立することを意味する。

仮定(A) より

$$Q(x,\xi)=\sum q_j(x)p_j(\xi),\quad q_j\in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ p_j\prec P_m,\ \deg p_j<m$$

と表わすことができる。これと補題1より次を得る。

補題2. (A)を仮定する。さらに、$a_\alpha\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f\in\mathcal{E}'$, $\mathrm{supp}\,f\subset\{x_1\geqq 0\}$ ならば

$$|\hat{u}_l(\xi-i\gamma\vartheta)|\leqq C(f)C(P_m)e^{\gamma}\gamma^{-1}(C(P_m,Q,s)/\gamma)^l\langle\xi\rangle^s,\quad l=0,1,2,\cdots,\ \gamma\geqq 1$$

が成立する。ここで、$|\hat{f}(\xi)|\leqq C(f)\langle\xi\rangle^s$, $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$ である。

補題2と同じ仮定の下で、uを

$$\hat{u}(\xi-i\gamma\vartheta)=\sum_{l=0}^\infty \hat{u}_l(\xi-i\gamma\vartheta),\quad \gamma>C(P_m,Q,s)$$

によって定義すれば、uは(1)の解で

$$|\hat{u}(\xi-i\gamma\vartheta)|\leqq C'(f)C(P_m)e^{\gamma}\gamma^{-1}(1-C(P_m,Q,s)/\gamma)^{-1}\langle\xi\rangle^s,\quad \gamma>C(P_m,Q,s)$$

をみたす。特に $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、$u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が従う。P^* も P と同じ仮定をみたすので、補題2と有限伝播性より、仮定(A)の下でCauchy問題がwell-posedであることが従う。また $\hat{u}_l$ を詳しく評価することによって、エネルギー不等式をしめすこともできる[5]。

2. $E(x,y)$ を $P(x,D)$ の基本解とする。すなわち

$$P(x,D_x)E(x,y)=\delta(x-y)$$

$$\operatorname{supp} E(x,y) \subset \{(x,y)\in \mathbb{R}^{2n};\ x-y\in \Gamma(P_m,\vartheta)^*\}$$

である。各$\xi^0\in\mathbb{R}^n$に対して

$$P(x,t\xi^0+\xi)= t^{r_{\xi^0}}P_{\xi^0}(x,\xi)+\sum_{j=1}^{\infty} t^{r_{\xi^0}-j} R^j_{\xi^0}(x,\xi),$$

$$R^j_{\xi^0}(x,\xi)\equiv 0 \quad \text{if } j>r_{\xi^0}$$

と表わす。ここで、r_{ξ^0}は非負整数でxには依存しない。また、$P_{\xi^0}(x,\xi)$はξ^0における$P(x,\xi)$の localization である。$P(x,\xi)$が仮定(A)をみたせば、$P_{\xi^0}(x,\xi)$も(A)をみたす。

$$P_{\xi^0}(x,D_x)E_0(x,y;\xi^0)=\delta(x-y),$$

$$P_{\xi^0}(x,D_x)E_j(x,y;\xi^0)=-\sum_{k=1}^{\infty} R^k_{\xi^0}(x,D_x)E_{j-k}(x,y;\xi^0),$$

$$\operatorname{supp} E_j\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^n;\ x-y\in\Gamma(P_{m\xi^0},\vartheta)^*\}$$

$$E_j(x,y,\xi^0)\equiv 0 \quad (j<0)$$

によって$E_j(x,y;\xi^0)$を定義すれば、次の定理を得る。

定理3. 仮定(A)の下で

$$t^N\{t^{r_{\xi^0}}\exp[-it(x-y)\cdot\xi^0]E(x,y)-\sum_{j=0}^{N} t^{-j}E_j(x,y;\xi^0)\}$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}) \text{ as } t\to\infty, \quad N=0,1,2,\cdots$$

が成立する。さらに

$$\bigcup_{j=0}^{\infty}\{((x,y),(\xi^0,-\xi^0))\in T^*\mathbb{R}^{2n}\setminus 0;\ (x,y)\in\operatorname{supp}E_j(\cdot,\cdot;\xi^0)\}$$

$$\subset WF(E(x,y)),\qquad \xi^0\neq 0$$

が成立する。

3. (1)の解uの波面集合を(外側から)評価するには、基本解$E(x,y)$の波面集合の評価を導けばよく、[1]の方法と逐次近

似を用いて次の定理を得る。

定理4. 仮定(A)の下で、(1)の解 u に対して

$$WF(u) \subset C \circ WF(f)$$

が成立する。ここで

$$C = \{((x,\xi),(y,\eta)) \in T^*\mathbb{R}^n \times T^*\mathbb{R}^n \setminus 0\ ;\ \xi = \eta \text{ and } x - y \in \Gamma(P_{m\xi}, \vartheta)^*\}$$

である。

以下、定理4の略証を与える。一般性を失うことなく、$Q(x,D)$ の係数 a_α は C_0^∞ に属すると仮定してよい。定理をしめすには、

$$WF(E(x,y)) \subset \{((x,y),(\xi,\eta)) \in T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus 0 ; ((x,\xi),(y,-\eta)) \in C\}$$

を証明すればよい。$x^0, y^0 \in \mathbb{R}^n$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x^0 - y^0 \notin \Gamma(P_{m\xi^0}, \vartheta)^*$ とする。そのとき、x^0 の近傍 U_1 と y^0 の近傍 U_2, $\eta_0 \in \Gamma(P_{m\xi^0}, \vartheta)$ が存在して、

$$(x-y)\cdot\eta^0 < 0 \quad \text{for } \forall x \in U_1,\ y \in U_2$$

をみたす。そのとき、[1] Lemma 5.1 より次を得る。

補題5. ξ^0 の凸開錐近傍 Γ, 正数 δ, t_0 が存在して、

$$P_m(\xi - i(t|\xi|\zeta + \vartheta)) \neq 0 \quad \text{when } 0 \leq t \leq t_0,\ \xi \in \Gamma,$$
$$|\zeta - \eta^0| \leq \delta,\ \zeta \in \mathbb{R}^n$$

をみたす。

この補題　　　　を用いて、定理4の証明において重要な

次の補題がしめされる。

補題6. $p \prec P_m$, $\deg p < m$ とする。そのとき、

$$\left|\frac{p(\xi - i(t|\xi|\eta^0+\gamma\vartheta))}{P_m(\xi - i(t|\xi|\eta^0+\gamma\vartheta))}\right| \leq C(P_m, p)/\gamma$$

$$\text{when } \xi \in \Gamma, \ 0 \leq t \leq t_0, \ \gamma \geq 1.$$

今、

$$P_m(D_x - i\gamma\vartheta)F_0(x,y;\gamma) = \delta(x-y),$$

$$P_m(D_x - i\gamma\vartheta)F_{l+1}(x,y;\gamma) = Q(x, D_x - i\gamma\vartheta)F_l(x,y;\gamma),$$

$$\operatorname{supp} F_l(x,y;\gamma) \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n};\ x-y \in \Gamma(P_m,\vartheta)^*\},$$

$$l = 0, 1, 2, \cdots$$

によって $F_l(x,y;\gamma)$ を定義する。そのとき、γ 十分大に対して

$$F(x,y;\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} F(x,y;\gamma)$$

が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ で存在し、

$$F(x,y;\gamma) = \exp[-\gamma(x_1-y_1)]E(x,y)$$

である。$\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$ $(j=1,2)$ に対して、$\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ とおく。そのとき、

$$\mathcal{F}_{(x,y)}[\varphi F_l](\xi,\eta) = \sum_{j_1,\cdots,j_l,\pm}(-1)^l(2\pi)^{-(1+l)n}$$

$$\times\int d\zeta^0\, \hat{\varphi}_1(\tfrac{1}{2}\xi-\zeta^0)P_m(\tfrac{1}{2}\xi+\zeta^0-i\gamma\vartheta)^{-1}$$

$$\times\Big\{\int d\zeta^1\, \hat{q}^{\varepsilon\pm}_{j_1 l}(\zeta^1;|\xi|)\, p_{j_1}(\tfrac{1}{2}\xi+\zeta^0-\zeta^1-i\gamma\vartheta)P_m(\tfrac{1}{2}\xi+\zeta^0-\zeta^1-i\gamma\vartheta)^{-1}$$

$$\times\Big\{\ ----$$

$$\times \{\int d\zeta^l \hat{q}^{\varepsilon\pm}_{j_l l}(\zeta^l; |\xi|)\, p_{j_l}(\tfrac{1}{2}\xi+\zeta^0-\zeta^1-\cdots-\zeta^l-i\gamma\vartheta)$$
$$\times P_m(\tfrac{1}{2}\xi+\zeta^0-\zeta^1-\cdots-\zeta^l-i\gamma\vartheta)^{-1}\hat{\varphi}_2(\tfrac{1}{2}\xi+\eta+\zeta^0-\zeta^1-\cdots-\zeta^l)\}\cdots\}.$$

ここで、$\hat{q}^{\varepsilon+}_{jl}(\zeta; s) = \chi^{\varepsilon}_l(\zeta; s)\hat{q}_j(\zeta)$, $\hat{q}^{\varepsilon-}_{jl}(\zeta; s) = (1-\chi^{\varepsilon}_l(\zeta; s))\hat{q}_j(\zeta)$,

$$\chi^{\varepsilon}_l(\zeta; s) = 1 \quad \text{if } |\zeta| < \varepsilon s/l, \quad = 0 \quad \text{if } |\zeta| > \varepsilon s/l$$

である.

$$I^+ = \Sigma_{j_1,\cdots,j_l,+} \quad (\;\text{〃}\;)$$
$$I^- = \mathcal{F}_{(x,y)}[\varphi F_l](\xi,\eta) - I^+$$

とおけば、補題1より

$$|I^-| \leq C(Q)C(P_m)\gamma^{-1} l^N (C(P_m, Q)/\gamma)^l |\varphi_1|_{n+1} |\varphi_2|_0$$
$$\times |Q|_{N+n+1} \langle\xi\rangle^{-N}, \qquad \gamma \geq 1$$

が従う。ここで、$|Q|_k = \sup_j |q_j|_k$, $|f|_k = \sup_{|\alpha|\leq k,\, x\in R^n} |D^\alpha f(x)|$ で、$C(Q)$ は Q に関しては、$\mathrm{supp}\, q_j$ と $|Q|_{n+1}$ にのみ依存し、$C(P_m, Q)$ は $|Q|_0$ に依存する。次に、I^+ を評価しよう。正数 ε と ξ^0 の錐近傍 Γ' を適当にとって、

$$\xi \in \Gamma' \text{ かつ } |\zeta| < \varepsilon|\xi| \Longrightarrow \tfrac{1}{2}\xi + \zeta \in \Gamma$$

となるようにできる。$\Phi(\zeta) \in C^\infty$ を、$|\zeta| \geq 1$ において0次の正斉次函数で、$\Phi(\zeta) = 1$ on nb.d. of $\Gamma' \cap \{|\zeta| \geq 1\}$, $\mathrm{supp}\,\Phi \subset \Gamma \cap \{|\zeta| > \tfrac{1}{2}\}$, $0 \leq \Phi(\zeta) \leq 1$ をみたすようにえらぶ。

$$v_t(\zeta) = t|\zeta|\Phi(\zeta)\eta^0$$
$$V_t = \{\zeta^0 \in \mathbb{C}^n;\ \zeta^0 = \zeta - i v_t(\zeta),\ \zeta \in R^n\}$$

とおけば、補題6とStokesの定理より、

$$I^+ = \Sigma_{j_1,\cdots,j_l}\ (-1)^l (2\pi)^{-(1+l)n}\int_{V_{t_0}} d\zeta^0 \int_{\mathbb{R}^n} d\zeta^1 \cdots \int_{\mathbb{R}^n} d\zeta^l$$
$$\cdots$$

を得る。補題6と[1]の方法によって、

$$|I^+| \leqq C(Q)C(P_m)\gamma^{-1}(C(P_m,Q)/\gamma)^l |\varphi_1|_{N+n+1}|\varphi_2|_0\langle\xi\rangle^{-N},$$
$$N=0,1,2,\cdots, \quad \text{if } \xi\in\Gamma' \text{ and } \gamma\geqq 1$$

がしめされる。故に

$$|\mathcal{F}_{(x,y)}[\varphi F](\xi,\eta)| \leqq C(P_m,Q,\gamma)(|\varphi|_{n+1}|Q|_{N+n+1}+|\varphi|_{N+n+1})$$
$$\times\langle\xi\rangle^{-N}, \quad N=0,1,2,\cdots, \text{if } \xi\in\Gamma', \gamma>C(P_m,Q)$$

ここで、$C(P_m,Q,\gamma)$ は Q に関しては $|Q|_0$ にのみ依存する。これは、

$$((x^0,y^0),(\xi^0,\eta))\notin WF(E(x,y)) \text{ when } x^0-y^0\notin\Gamma(P_{m\xi^0},\vartheta)^*, \eta\in\mathbb{R}^n$$

をしめす。また、$((x^0,y^0),(\xi,\eta))\in T^*\mathbb{R}^{2n}\setminus 0$, $\xi\neq-\eta$ のとき、

$$((x^0,y^0),(\xi,\eta))\notin WF(E(x,y))$$

も容易に従う。よって、定理4がしめされた。

定理4の証明より次のことは明らかであろう。

定理7. 条件(A)を仮定し、さらに、$a_\alpha\in C^L(\mathbb{R}^n)$ ([3]参照)を仮定する。そのとき

$$WF_L(u)\subset C\circ WF_L(f)$$

である。

References

[1] Atiyah, M. F., Bott, R. and Garding, L., Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math., 124 (1970), 109-189.

[2] Dunn, J. L., A sufficient condition for hyperbolicity of partial differential operators with constant coefficient principal part, Trans. Amer. Math. Soc., 201 (1975), 315-327.

[3] Hormander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 671-704.

[4] Svensson, S. L., Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part, Ark. Mat., 8 (1969), 145-162.

[5] Wakabayashi, S., Propagation of singularities for hyperbolic operators with constant coefficient principal part, to appear.