数理解析研究所講究録
344巻 1979年 123-140

Chevalley群のSpringer表現について

東京理科大　　庄司俊明

Introduction

G を標数 $p\ (\neq 0)$ の代数的閉体 k 上定義された連結代数群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする. $\mathfrak{g}$ の nilpotent element A に対し, $\mathcal{B}_A$ をその Lie 環が A を含む様な G の Borel subgroup 全体のなす variety とする. W を G の Weyl 群とする時, T. A. Springer は, [10] で compact support を持った l-adic cohomology $H_c^i(\mathcal{B}_A, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ の上への W の表現を定義した. 但し $\overline{\mathbb{Q}}_l$ は l-進数体 $(l \neq p)$ の代数的閉包を表わすものとする. $Z = Z_G(A)$ を G における A の centralizer とし, $C(A) = C_G(A) = Z/Z^0$ とおく, (Z^0 は Z の単位元の連結成分). $d_A = \dim \mathcal{B}_A$ とすると top cohomology $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A) = H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ の次元は $\mathcal{B}_A$ の最大次元の既約成分の個数に等しく, $C(A)$ の $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ への自然な作用は既約成分の上への置換表現に一致する. 更に W の作用は $C(A)$ の作用と可換になる. そこで $C(A)$ の既約指標 ϕ に対して

$C(A) \times W$ - module $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ の ϕ - isotypic subspace の分解を $\phi \otimes \chi_{A,\phi}$ とおく．この時 Springer ([10]) は，この様にして定まる W の指標 $\chi_{A,\phi}$ が既約であり，W の既約指標は全て $\chi_{A,\phi}$ の形で（(A,ϕ) の G - 共役を除いて）一意的に定まることを示した．これを Springer 表現という．この小論では $\chi_{A,\phi}$ を具体的に求めることを考える．

$G = GL_n$ の場合，$\mathfrak{g}$ の nilpotent element A は n の partition λ によって parametrize され，常に $C(A) = 1$ である．この時 λ の dual partition λ^* に対応する $W = S_n$ の既約指標を χ_{λ^*} とすると，$\chi_{A,1} = \chi_{\lambda^*}$ となることが知られている．（例えば Hotta - Shimomura [3], Hotta - Springer [4]）．そこでここでは，G が classical group 及び F_4 型 Chevalley 群の場合を扱う．方針としては，G の適当な parabolic subgroup P の Weyl 群 W_P について，$H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ の W_P - module としての構造を決定する．B_n 型，F_4 型，及び D_n 型の大部分に関して，W の既約指標はその W_P への制限によって決まるので，これにより $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ の W - module としての構造も決めることができる．

§1. Unipotent variety

W の Springer 表現を定める為には，$\mathcal{B}_A$ の既約成分の上への $C(A)$ の作用を知る事が重要である．そこでまず $\mathcal{B}_A$ の既約成分の構成と，その上への $C(A)$ の作用を調べる．

$B \supset T$ を G の Borel subgroup, maximal torus とし，$W = N(T)/T$ とする．G の parabolic subgroup $P \supset B$ を固定する．$P = M \cdot U_P$ を P の Levi 分解，$W_P \subset W$ を P に対応する Weyl subgroup とする．$\mathcal{P}_A$ をその Lie 環が A を含む様な parabolic subgroup で，P と共役なものの作る variety とし，$p: \mathcal{B}_A \longrightarrow \mathcal{P}_A$ を canonical な surjection とする．$\mathcal{P}_A$ の上には自然に Z が作用して，

$\mathcal{P}_A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ と $\mathcal{P}_A$ の Z-orbit への分解が得られる．$y_0 \in \mathcal{P}_A$ で P に対応する元を表わせば，$p^{-1}(y_0) = (P/B)_A \simeq \mathcal{B}^M_{A'}$ である．但し $\mathcal{B}^M_{A'}$ は M, $A' = A$ の M-component，に関する $\mathcal{B}_A$ と同様の variety とする．簡単の為 $y_0 \in Y_\lambda$ と仮定して，$X_\lambda = p^{-1}(Y_\lambda)$ とおく．そこで $\{X_i\}$ を $\mathcal{B}^M_{A'}$ の既約成分とすれば，

$X_\lambda = \bigcup_{a \in Z} a Z^\circ X_i$ であり，各 $a Z^\circ X_i$ は X_λ の既約成分となる．

今，$C_P(A)$ を canonical map : $Z \longrightarrow C(A)$ の $Z \cap P$ の像とし，$C'_P(A)$ を canonical map $Z \cap P \longrightarrow Z_M(A') \longrightarrow C_M(A')$ における $Z^\circ \cap P$ の像として定義する．但し，$C_M(A') = Z_M(A')/Z^\circ_M(A')$ である．すると X_λ の既約成分，及びその上の $C(A)$ の作用は，Spaltenstein [9] により次の様に決定される．

(i) $C'_p(A)$ は $\{X_i\}$ の上に作用する．X_i の $C'_p(A)$-orbit を $\overline{X_i}$ とあらわすと，$Z^\circ X_i = Z^\circ X_j \iff \overline{X_i} = \overline{X_j}$

(ii) $C_p(A)$ は $\{\overline{X_i}\}$ の上に作用し，$a, b \in C(A)$ に対して，

$$a Z^\circ X_i = b Z^\circ X_j \iff \begin{cases} a^{-1} b \in C_p(A) \quad \text{かつ} \\ \overline{X_i} = a^{-1} b\, \overline{X_j} \end{cases}$$

従って Λ：有限の場合には，$\mathcal{B}_A$ の全ての既約成分は $aZ^\circ X_i$ の closure という形で得られる．一方，Spaltenstein [8] により $\mathcal{B}_A$ の既約成分は全て同次元であることが知られているので，$aZ^\circ X_i$ 達の中で最大次元のものを探し出せば，それが $\mathcal{B}_A$ の既約成分を全て与えることになる．

X_λ の既約成分は全て同次元であるから，そこで X_λ の次元を調べることが必要となる．それには次の lemma が有用である．

<u>Lemma</u> 1.1. p は very good とし，$Y_\lambda \ni y_0$ とする．その時

$$2 \dim (Z \cap P) \geqq \dim Z + \dim Z_M(A').$$

ここで等号の成立する場合には，$\dim X_\lambda = \dim \mathcal{B}_A$．

証明は，p：very good より $\dim \mathcal{B}_A = \frac{1}{2}(\dim Z - r)$，$\dim \mathcal{B}^M_{A'} = \frac{1}{2}\dim(Z_M(A') - r)$，但し $r = \operatorname{rank} G_T$，となる事を使えば容易に出る．

最後に $Z\backslash\mathcal{P}_A$ の parametrization に関して述べる。

$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の G−共役を P−共役類に分けた集合とする。

$Z\backslash\mathcal{P}_A$ から $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ への写像 f を $f(ZgP) = {}^{g^{-1}}\!A$ の P−共役類として定めれば，f は well-defined かつ bijection を与えることが容易に確かめられる。従って $Z\backslash\mathcal{P}_A$ の元は ${}^{g^{-1}}\!A$ の P−共役類として parametrize できる。

注意 1.2. (i) G が classical group の場合，P を W_P が corank 1 の同じ type の Weyl subgroup になる様に選ぶ。すると Spaltenstein [9]，Srinivasan [11]，により Λ は有限であり，

$$ZgP = Zg'P \iff ({}^{g^{-1}}\!A)' \text{ と } ({}^{g'^{-1}}\!A)' \text{ が } M \text{ で共役}$$

となる事が知られている。（右辺の $'$ は M−component を表わす）

(ii) $G = F_4$ とする。P として W_P が C_3 型となるものを取る。その時 A が $A_3 + \tilde{A}_1$ $(C(A) \simeq S_4)$，又は $C_3 + A_1$ $(C(A) \simeq Z_2)$ の type の時を除いて Λ は有限集合となることが確かめられる。（A の type については，Dynkin [2] 参照）

§2. Springer表現

§1の結果をcohomology moduleの上に翻訳する.

$\mathcal{P}_A$ の locally closed subvariety Y に対して $X = p^{-1}(Y)$ とおく. その時,

<u>Lemma</u> 2.1. $H_c^i(X)$ に canonical な W_P-module の構造を定義して, $H_c^i(\mathcal{B}_A)$ に対しては その W-module の W_P への制限と一致する様に出来る.

以下では $\mathcal{P}_A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ は finite union であると仮定する. すると Lemma 2.1 により $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A) = \bigoplus_\lambda H_c^{2d_A}(X_\lambda)$ と W_P-moduleの直和に分解できる. 但し和は $\dim X_\lambda = \dim \mathcal{B}_A$ となる $\lambda \in \Lambda$ を動くものとする. そこで $X_\lambda = p^{-1}(Y_\lambda)$ について考える. $Y_\lambda \ni y_0$ としてよい. $Y_0 = Z^0 y_0$, $X_0 = p^{-1}(Y_0)$ とおくと, $C(A)$ の作用を考えて, $X_\lambda = \bigcup a X_0$ (disjoint union) と表わせる. ここに $a \in C(A)/C_P(A)$ である.

更に X_0 の既約成分の上への $C_P(A)$ の作用は, $H_c^{2d_A}(X_0)$ の上に延長できて, $C(A) \times W_P$-module の同型

$$H_c^{2d_A}(X_\lambda) \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell[C(A)] \underset{\bar{\mathbb{Q}}_\ell[C_P(A)]}{\otimes} H_c^{2d_A}(X_0)$$

を得る.

そこで問題は $H_c^{2d_A}(X_0)$ の $C_P(A) \times W_P$-module の構造に帰着

する．これに対しては，いくつかの仮定のもとに $C_P(A)\times W_P$-module として $H_c^{2d_A}(X_0)\simeq H_c^{2d_{A'}}(\mathcal{B}_{A'}^M)^{C'_P(A)}$ となることを示す．但し $d_{A'}=\dim\mathcal{B}_{A'}^M$，右辺は $C'_P(A)$-不変な部分空間を表わすものとする．

<u>仮定 (S)</u> 次の様な性質を満たす Y_0 の open dense subvariety Y, étale covering $c:\hat{Y}\longrightarrow Y$ with group Π (Π: finite), $\hat{Y}$ から Z^0 への morphism s が存在する．

(i) $\hat{Y}\simeq \mathbb{A}^k\times S$，; S は1次元以下の torus，$\mathbb{A}^k$ は k-次元 affine space.

(ii) 任意の $y\in\hat{Y}$ に対して，$s(y)y_0=c(y)$

(iii) $s(\sigma(y))^{-1}s(y)\in Z^0\cap P$ は $y\in\hat{Y}$ の取り方によらない．但し $\sigma\in\Pi$ とする．

<u>Lemma</u> 2.2. 仮定 (S) のもとに W_P-module として

$$H_c^{2d_A}(X_0)\simeq H_c^{2d_{A'}}(\mathcal{B}_{A'}^M)^{\Pi'}.$$

但し Π' は (iii) によって定まる準同型 $\Pi\longrightarrow Z^0\cap P$ の像とする．更に，もし Π' が $\mathcal{B}_{A'}^M$ の automorphism group として $Z\cap P$ で不変ならば，上の同型は $C_P(A)\times W_P$-module として取れる．

証明は $X \times_Y \hat{Y} \simeq p^{-1}(y_0) \times \hat{Y}$ となる事より，Springer表現の定義に戻り Artin－Schreier covering に関する morphism に延長することによって得られる．

注意 2.3. G が classical group の場合には，Srinivasan[11] により仮定(S)を満たす様な A を直接構成することができる。

以下，connected reductive group G に対して仮定(S)が満たされる条件を調べる．

Lemma 2.4. P, $Z \cap P$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{p}$, $L(Z \cap P)$ とし，A の $\mathfrak{p}$ における centralizer を $Z_{\mathfrak{p}}(A)$ とおく．その時，
$L(Z \cap P) = Z_{\mathfrak{p}}(A)$ ならば，$Y_0 \simeq Z^0 / Z^0 \cap P$

Lemma の仮定は，$Z_{\mathfrak{p}}(A)$ の次元を計算することにより Lemma 1.1 の不等式を利用して確めることができる．以下では上の様な Y_0 についてのみ考えることにする．

ところで，p は very good であるから [1, E-III] により，A に対して G の parabolic subgroup Q, Levi subgroup $L \subset Q$ が canonical に定まって $Q = L \cdot U$ を Levi 分解とすれば
$Z = Z_Q(A) = Z_L(A) \cdot Z_U(A)$ は半直積で，$Z_L(A)$ は reductive, $Z_U(A)$ は Z の unipotent radical であり，$Z/Z^0 \simeq Z_L(A)/Z_L^0(A)$

となることが知られている。そこで A の weighted Dynkin diagram $D(A)$ によって定まる $\mathfrak{g}$ の grading を $\mathfrak{g}_i$ で表わし，Q の対応する部分を U_i で表わす．従って，$U_0 = L$，$U = \prod_{i>0} U_i$ である．この時，P と Q に関して次の仮定をする．

<u>仮定</u>(Q)

(i) $Z^\circ \cap P = (Z_L^\circ(A) \cap P) \cdot (Z_U(A) \cap P)$ ：半直積，

(ii) $U \cap P \simeq \prod_{i>0} (U_i \cap P)$ as varieties

(iii) $Z_L^\circ(A) \cap P$ は $Z_L^\circ(A)$ の semi-parabolic subgroup，又は semi-parabolic subgroup の Levi subgroup になる．

但し $H \subset G$ が semi-parabolic とは，H が G の maximal unipotent subgroup を含むものと定義する．

以上の仮定のもとで，仮定(S)の条件を確かめることができる．実際，この時 $Z_U(A) \simeq \mathbb{A}^n$，$Z_U(A) \cap P \simeq \mathbb{A}^m$，$Z_U(A)/Z_U(A) \cap P \simeq \mathbb{A}^{n-m}$ で，更に section $s_R : Z_U(A)/Z_U(A) \cap P \longrightarrow Z_U(A)$ が存在することが容易に分る．一方，$Z_L^\circ(A) = C$ とおくと，(iii) より $S(C \cap P)^\circ$ が C の parabolic subgroup となる様な torus S $(\dim S \leq 1)$ が存在する．そこで étale covering $C/(C \cap P)^\circ \longrightarrow C/(C \cap P)$ を考えて，$S(C \cap P)^\circ$ に対応する C の big cell $V_C \cdot S(C \cap P)^\circ \subset C$ （V_C は $S(C \cap P)^\circ$ の opposite parabolic subgroup の unipotent radical) を取れば,

$C/(C\cap P)^\circ \supset V_c\cdot S(C\cap P)^\circ/(C\cap P)^\circ \simeq V_c\cdot S \simeq \mathbb{A}^l \times S$ は,

open dense な $C/(C\cap P)^\circ$ の subvariety であって, section s_c が存在する.

ここで $Y = V_c\cdot S(C\cap P)^\circ Z_U(A)/(Z^\circ\cap P)$,

$\hat{Y} = V_c\cdot S(C\cap P)^\circ Z_U(A)/(Z^\circ\cap P)^\circ$ とすれば,

$\hat{Y} \simeq V_c\cdot S(C\cap P)^\circ/(C\cap P)^\circ \times Z_U(A)/Z_U(A)\cap P$ であり,

canonical map $c: \hat{Y} \longrightarrow Y$ に対して, $s=(s_c, s_P)$ は仮定(b)の条件を満たすことが確められる. 更に, この時 Π' の $H_c^{2d_{A'}}(\mathcal{B}_{A'}^M)$ の作用は $C'_P(A)$ に一致することも容易に分る.

<u>注意</u> 2.6. $G=F_4$ の場合, $\dim Y_\lambda = \dim \mathcal{B}_A$ となる $Y_\lambda \supset Y_0$ に対して, Lemma 2.4 の仮定は成立する. 又 nilpotent element の P-共役類の分類の結果より仮定(a)の条件は全て成立する.

§3. Identification

$G=Sp_m$, $O_m \subset GL_m$ を自然な inclusion とする. $A\in\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}_m$ の元とみて m 次の Young diagram $d_m=d_m(A)$ で表わす事にする. Sp_m, O_m の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{sp}_m$, $\mathfrak{o}_m$ とし, r_i を $d_m(A)$ の長さ i の行の個数とすると, $A\in\mathfrak{gl}_m$ に対して

$$\begin{cases} A \in \mathcal{S}p_m \iff \text{奇数 } i \text{ に対して } r_i \text{ は偶数} \\ A \in \mathcal{O}_m \iff \text{偶数 } i \text{ に対して } r_i \text{ は偶数} \end{cases}$$

となり，又

$$Z_G(A) \text{ の reductive part} \simeq \begin{cases} \prod_{i:\text{even}} O_{r_i} \times \prod_{j:\text{odd}} Sp_{r_j} & (G = Sp_m) \\ \prod_{i:\text{odd}} O_{r_i} \times \prod_{j:\text{even}} Sp_{r_j} & (G = O_m) \end{cases}$$

である．従って $Z_G(A)/Z_G^\circ(A) \simeq \underbrace{Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{a\text{ 個}}$ で，a は．
$G = Sp_m$ の時は，$a = \#\{r_i \mid r_i \neq 0,\ i \text{ は偶数}\}$，
$G = O_m$ の時は，$a = \#\{r_i \mid r_i \neq 0,\ i \text{ は奇数}\}$ でそれぞれ与えられる．そこで r_i に対応する $Z_G(A)/Z_G^\circ(A)$ の generator を a_i と表わすことにする．$a_i^2 = 1$ で，奇数 i に対して $a_i = 1$ $(G = Sp_m)$，又は 偶数 i に対して $a_i = 1$ $(G = O_m)$ である．

次に $W = W_n$ を C_n 型 Weyl 群とする．W の既約指標は n の partition の pair (λ, μ)，$|\lambda| + |\mu| = n$ と bijective に対応する．但し partition $(\lambda) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ と表わす．partition pair $\tau = (\lambda, \mu)$ に対応する W の既約指標を $\chi_\tau = \chi_{(\lambda,\mu)}$ と表わすことにする．一方 D_n-型 Weyl 群は W の index 2 の subgroup W_0 と同一視できる．その時 W_0 の既約指標の全体は unordered partition pair (λ, μ)，$|\lambda| + |\mu| = n$ と bijective に対応する．但し (λ, λ) は2回数えるものとする．実際，W の既約指標 $\chi_{(\lambda,\mu)}$ に対して，$\lambda \neq \mu$ ならば

$\chi_{(\lambda,\mu)}|_{W_0}$ も既約であり，$\lambda=\mu$ ならば $\chi_{(\lambda,\mu)}|_{W_0}=\chi_1+\chi_2$ と同じ次数の W_0 の既約指標の和に分解する．

今，$\tau=(\lambda,\mu)$ ordered pair（$\bar{\tau}$ は unordered pair）に対して，$\lambda^*=(\lambda_i)$，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r$，

$\mu^*=(\mu_i)$，$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_s$ をそれぞれ (λ), (μ) の dual partition（Young diagram の dual に対応する partition）とし，$d_\tau=(d_i)$ を次の様に定義する．

(C) $G=Sp_{2n}$

まず数列 $\{\nu_i\}$ を，$\nu_{2i-1}=\mu_i$ $(1\leq i\leq s)$，$\nu_{2i}=\lambda_i$ $(1\leq i\leq r)$ $\nu_j=0$ その他，と定める．そして，$d_\tau=(d_i)$ を帰納的に次の様に定める．

(i) $\nu_i\geqslant\nu_{i+1}\Rightarrow d_i=2\nu_i$,

(ii) $\nu_i=\nu_{i+1}-1\Rightarrow d_i=2\nu_i+1,\quad d_{i+1}=2\nu_i+1$,

(iii) $\nu_i\leq\nu_{i+1}-2\Rightarrow d_i=2\nu_{i+1}-2,\quad d_{i+1}=2\nu_i+2$,

(B) $G=O_{2n+1}$

まず $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_j\}$ を $i>r$, $j>s$ に対して $\lambda_i=\mu_j=0$ として全ての自然数に拡張しておく．そして $d_\tau=(d_i)$ を次の様に定める．

(i) $\mu_i\geqslant\lambda_i-1\Rightarrow d_{2i-1}=2\mu_i+1$,

(ii) $\mu_i=\lambda_i-2\Rightarrow d_{2i-1}=2\mu_i+2,\quad d_{2i}=2\mu_i+2$,

(iii) $\mu_i \leq \lambda_i - 3 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i - 3$, $d_{2i} = 2\mu_i + 3$,

(i)' $\lambda_i \geq \mu_{i+1} + 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_i - 1$,

(ii)' $\lambda_i = \mu_{i+1} \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_i$, $d_{2i+1} = 2\lambda_i$

(iii)' $\lambda_i \leq \mu_{i+1} - 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_{i+1} - 1$, $d_{2i+1} = 2\lambda_i + 1$.

(D) $G = O_{2n}$

辞書式順序に関して，$\lambda^* \geq \mu^*$ と仮定する．$\{\lambda_i\}$, $\{\mu_j\}$ は (B) の場合と同様にする．この時 $d_\tau = (d_i)$ を次の様に定める．

(i) $\lambda_i \geq \mu_i + 1 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i - 1$,

(ii) $\lambda_i = \mu_i \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i$, $d_{2i} = 2\lambda_i$,

(iii) $\lambda_i \leq \mu_i - 1 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\mu_i - 1$, $d_{2i} = 2\lambda_i + 1$,

(i)' $\mu_i \geq \lambda_{i+1} - 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_i + 1$,

(ii)' $\mu_i = \lambda_{i+1} - 2 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_i + 2$, $d_{2i+1} = 2\mu_i + 2$,

(iii)' $\mu_i \leq \lambda_{i+1} - 3 \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_{i+1} - 3$, $d_{2i+1} = 2\mu_i + 3$.

容易に分る様に，$d_\tau = (d_i)$ は有限個の項を除いて 0 でありそれぞれの場合に G の nilpotent element の共役類を定める．そこで対応する nilpotent element を A_τ と表わす．

一方，$C_G(A_\tau) = Z_G(A_\tau)/Z_G^0(A_\tau)$ の linear character ϕ_τ を次の様に定める．

$$\phi_\tau(a_i) = \begin{cases} -1 & d_\tau \text{ における長さ } i \text{ の行が上の定義式の (iii) } (G=Sp_m)\text{, 又は (iii), (iii)}' \\ & (G=O_m) \text{ のある } d_j \text{ として表わされる時,} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

又、$G = O_m$ の場合は、ϕ_τ の $C_{G^\circ}(A_\tau)$ の上への制限を同様の記号で表わすものとする。その時、

<u>Theorem</u> 3.1.

(i) $G = Sp_{2n}$ 又は $G = SO_{2n+1}$ とする。partition pair $\tau = (\lambda, \mu)$ に対して (A_τ, ϕ_τ) を対応させる写像は G の Springer 表現を explicit に与える。即ち、(A_τ, ϕ_τ) に関する Springer 表現の指標を χ_{A_τ, ϕ_τ} とすれば、$\chi_{A_\tau, \phi_\tau} = \chi_\tau$ となる。

(ii) $G = SO_{2n}$ とする。$\tau = (\lambda, \mu)$, $\lambda \neq \mu$ の場合は (i) と同様、$\tau = (\lambda, \lambda)$ の場合は、$\phi_\tau = 1$ で $\chi_\tau = \tilde{\chi}_{A_1, 1} + \tilde{\chi}_{A_2, 1}$ となる。但し χ_τ は τ に対応する W_n の指標、A_i は A の SO_{2n} での共役類の代表元、$\tilde{\chi}_{A_i, 1}$ は $(A_i, 1)$ に対応する W_0 の Springer 表現の指標を表わすものとする。

<u>注意</u> 3.2. $G = SO_{2n}$ の場合、W_P への制限を考える関係上これ以上は決まらないが、$\tau = (\lambda, \lambda)$ の場合には、A_1, A_2 は共に parabolic type の nilpotent element になる。従って

Φ_i を A_i に対応する parabolic subgroup で決まる G の部分 root system とすると Hotta - Springer [4] により，Φ_i に対応する Macdonald 表現 μ_{Φ_i} により $\chi_{A_i,1} = \mathrm{sgn} \otimes \mu_{\Phi_i}$ と表わすことができる．従って，この場合にも identification は可能になる．

最後に $G = F_4$ の場合を扱う．§1 に述べた事から G の nilpotent element の P-共役類を決定し，その centralizer の次元を調べることによって $\mathcal{B}_4$ の既約成分を決定できる．(§1 に述べた例外の場合は，別に扱う必要がある)．それに対して条件 (Q) の成立することを調べ，C_3 の場合の結果を使えば F_4 の場合にも W_P への制限を決めることができる．F_4 の character table (T. Kondo [5]) によれば，W の既約指標は全て W_P への制限によって決まるから，これから identification が出来る．結果は表 I に示す通りである．表 I において第一列は，nilpotent element の共役類の代表元を表わし，第三列の既約指標 $\chi_{i,j}$ は F_4 の character table において degree i の j 番目の指標を表わす．但し，χ_4，χ_{12}，χ_{16} はそれぞれの degree の isolated character である．$A_3 + \tilde{A}_1$ の場合に下の記号は対応する $C(A) \simeq S_4$ の既約指標の表わす Young diagram を意味する．

表 I

F_4 の Springer 表現

A の type	C(A)	既約指標
ϕ	1	$\chi_{1,1}$
A_1	1	$\chi_{2,3}$
$\tilde{A}_1$	Z_2	$\chi_{4,1}$, $\chi_{2,1}$
$A_1+\tilde{A}_1$	1	$\chi_{9,1}$
A_2	Z_2	$\chi_{8,3}$, $\chi_{1,3}$
$\tilde{A}_2$	1	$\chi_{8,1}$
$A_2+\tilde{A}_1$	1	$\chi_{4,3}$
$A_1+\tilde{A}_2$	1	$\chi_{6,1}$
B_2	Z_2	$\chi_{9,3}$, χ_4
A_1+B_2	Z_2	χ_{16}, $\chi_{4,2}$
$A_3+\tilde{A}_1$	S_4	χ_{12}, $\chi_{9,2}$, $\chi_{6,2}$, $\chi_{1,2}$
B_3	1	$\chi_{8,2}$
C_3	1	$\chi_{8,4}$
C_3+A_1	Z_2	$\chi_{9,4}$, $\chi_{2,2}$
B_4	Z_2	$\chi_{4,4}$, $\chi_{2,4}$
F_4	1	$\chi_{1,4}$

References

[1] Borel, A et al. ; Seminar in algebraic groupes and related finite groups. Lecture Notes in Math. 131, Springer.

[2] Dynkin, E. B. ; Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. A. M. S. Translations (2) 6, (1957) 111 - 244.

[3] Hotta, R. and Shimomura, N. ; The fixed point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties and the Green functions — combinatorial and cohomological treatments centering GL_n. To appear

[4] Hotta, R and Springer, T. A. ; A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of Unitary groups. Inventiones Math. 41, (1977) 113 - 127.

[5] Kondo, T. ; The characters of the Weyl group of type F_4. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec I, 11 (1965) 145 - 153.

[6] Shoji, T. ; On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. To appear

[7] Shoji, T. ; On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4. To appear

[8] Spaltenstein, N. ; On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroup. To appear

[9] Spaltenstein, N. ; Sous groupes de Borel contenant un unipotent donné. To appear

[10] Springer, T. A. ; Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Inventiones Math. 36. (1976), 173 - 207.

[11] Srinivasan, B. ; Green polynomials of finite classical groups. Comm. in Algebra 5, (1977) 1241 - 1259.