

## 情報量規準による回帰モデルの選択

千葉大(理) 橋本 明浩 (理) 本多 正幸  
(工) 井上 隆勝 (理) 田栗 正章

**はじめに** 近年様々な分野で各種の情報量規準(以下IC)が使用されかなりの効果をあげている。ところがこのICのふるまいについてある程度考察が行なわれているものもあるが未知なものも多い。そこで線形重回帰モデルを対象としてICを用いるモデル選択(即ち重回帰分析に於ける変数選択)の数値実験を行ないその性質を数値的に検証するとともに理論的な考察をも加える。

**2. 評価の方式** 本来各ICはそれ固有の目的のために提案された統計量であって単に重回帰モデルの選択に際して一律にICを使用することは十分留意しなければならない。しかし一応我々はこの問題に以下のICを用いることにする。更にこの場合各ICに対して仮説検定と予測という2つの観点からの評価が存在する。従って一概に良悪は判定できないが与えられた評価方式下ではどのICがどの条件下でbetterであ

るかは議論することはできよう。そこで本報告では仮説検定の一観点として、各ICを用いてモデルの選択を行なった際に真のモデルを採択した割合（以下の中率）を評価基準とした。

### §3. 実験方法

#### 3-1 考察の対象とするモデル

線形回帰モデル;  $Y = X_{\theta} \beta_{\theta} + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_{nm})$

$$\text{但し } Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1m} \\ \vdots \\ y_{n1} \\ \vdots \\ y_{nm} \end{bmatrix} \quad X_{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{\theta 1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{11} & \dots & x_{\theta 1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{\theta n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{\theta n} \end{bmatrix} \quad \beta_{\theta} = \begin{bmatrix} \beta_{\theta} \\ \vdots \\ \beta_{\theta} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1m} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nm} \end{bmatrix}$$

$n$ : 異なるサンプル点数数  $m$ : 各サンプル点での繰返し数

#### 3-2 対象とするIC

1 CP0;  $CP0 = RSS_p / \sigma^2 + 2p - N$

2 CP1;  $CP1 = RSS_p / \hat{\sigma}_p^2 + 2p - N$

3 AIC;  $AIC = N \log RSS_p + 2p$

4 CAI;  $c\text{-AIC} = N \log RSS_p + \frac{2N(p+1)}{N-p-2}$

5 HAI;  $H\text{-AIC} = N \log RSS_p + \frac{2\hat{\sigma}_p^2}{RSS_p / N}$

6 BIC;  $BIC = N \log RSS_p + p \log N$

7 TIC;  $TIC = \frac{1}{N} Y^t (I_N - Q_p) Y +$

8 FST;  $F = \frac{Y^t Q_p Y / p}{Y^t (I_N - Q_p) Y / (N-p)}$

$2 \operatorname{tr} \left[ \left( \frac{1}{N} X_p^t X_p \right)^{-1} S_p \right]$

9 PSS;  $PSS = \sum_{\alpha=1}^N \left\{ (y_{\alpha} - \hat{y}_{\alpha}) / (1 - c_{\alpha}) \right\}^2$

$c_{\alpha}$ :  $\alpha$ -th diag. of  $Q_p$

ただし  $Q_p = X_p (X_p^t X_p)^{-1} X_p^t \quad N = m n$

$RSS_p = Y^t (I_N - Q_p) Y, \quad \hat{\sigma}_p^2 = RSS_p / (N-p) \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}_{\theta}^2 & (m=1) \\ \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / (m-1)n \end{cases}$

$S_p = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (y_{\alpha} x_{i\alpha} - \bar{y}_i \bar{x}_i) (y_{\alpha} x_{j\alpha} - \bar{y}_j \bar{x}_j)^2 \quad (i,j=1,\dots,p)$

\* (1); Mallows [2], (2) Akaike [1], (3) Sugiyama [5], (4) Schwarz [4]

(5); Taga [6] (6) Okuno [3]

3-3 対象とするモデル (仮説)

$TQ = 4$

	$X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$		$X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$
H(1):	1 0 0 0 0 0	H(2):	1 1 0 0 0 0
H(3):	1 0 1 0 0 0	H(4):	1 1 1 0 0 0
H(5):	1 0 0 1 0 0	H(6):	1 1 0 1 0 0
H(7):	1 0 1 1 0 0	*H(8):	1 1 1 1 0 0
H(9):	1 1 1 1 1 0	H(10):	1 1 1 1 0 1
H(11):	1 1 1 1 1 1	(TQ; 真のモデルの変数の数)	

[例]

H(3) は  $X_0, X_1$  をとりこんだモデル;  
 $y = \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$  を示す。

[註] 1. H(8) 以降は真のモデルを含むモデルを考察する。

2. 各モデルごとのICの値を計算し最小(Fは最大)値を与えるモデルを選択する。

3-4 実験したケース

①  $m=1, 4$       ②  $n=32$       ③  $TQ = 4, (3)$       ④  $q = 6$

⑤  $\sigma^2 = 1.0, 0.25, 0.01$       ⑥  $\beta^t = (1, \dots, 1)$

⑦  $X$ ; ( $\rho = 0.9, 0.3$ )       $X^t X = \begin{bmatrix} nm & 0 \\ 0 & \text{[斜線]} \end{bmatrix}$  の [斜線] 部分について

て以下  $X_{11} \sim X_{82}$  の15通り + 4通り

$TQ=4$

$X_{11} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$      $X_{21} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \rho \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ \rho & & & & & 1 \end{bmatrix}$      $X_{31} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \rho \end{bmatrix}$      $X_{41} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0.3 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0.3 & & & & & \rho \end{bmatrix}$

$X_{51} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & & & & \\ \rho & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \rho \end{bmatrix}$      $X_{61} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & & & & 0.3 \\ \rho & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0.3 & & & & & \rho \end{bmatrix}$      $X_{71} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & & & & \\ \rho & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \rho \end{bmatrix}$      $X_{81} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$

X 直交 (TQ=3)

X 非直交 (TQ=3)

X 直交 (TQ=4)

X 非直交 (TQ=4)

$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & & & & \\ 0.95 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & & & & \\ 0.95 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

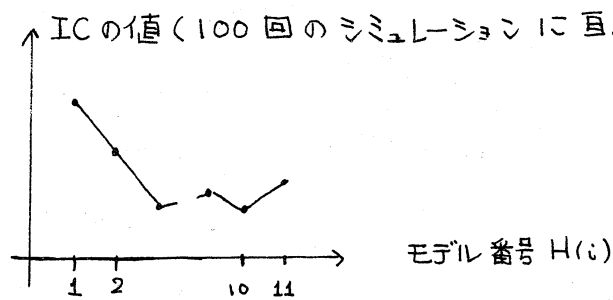
$X_{82} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & & & & 0.3 \\ 0.3 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0.3 & & & & & \rho \end{bmatrix}$

上各ケースについて100回のシミュレーションを行なう。

## §4 結果と考察

### 4-1 モデルの変化に対する IC の値の変化

100 回のシミュレーションに亘る各モデルごとの IC の平均を y 軸にモデル番号を x 軸にとると次のようなグラフ(パス)が得られる。



このパスについて次のことが報告できる。

①  $X^t X$  の変化に対して上記パスは本来  $X_{11} \sim X_{82}$  の 15 通りになるはずであるが、TIC を除いて次の 4 通りに分かれる。

Aタイプ;  $X_{11} \sim X_{41}, X_{22} \sim X_{42}$  の 7 通り

Bタイプ;  $X_{51}, X_{61}, X_{71}$  ( $\rho = 0.9$ ) の 3 通り

Cタイプ;  $X_{52}, X_{62}, X_{72}, X_{82}$  ( $\rho = 0.3$ ) の 4 通り

Dタイプ;  $X_{81}$  の 1 通り

▶ 理由;  $CPO$  を例にと、と考えると

$$CPO = \chi^2(N-p, \lambda^2) + 2p - N$$

ここに  $\chi^2(N-p, \lambda^2)$  は自由度  $N-p$ , 非心度  $\lambda^2$  の非心カイニ乗変数で  $\lambda^2 = \beta_{TQ}^t X_{TQ}^t (I_N - Q_p) X_{TQ} \beta_{TQ} / \sigma^2 = \begin{cases} 0 & (P \geq TQ) \\ X_{TQ} \text{ のみ依存} & (P < TQ) \end{cases}$

である。従、と  $H(i)$  の作り方より  $X_{TQ}$  へのみ依存する。

②  $m$  と  $\sigma^2$  に対する変化について

- $m$  の変化に対して、グラフ上のパスはほとんど不変である。

▷ 理由 1例として AIC で考えれば、 $m=1$  での AIC は

$$AIC = n \log RSS_p + 2p \quad \text{また } m=4 \text{ では}$$

$$AIC \doteq 4n \log 4RSS_p + 2p = 4n \log RSS_p + 2p + 8n \log 2$$

故に、 $m=4$  の AIC は  $m=1$  の AIC のほぼ一次式であるから Auto-Scaling の為にグラフ的には、ほとんど重なってしまう。

- $\sigma^2$  に対しても概形は類似している。

▷ 理由 今  $E\{\chi^2(N-p, \lambda^2)\} = N-p + \lambda^2$  であるから

$$E\{CPO(\sigma^2=1)\} = \lambda^2 + p, \quad E\{CPO(\sigma^2=0.01)\} = 100\lambda^2 + p$$

また  $p \ll \lambda^2$  により、上と同種の議論となる。

(特に CPO, CP1, PSS は類似度が高い。)

③ IC に対して 4 種類のタイプ;

Ⓐ CPO, CP1, PSS のように RSS をもとにした形、

Ⓑ AIC, CAI, BIC, HAI のように  $N \log RSS$  をもとにした形

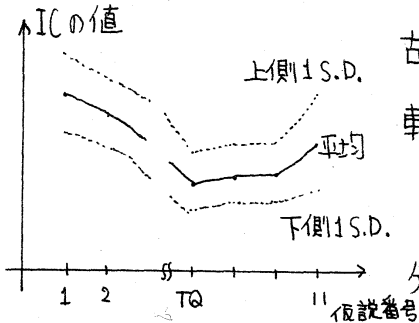
とそれ以外の Ⓒ FST Ⓓ TIC と 分かれる。

▷ 理由  $+2p$  部分が第 1 項に比べて小さい為である。

④ パスのふらつきが、TQ をこえたところで AIC, CPO, etc では生じる。 これが的中率を下げているようである。

▷ 理由 例えば TQ をこえた CPO について  $V\{CPO\} = 2(N-p)$

である。従ってCPOは $\sqrt{N}$ のオーダーで変化することになる。



故に、定数部 + 2p の寄与があまり比較する際にきかなくなるからである。

またTQをこえた平均パスの傾きと

分散について実験的に次が成立している

ことがわかった。

	AIC	PSS	TIC
傾き	ゆるやか	ゆるやか	急
分散	大	小	大

#### 4-2 的中率について (付表I,II)

概括として No.2 X51~X81 ( $m=1$ , 相関: 大の<sup>2</sup>:大) という条件の良くない場合に於いては、どのICも的中率は低くなっている。

・ また各IC別に次のことがわかった。

##### 4-2-1 CPO, CP1, AIC, CAI, HAI, BIC について.

① BICはサンプル数が増えるとのち中率は高くなるが、他のICでは逆に下ることもある。

▷理由  $P_1 \equiv P_1$  { 真のモデルを含むモデルを選択 }  
 $P_2 \equiv P_2$  { 含まれるモデルを選択 }

とし、BICについてこれを評価してやれば、 $N \rightarrow \infty$  のとき

$P_1 \rightarrow 0$ ,  $P_2 \rightarrow 0$  となることがわかる。即ち、BICによる選択は一致性を有している。

② 真のモデルを含むモデルを選択し、真のモデルに含まれるモデルを選択することは No.2 X51~X81 を除き極めて少ない。

▷ 理由 例えば CP1, X11 で  $r_i \leq P_r\{H(i)\}$  を選択} とすると

$N \rightarrow \infty$  のとき (TQ = 4)

$$r_i \rightarrow 0 \quad (i < 8) \quad r_8 \rightarrow \alpha^2 \doteq 0.71 \quad r_i \rightarrow \alpha(1-\alpha) \doteq 0.13 \quad (i=9, 10)$$

$$r_{11} \rightarrow (1-\alpha)^2 \doteq 0.025 \quad (\text{但し } \alpha \doteq 0.843) \quad \text{で } P_2 \rightarrow 0, P_1 \rightarrow 0.29$$

③ No.2 の X51~X81 を除き的中率は  $\sigma^2$  の値に依存していない。

▷ 理由 H(8)以降のみ考える場合、例えば CP0 の大小比較は  $\chi^2$  変数の大小比較と同値である又、AIC の大小比較は  $\log \chi^2$  の大小比較と同値となる故である。

#### 4-2-2 TIC, FST について

① 実験的であるが TIC は真のモデルに含まれるモデルを選択する傾向がある。

② FST はこの数値実験の範囲内では的中率は極めて高い。

以上の①, ②について理由はまだ不明である。

#### 4-2-3 PSS について

① No.2 の X51~X81 の場合を除き 的中率は  $\sigma^2$  に依存しない。

理由はまだ不明である。

表 I

THE RATES OF SELECTING THE TRUE MODEL

No.	$\sigma^2$	m	$\rho$	X	CPO	CPL	AIC	CAI	HAI	BIC	TIC	FST	PSS	
1	1.00	4	0.00	X11	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	62 <sup>38</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	82 <sup>18</sup>	100	61 <sup>39</sup>	
				X21	67 <sup>33</sup>	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	67 <sup>33</sup>	69 <sup>31</sup>	93 <sup>7</sup>	74 <sup>26</sup>	100	61 <sup>39</sup>	
				X31	79 <sup>21</sup>	74 <sup>26</sup>	73 <sup>27</sup>	76 <sup>24</sup>	78 <sup>22</sup>	96 <sup>4</sup>	82 <sup>18</sup>	100	73 <sup>27</sup>	
				X41	71 <sup>29</sup>	71 <sup>29</sup>	69 <sup>31</sup>	71 <sup>29</sup>	72 <sup>28</sup>	95 <sup>5</sup>	74 <sup>26</sup>	100	73 <sup>27</sup>	
			X51	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	63 <sup>37</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	100 <sup>0</sup>	93 <sup>7</sup>	61 <sup>39</sup>		
			X61	68 <sup>32</sup>	69 <sup>31</sup>	69 <sup>31</sup>	69 <sup>31</sup>	70 <sup>30</sup>	92 <sup>8</sup>	100 <sup>0</sup>	94 <sup>6</sup>	66 <sup>34</sup>		
			X71	79 <sup>21</sup>	74 <sup>26</sup>	73 <sup>27</sup>	76 <sup>24</sup>	78 <sup>22</sup>	96 <sup>4</sup>	100 <sup>0</sup>	93 <sup>7</sup>	73 <sup>27</sup>		
			X81	67 <sup>33</sup>	71 <sup>29</sup>	70 <sup>30</sup>	73 <sup>27</sup>	72 <sup>28</sup>	91 <sup>9</sup>	100 <sup>0</sup>	99 <sup>1</sup>	65 <sup>35</sup>		
	0.30	X22	68 <sup>32</sup>	70 <sup>30</sup>	69 <sup>31</sup>	70 <sup>30</sup>	72 <sup>28</sup>	93 <sup>7</sup>	73 <sup>27</sup>	100	64 <sup>36</sup>			
		X32	71 <sup>29</sup>	67 <sup>33</sup>	66 <sup>34</sup>	69 <sup>31</sup>	68 <sup>32</sup>	95 <sup>5</sup>	82 <sup>18</sup>	100	66 <sup>34</sup>			
		X42	57 <sup>43</sup>	57 <sup>43</sup>	55 <sup>45</sup>	58 <sup>42</sup>	59 <sup>41</sup>	83 <sup>17</sup>	73 <sup>27</sup>	100	56 <sup>44</sup>			
		X52	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	63 <sup>37</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	97 <sup>3</sup>	100	61 <sup>39</sup>			
		X62	69 <sup>31</sup>	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	70 <sup>30</sup>	69 <sup>31</sup>	92 <sup>8</sup>	94 <sup>6</sup>	100	64 <sup>36</sup>			
		X72	71 <sup>29</sup>	67 <sup>33</sup>	66 <sup>34</sup>	69 <sup>31</sup>	68 <sup>32</sup>	95 <sup>5</sup>	97 <sup>3</sup>	100	66 <sup>34</sup>			
		X82	68 <sup>32</sup>	67 <sup>33</sup>	67 <sup>33</sup>	70 <sup>30</sup>	70 <sup>30</sup>	95 <sup>5</sup>	4555	100	65 <sup>35</sup>			
		2	1	1	0.00	X11	73 <sup>27</sup>	70 <sup>30</sup>	67 <sup>33</sup>	79 <sup>21</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	77 <sup>21</sup>	2
X21	68 <sup>32</sup>					67 <sup>33</sup>	65 <sup>35</sup>	75 <sup>25</sup>	78 <sup>22</sup>	80 <sup>20</sup>	72 <sup>27</sup>	1	93 <sup>7</sup>	58 <sup>42</sup>
X31	78 <sup>22</sup>					75 <sup>25</sup>	71 <sup>29</sup>	82 <sup>18</sup>	85 <sup>15</sup>	85 <sup>15</sup>	77 <sup>21</sup>	2	95 <sup>5</sup>	66 <sup>34</sup>
X41	73 <sup>27</sup>					75 <sup>25</sup>	72 <sup>28</sup>	85 <sup>15</sup>	87 <sup>13</sup>	87 <sup>13</sup>	69 <sup>30</sup>	1	95 <sup>5</sup>	71 <sup>29</sup>
X51	50 <sup>27</sup>				47 <sup>29</sup>	48 <sup>32</sup>	34 <sup>18</sup>	36 <sup>18</sup>	45 <sup>16</sup>	100 <sup>0</sup>	96 <sup>2</sup>	2	31 <sup>27</sup>	
X61	55 <sup>25</sup>				49 <sup>24</sup>	51 <sup>32</sup>	35 <sup>17</sup>	38 <sup>17</sup>	47 <sup>15</sup>	100 <sup>0</sup>	99 <sup>1</sup>	2	33 <sup>27</sup>	
X71	55 <sup>22</sup>				53 <sup>23</sup>	52 <sup>28</sup>	34 <sup>14</sup>	36 <sup>13</sup>	46 <sup>11</sup>	100 <sup>0</sup>	95 <sup>2</sup>	3	31 <sup>28</sup>	
X81	52 <sup>18</sup>				46 <sup>23</sup>	40 <sup>23</sup>	66 <sup>17</sup>	69 <sup>16</sup>	77 <sup>12</sup>	100 <sup>0</sup>	100 <sup>0</sup>	5	52 <sup>20</sup>	
0.30	X22		71 <sup>29</sup>	74 <sup>26</sup>	71 <sup>29</sup>	81 <sup>19</sup>	84 <sup>16</sup>	84 <sup>16</sup>	60 <sup>39</sup>	1	94 <sup>6</sup>	55 <sup>45</sup>		
	X32		67 <sup>33</sup>	70 <sup>30</sup>	64 <sup>36</sup>	75 <sup>25</sup>	81 <sup>19</sup>	81 <sup>19</sup>	75 <sup>19</sup>	6	94 <sup>6</sup>	56 <sup>44</sup>		
	X42		73 <sup>27</sup>	74 <sup>26</sup>	69 <sup>31</sup>	81 <sup>19</sup>	82 <sup>18</sup>	82 <sup>18</sup>	60 <sup>40</sup>	19	94 <sup>5</sup>	57 <sup>43</sup>		
	X52		73 <sup>27</sup>	70 <sup>30</sup>	67 <sup>33</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	97 <sup>2</sup>	1	96 <sup>4</sup>	53 <sup>47</sup>		
	X62		72 <sup>28</sup>	69 <sup>31</sup>	69 <sup>31</sup>	82 <sup>18</sup>	83 <sup>17</sup>	83 <sup>17</sup>	92 <sup>8</sup>	97 <sup>3</sup>	3	56 <sup>44</sup>		
	X72		67 <sup>33</sup>	70 <sup>30</sup>	64 <sup>36</sup>	75 <sup>25</sup>	81 <sup>19</sup>	81 <sup>19</sup>	97 <sup>3</sup>	94 <sup>6</sup>	56 <sup>44</sup>			
	X82		72 <sup>28</sup>	67 <sup>33</sup>	65 <sup>35</sup>	83 <sup>17</sup>	87 <sup>17</sup>	86 <sup>14</sup>	58 <sup>42</sup>	2	93 <sup>5</sup>	64 <sup>36</sup>		
	3		0.25	4	0.00	X11	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	62 <sup>38</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	21 <sup>79</sup>	100
X21		67 <sup>33</sup>				65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	67 <sup>33</sup>	69 <sup>31</sup>	93 <sup>7</sup>	14 <sup>86</sup>	100	61 <sup>39</sup>	
X31		79 <sup>21</sup>				74 <sup>26</sup>	73 <sup>27</sup>	76 <sup>24</sup>	78 <sup>22</sup>	96 <sup>4</sup>	21 <sup>79</sup>	100	73 <sup>27</sup>	
X41		71 <sup>29</sup>				71 <sup>29</sup>	69 <sup>31</sup>	71 <sup>29</sup>	72 <sup>28</sup>	95 <sup>5</sup>	14 <sup>86</sup>	100	73 <sup>27</sup>	
X51		65 <sup>35</sup>			64 <sup>36</sup>	63 <sup>37</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	100 <sup>0</sup>	199	61 <sup>39</sup>		
X61		68 <sup>32</sup>			69 <sup>31</sup>	69 <sup>31</sup>	69 <sup>31</sup>	70 <sup>30</sup>	93 <sup>7</sup>	100 <sup>0</sup>	298	66 <sup>34</sup>		
X71		79 <sup>21</sup>			74 <sup>26</sup>	73 <sup>27</sup>	76 <sup>24</sup>	78 <sup>22</sup>	96 <sup>4</sup>	100 <sup>0</sup>	199	73 <sup>27</sup>		
X81		67 <sup>33</sup>			71 <sup>29</sup>	79 <sup>21</sup>	73 <sup>27</sup>	73 <sup>27</sup>	95 <sup>5</sup>	100 <sup>0</sup>	8	92	65 <sup>35</sup>	
0.30		X22	68 <sup>32</sup>	70 <sup>30</sup>	69 <sup>31</sup>	70 <sup>30</sup>	72 <sup>28</sup>	93 <sup>7</sup>	14 <sup>86</sup>	100	64 <sup>36</sup>			
		X32	71 <sup>29</sup>	67 <sup>33</sup>	66 <sup>34</sup>	69 <sup>31</sup>	68 <sup>32</sup>	95 <sup>5</sup>	21 <sup>79</sup>	100	66 <sup>34</sup>			
		X42	57 <sup>43</sup>	57 <sup>43</sup>	55 <sup>45</sup>	58 <sup>42</sup>	59 <sup>41</sup>	83 <sup>17</sup>	14 <sup>86</sup>	100	56 <sup>44</sup>			
		X52	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	63 <sup>37</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	80 <sup>20</sup>	100	61 <sup>39</sup>			
		X62	69 <sup>31</sup>	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	70 <sup>30</sup>	69 <sup>31</sup>	92 <sup>8</sup>	98 <sup>2</sup>	100	64 <sup>36</sup>			
		X72	71 <sup>29</sup>	67 <sup>33</sup>	66 <sup>34</sup>	69 <sup>31</sup>	68 <sup>32</sup>	95 <sup>5</sup>	80 <sup>20</sup>	100	66 <sup>34</sup>			
		X82	68 <sup>32</sup>	67 <sup>33</sup>	67 <sup>33</sup>	70 <sup>30</sup>	70 <sup>30</sup>	95 <sup>5</sup>	79 <sup>3</sup>	100	65 <sup>35</sup>			
		4	1	1	0.00	X11	73 <sup>27</sup>	70 <sup>30</sup>	67 <sup>33</sup>	79 <sup>21</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	65 <sup>35</sup>	96 <sup>4</sup>
X21	68 <sup>32</sup>					67 <sup>33</sup>	65 <sup>35</sup>	75 <sup>25</sup>	78 <sup>22</sup>	80 <sup>20</sup>	50 <sup>50</sup>	96 <sup>4</sup>	58 <sup>42</sup>	
X31	78 <sup>22</sup>					75 <sup>25</sup>	71 <sup>29</sup>	82 <sup>18</sup>	85 <sup>15</sup>	85 <sup>15</sup>	65 <sup>35</sup>	96 <sup>4</sup>	66 <sup>34</sup>	
X41	73 <sup>27</sup>					75 <sup>25</sup>	72 <sup>28</sup>	85 <sup>15</sup>	87 <sup>13</sup>	87 <sup>13</sup>	44 <sup>56</sup>	97 <sup>3</sup>	71 <sup>29</sup>	
X51	73 <sup>27</sup>				70 <sup>30</sup>	66 <sup>34</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	100 <sup>0</sup>	12	85 <sup>3</sup>	53 <sup>47</sup>	
X61	72 <sup>28</sup>				71 <sup>29</sup>	67 <sup>33</sup>	81 <sup>19</sup>	82 <sup>18</sup>	82 <sup>18</sup>	100 <sup>0</sup>	10	88 <sup>2</sup>	53 <sup>47</sup>	
X71	78 <sup>22</sup>				76 <sup>24</sup>	70 <sup>30</sup>	82 <sup>18</sup>	85 <sup>15</sup>	85 <sup>15</sup>	100 <sup>0</sup>	12	84 <sup>4</sup>	66 <sup>34</sup>	
X81	60 <sup>40</sup>				63 <sup>37</sup>	58 <sup>42</sup>	17 <sup>27</sup>	17 <sup>22</sup>	27 <sup>21</sup>	100 <sup>0</sup>	4	56 <sup>4</sup>	58 <sup>42</sup>	
0.30	X22		71 <sup>29</sup>	74 <sup>26</sup>	71 <sup>29</sup>	81 <sup>19</sup>	84 <sup>16</sup>	84 <sup>16</sup>	44 <sup>56</sup>	96 <sup>4</sup>	55 <sup>45</sup>			
	X32		67 <sup>33</sup>	70 <sup>30</sup>	64 <sup>36</sup>	75 <sup>25</sup>	81 <sup>19</sup>	81 <sup>19</sup>	65 <sup>35</sup>	96 <sup>4</sup>	56 <sup>44</sup>			
	X42		73 <sup>27</sup>	74 <sup>26</sup>	69 <sup>31</sup>	81 <sup>19</sup>	82 <sup>18</sup>	82 <sup>18</sup>	44 <sup>56</sup>	96 <sup>4</sup>	57 <sup>43</sup>			
	X52		73 <sup>27</sup>	70 <sup>30</sup>	67 <sup>33</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	93 <sup>7</sup>	96 <sup>4</sup>	53 <sup>47</sup>			
	X62		72 <sup>28</sup>	69 <sup>31</sup>	69 <sup>31</sup>	82 <sup>18</sup>	83 <sup>17</sup>	83 <sup>17</sup>	93 <sup>7</sup>	98 <sup>2</sup>	56 <sup>44</sup>			
	X72		67 <sup>33</sup>	70 <sup>30</sup>	64 <sup>36</sup>	75 <sup>25</sup>	81 <sup>19</sup>	81 <sup>19</sup>	93 <sup>7</sup>	95 <sup>5</sup>	56 <sup>44</sup>			
	X82		72 <sup>28</sup>	67 <sup>33</sup>	65 <sup>35</sup>	83 <sup>17</sup>	87 <sup>13</sup>	86 <sup>14</sup>	31 <sup>69</sup>	95 <sup>5</sup>	64 <sup>36</sup>			



THE RATES OF SELECTING THE TRUE MODEL

No.	$\sigma^2$	m	$\rho$	X	CP0	CPI	AIC	CAI	HAI	BIC	TIC	FST	PSS				
5	0.01	4	0.00	X11	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	62 <sup>38</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	100	100	61 <sup>39</sup>				
				X21	67 <sup>33</sup>	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	67 <sup>33</sup>	69 <sup>31</sup>	93 <sup>7</sup>	100	100	61 <sup>39</sup>				
				X31	79 <sup>21</sup>	74 <sup>26</sup>	73 <sup>27</sup>	76 <sup>24</sup>	78 <sup>22</sup>	96 <sup>4</sup>	100	100	73 <sup>27</sup>				
				X41	71 <sup>29</sup>	71 <sup>29</sup>	69 <sup>31</sup>	71 <sup>29</sup>	72 <sup>28</sup>	95 <sup>5</sup>	100	100	73 <sup>27</sup>				
				X51	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	63 <sup>37</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	1000	100	61 <sup>39</sup>				
				X61	68 <sup>32</sup>	69 <sup>31</sup>	69 <sup>31</sup>	69 <sup>31</sup>	70 <sup>30</sup>	93 <sup>7</sup>	1000	100	66 <sup>34</sup>				
				X71	79 <sup>21</sup>	74 <sup>26</sup>	73 <sup>27</sup>	76 <sup>24</sup>	78 <sup>22</sup>	96 <sup>4</sup>	1000	100	73 <sup>27</sup>				
				X81	67 <sup>33</sup>	71 <sup>29</sup>	70 <sup>30</sup>	73 <sup>27</sup>	73 <sup>27</sup>	95 <sup>5</sup>	1000	100	65 <sup>35</sup>				
				0.30	X22	68 <sup>32</sup>	70 <sup>30</sup>	69 <sup>31</sup>	70 <sup>30</sup>	72 <sup>28</sup>	93 <sup>7</sup>	100	100	64 <sup>36</sup>			
			X32		71 <sup>29</sup>	67 <sup>33</sup>	66 <sup>34</sup>	69 <sup>31</sup>	68 <sup>32</sup>	95 <sup>5</sup>	100	100	66 <sup>34</sup>				
			X42		57 <sup>43</sup>	57 <sup>43</sup>	55 <sup>45</sup>	58 <sup>42</sup>	59 <sup>41</sup>	83 <sup>17</sup>	100	100	56 <sup>44</sup>				
			X52		65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	63 <sup>37</sup>	66 <sup>34</sup>	65 <sup>35</sup>	92 <sup>8</sup>	199	100	61 <sup>39</sup>				
			X62		69 <sup>31</sup>	65 <sup>35</sup>	64 <sup>36</sup>	70 <sup>30</sup>	69 <sup>31</sup>	92 <sup>8</sup>	1000	100	64 <sup>36</sup>				
			X72		71 <sup>29</sup>	67 <sup>33</sup>	66 <sup>34</sup>	69 <sup>31</sup>	68 <sup>32</sup>	95 <sup>5</sup>	199	100	66 <sup>34</sup>				
			X82		68 <sup>32</sup>	67 <sup>33</sup>	67 <sup>33</sup>	70 <sup>30</sup>	70 <sup>30</sup>	95 <sup>5</sup>	100	100	65 <sup>35</sup>				
			6			1	0.00	X11	73 <sup>27</sup>	70 <sup>30</sup>	67 <sup>33</sup>	79 <sup>21</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	100	96 <sup>4</sup>	53 <sup>47</sup>
								X21	68 <sup>32</sup>	67 <sup>33</sup>	65 <sup>35</sup>	75 <sup>25</sup>	78 <sup>22</sup>	80 <sup>20</sup>	100	97 <sup>3</sup>	58 <sup>42</sup>
				X31				78 <sup>22</sup>	75 <sup>25</sup>	71 <sup>29</sup>	82 <sup>18</sup>	85 <sup>15</sup>	85 <sup>15</sup>	100	96 <sup>4</sup>	66 <sup>34</sup>	
X41	73 <sup>27</sup>	75 <sup>25</sup>		72 <sup>28</sup>				85 <sup>15</sup>	87 <sup>13</sup>	87 <sup>13</sup>	100	98 <sup>2</sup>	71 <sup>29</sup>				
X51	73 <sup>27</sup>	70 <sup>30</sup>		66 <sup>34</sup>				80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	1000	96 <sup>4</sup>	53 <sup>47</sup>				
X61	72 <sup>28</sup>	71 <sup>29</sup>		67 <sup>33</sup>				81 <sup>19</sup>	82 <sup>18</sup>	82 <sup>18</sup>	1000	98 <sup>2</sup>	53 <sup>47</sup>				
X71	78 <sup>22</sup>	76 <sup>24</sup>		70 <sup>30</sup>				82 <sup>18</sup>	85 <sup>15</sup>	85 <sup>15</sup>	1000	96 <sup>4</sup>	66 <sup>34</sup>				
X81	60 <sup>40</sup>	63 <sup>37</sup>		58 <sup>42</sup>				73 <sup>27</sup>	78 <sup>22</sup>	79 <sup>21</sup>	1000	96 <sup>4</sup>	58 <sup>42</sup>				
0.30	X22	71 <sup>29</sup>		74 <sup>26</sup>				71 <sup>29</sup>	81 <sup>19</sup>	84 <sup>16</sup>	84 <sup>16</sup>	100	96 <sup>4</sup>	55 <sup>45</sup>			
	X32	67 <sup>33</sup>		70 <sup>30</sup>			64 <sup>36</sup>	75 <sup>25</sup>	81 <sup>19</sup>	81 <sup>19</sup>	100	96 <sup>4</sup>	56 <sup>44</sup>				
	X42	73 <sup>27</sup>		74 <sup>26</sup>			69 <sup>31</sup>	81 <sup>19</sup>	82 <sup>18</sup>	82 <sup>18</sup>	100	96 <sup>4</sup>	57 <sup>43</sup>				
	X52	73 <sup>27</sup>		70 <sup>30</sup>			67 <sup>33</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	80 <sup>20</sup>	6337	96 <sup>4</sup>	53 <sup>47</sup>				
	X62	72 <sup>28</sup>		69 <sup>31</sup>			69 <sup>31</sup>	82 <sup>18</sup>	83 <sup>17</sup>	83 <sup>17</sup>	1000	100	56 <sup>44</sup>				
	X72	67 <sup>33</sup>		70 <sup>30</sup>			64 <sup>36</sup>	75 <sup>25</sup>	81 <sup>19</sup>	81 <sup>19</sup>	6337	96 <sup>4</sup>	56 <sup>44</sup>				
	X82	72 <sup>28</sup>		67 <sup>33</sup>			65 <sup>35</sup>	83 <sup>17</sup>	87 <sup>17</sup>	86 <sup>14</sup>	100	96 <sup>4</sup>	64 <sup>36</sup>				
	TQ=3,4																
	0-30	1.00		4			0.00	ORT.	33 <sup>67</sup>	32 <sup>68</sup>	32 <sup>68</sup>	33 <sup>67</sup>	35 <sup>65</sup>	49 <sup>51</sup>	298	196 <sup>3</sup>	32 <sup>68</sup>
0-31	0.95						NON.	231 <sup>67</sup>	230 <sup>68</sup>	230 <sup>68</sup>	231 <sup>67</sup>	233 <sup>65</sup>	842 <sup>50</sup>	1000	1000	230 <sup>68</sup>	
0-40	4	4	0.00	ORT.	33 <sup>67</sup>	32 <sup>68</sup>	32 <sup>68</sup>	33 <sup>67</sup>	35 <sup>65</sup>	49 <sup>51</sup>	199	197 <sup>3</sup>	32 <sup>68</sup>				
0-41			0.95	NON.	231 <sup>67</sup>	230 <sup>68</sup>	230 <sup>68</sup>	231 <sup>67</sup>	233 <sup>65</sup>	842 <sup>50</sup>	1000	1000	230 <sup>68</sup>				

【註】 右肩の文字は真のモデルを含むモデルを選択した割合、左肩の文字は真のモデルに含まれるモデルを選択した割合。  
参 考 文 献

- [1] Akaike. H. (1970) A.I.S.M. 22. p203
- [2] Mallows. C.L. (1973) Tech. 15. p661
- [3] Okuno. T. et al. (1976) 続多変量解析法 日科技連
- [4] Schwarz. G. (1978) A.S. 6.(2) p461~
- [5] Sugiura. N. (1978) Commun.S. A7.(1) p13~
- [6] Taga. Y. (1978) 統計的推論 山海堂