

3次元多様体

Poincaré 予想を中心として (報告)

神戸大	養	池田	裕司	
神戸大	理	鈴木	晋一	
相模工大		津久井	康之	
大阪市大	理	丸本	嘉彦	
東洋大	工	山下	正勝	
上智大	理工	横山	和夫	
記録	近畿大	養	浅野	孝平
	筑波大	数	金戸	武司

Poincaré 予想の解決を大きな目標として、3次元多様体の研究が最近また活発になってきました。しかしこれ迄に何層かあった Poincaré ブームとは違って、実に地道で堅実な研究がなされている感じがします。本共同研究集会所が計画された段階で、「我々の研究の刺激にもなり、勉強にもなるだろう」との判断のもとに、この際「Poincaré 予想についてこれ迄の成果をまとめてみよう」ということになりました。ところで数人が分担して取りかかりましたが、Poincaré 予想の性格上

部分的な結果が出し難く、また我々の力不足・勉強不足もあって〈カッコイイ〉報告書を作るまでにはいきませんでした。そんなわけで、報告者には、その報告のスタイル・内容等は一切の制限を設けず自由に話してもらうこととし、浅野・金戸両氏に記録をお願いし、それを基に鈴木がまとめて報告書を作ることになりました。5つの報告は、それぞれ報告者の個性あふれる楽しいもので、それらをもとに会場でも夜の酒場で活発な討論がなされました。が残念ながらここに全てを述べることはできず、順序等も無視して要点のみを記すことに致します。何かの御参考になれば幸いです。尚蛇足をから、Bing [A1], Haken [A2], Hempel [A3, Chap.14] に大家による報告がありますので、不足分を補って下さい。

§0. Notation など.

次の記法を用いる:

\mathbb{R}^n : n 次元ユークリッド空間,

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$: n 次元球体,

$S^{n-1} = \partial D^n$: $(n-1)$ 次元球面.

$I = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid 0 \leq x \leq 1\}$: 単位閉区間.

特に、 D^2 およびその同相像を 円板, D^3 およびその同相像を 球体, S^1 の同相像を 単純閉曲線, I の同相像を 単純弧 と呼ぶ.

その他、集合論・位相空間論・代数的位相幾何学等で普通に用いられる記法については、特にことわりなく用いる。

曲面で2次元多様体を示す。

多様体は、特別なことわりが無く、すべてコンパクトで向き付け可能な n 次元多様体を意味するものとし、必要あればいつでも向きを適当に1つ与えて有向とする。多様体 M について、 $\partial M = \emptyset$ ならば閉多様体、 $\partial M \neq \emptyset$ ならば境界付多様体と呼ぶ。もちろん三角形分割をしてPL多様体として扱おうが、必要のない限り分割による複体と、もとの多様体を区別しない。

PL位相幾何学の基本的な定理および基本的な取扱については既知のものとする（[A10], [A11]等を参照）。また多様体の基本的定理については[A3]を参照されたい。

PC (Poincaré予想): M を閉多様体とする。もし $\pi_1(M) = \{1\}$ ならば、 $M \cong S^3$ (同相)。 [A8].

BC (Ball予想): M を境界付多様体とする。もし $\pi_1(M) = \{1\}$ でかつ $\partial M \cong S^2$ ならば、 $M \cong D^3$.

明らかに $PC \iff BC$ である。

§1. Heegaard-分解・Heegaard-図式

1.1 定義: 境界付多様体 V が、種数 g のハンドル体である

とは、

$$V \cong (D^2 \times S^1) \natural \cdots \natural (D^2 \times S^1) \quad (g \text{ 個の境界連結和})$$

のときをいう。特に種数 0 のハンドル体は D^3 を意味するものとする。

閉多様体 M の 種数 g の Heegaard-分解 (以後略して H-分解)

とは、次のような M の表現である:

$$M = V_g \cup W_g, \quad V_g \cap W_g = \partial V_g = \partial W_g \equiv F_g$$

$$V_g \cong W_g: \text{種数 } g \text{ のハンドル体.}$$

特に F_g のことを Heegaard-曲面 (以後略して H-曲面) と呼ぶ。この分解を、必要に応じて、 $(M; V_g, W_g; F_g)$, $(M; F_g)$ などと記す。

2 つの H-分解 $(M; F_g)$ と $(M; F'_g)$ が 同値 である, $(M; F_g) \cong (M; F'_g)$ を示す, とは、

$$\text{同相写像 } h: M \rightarrow M, \quad h(F_g) = F'_g$$

が存在するときとする。その他、いくつかの '同値' が考えられるが、それらについては [B1] を参照されたい。

種数 1 の H-分解を持つ閉多様体を レンズ空間 と呼ぶ。レンズ空間は完全に分類されているので、次が得られる:

- 1.2. PC** \iff 単連結な閉多様体は種数 0 の H-分解を持つ (?)
 \iff 単連結な閉多様体は種数 1 の H-分解を持つ (?).

次は S^3 の H-分解を特徴付ける重要定理である。

1.3 定理 [B25]: $(S^3; F_g), (S^3; F'_g)$ を S^3 の種数 g の H-分解とすれば、 $(S^3; F_g) \cong (S^3; F'_g)$ である。□

この意味で、 S^3 の H-分解はすべて標準的とみなせる。以後 $(S^3; T_g)$ を S^3 の標準的な種数 g の H-分解を表わす。

1.4 注意: 上の定理 1.3 に相当する定理は、一般の閉多様体については必ずしも成立しない。[B8], [B5], [E22] etc. □

M, M' を 2 つの閉多様体とするとき、連結和 $M \# M'$ が考えられる [A4]。ところで $(M; F), (M'; F')$ をそれぞれ H-分解とすれば、 $M \# M'$ の H-分解 $(M \# M'; F \# F')$ が自然に得られる。 $M \# S^3 \cong M$ だから、任意の H-分解 $(M; F_g)$ に対して、 M の H-分解 $(M; F_g \# T_n)$, $n \in \mathbb{N}$, が得られる。

1.5 定理 [B20], [B21], [B6]: $(M; F_g), (M; F_{g'})$ を閉多様体 M の H-分解とすれば、 $s, s' \in \mathbb{N}$, $g+s = g'+s'$, が存在し、任意の $n \in \mathbb{N}$ について次が成立する:

$$(M; F_g \# T_{s+n}) \cong (M; F_{g'} \# T_{s'+n}). \quad \square$$

1.6 定義: V を種数 $g > 0$ のハンドル体とする。単純閉曲線 $a \subset \partial V$ が V の m線 (meridian) であるとは、 $a \simeq 1$ in V で $\partial V - a$ が連結のときをいう。Loop 定理より、proper を円板 $A \subset V$ が存在し、 $\partial A = a$ とする。このような A を m円板 (meridian disk) と呼ぶ; $Cl(V - N(A; V))$ は種数 $g-1$ のハンドル体である。互いに素な g 本の m線の集まり $\tilde{\alpha} = a_1 \cup \dots \cup a_g$ が V の 完

全 m 線系とは, $\partial V - \{a_1 \cup \dots \cup a_g\}$ が連結なときをいう。更に、互いに素な V の $g+1$ 個の m 線系の集まり $\tilde{\alpha}^\# = a_1 \cup \dots \cup a_g \cup a_{g+1}$ が V の 拡大完全 m 線系とは, $\tilde{\alpha}^\#$ の任意 g 個の集まりが V の完全 m 線系となるときをいう。このような完全 m 線系 $\tilde{\alpha}$ および拡大完全 m 線系 $\tilde{\alpha}^\#$ に対し, それぞれ互いに素な g 個, $g+1$ 個の m 円板の集まり $\mathcal{A} = A_1 \cup \dots \cup A_g$, $\mathcal{A}^\# = A_1 \cup \dots \cup A_g \cup A_{g+1}$, $\partial A_i = a_i$, が存在する。このような m 円板の集まりをそれぞれ 完全 m 円板系, 拡大完全 m 円板系と呼ぶ; $Cl(V - N(\mathcal{A}; V)) \cong \mathbb{D}^3$.

1.7 定理 [C18], [C11], [C22]: V を種数 g のハンドル体, $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\alpha}'$ と共に V の完全 m 線系とすれば, 同相写像 $h: V \rightarrow V$, $h(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}'$, が存在する。□

1.8 定義: ところで定理 1.7 の [C18] の証明は Loop 定理によるが, [C22] の証明は次に定義する band-sum による初等的なものである。 $\tilde{\alpha} = x_1 \cup \dots \cup x_m$ を種数 g の可向閉曲面 F_g 上の互いに素な単純閉曲線系とし, $\alpha \subset F_g$ は x_i と x_j ($i \neq j$) を結ぶ単純弧で, $\alpha \cap \tilde{\alpha} = \partial \alpha \cap (x_i \cup x_j)$ なるものとする。 $x_i \cup \alpha \cup x_j$ の正則近傍の境界は 3 本の単純閉曲線から成り, このうちの 1 本は x_i と, もう 1 本は x_j と F_g 上で同位である。残りの 1 本を x_i' とおき, x_i と x_j の α に関する band-sum と呼ぶ。そして, $\tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\alpha}' = x_1 \cup \dots \cup x_i' \cup \dots \cup x_m$ を band-move と呼ぶ。もし F_g がハンドル体 V_g の境界であって, x_i と x_j が V_g で可縮であれば

これは、band-sum α'_i も V_g で可縮となり、 $\tilde{\alpha}$ が V_g の完全 m 線系ならば $\tilde{\alpha}'$ もそうである。定理 1.7 は次のように言い換えてもよい：

1.9 定理 [C22]: ハンドル体 V の (注意 2 の) 完全 m 線系は有限回の band-move の列で互いに移り得る (up to 同位). (実際 α_i と α_j が V の m 線系ならば, band-move がいわゆる "handle-sliding" [C21] で実現されることは容易にわかる。) \square

1.10 定義: $(M; V_g, W_g; F_g)$ を閉多様体 M の種数 g の H -分解とし, $\tilde{\alpha} = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_g$, $\tilde{\beta} = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_g$ をそれぞれ V_g, W_g の完全 m 線系とするとき, $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ を F_g 上に描いた対 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ を M の (H -分解 $(M; V_g, W_g; F_g)$ に因する) Heegaard-図式 (以後略して H-図式) と呼ぶ. 同様にして, V_g と W_g の拡大 m 線系 $\tilde{\alpha}^*$ と $\tilde{\beta}^*$ より, M の (H -分解 $(M; V_g, W_g; F_g)$ に因する) 拡大 Heegaard-図式 (以後略して 拡大 H-図式) $(F_g; \tilde{\alpha}^*, \tilde{\beta}^*)$ が定義される. $\tilde{\alpha}'$ と $\tilde{\beta}'$ をそれぞれ V_g と W_g のもう一つの完全 m 線系とすれば, 定理 1.7 または 定理 1.9 より同相写像

$$h_V: V_g \rightarrow V_g; h_V(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}' \quad ; \quad h_W: W_g \rightarrow W_g; h_W(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}'$$

が存在する. 従って同相写像 $H: M \rightarrow M$ が $H|_{V_g} = h_V, H|_{W_g} = h_W$ によって定義される; $H(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}', H(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}'$. この事実から, 逆に H -図式 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ は M の H -分解 $(M; V_g, W_g; F_g)$ を (up to 同位で) 決定することができる. 2 つの H -図式が 同位 であるとは, 対

応する H-分解が同値であるときとする。

H-図式 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ を図示するのに、通常 V_g (resp. W_g) を標準的な図で描き、その完全 m 線系 $\tilde{\alpha}$ (resp. $\tilde{\beta}$) を標準的に描いて、 W_g (resp. V_g) の完全 m 線系 $\tilde{\beta}$ (resp. $\tilde{\alpha}$) をその上に描く。このとき、 $\tilde{\beta}$ (resp. $\tilde{\alpha}$) を 完全 l 線系 と呼び、また合せて 完全 $m-l$ 線系 という語も用いる。このようにして得られる 2 つの図は、互いに 双対 であるという。ところで前のパラグラフの議論は、ハンドル体 V_g とか W_g を意識せず、曲面 F_g 上で抽象的に 2 組の閉曲線系 $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ を議論してよいことを示す。当然のことながら、 $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ とは有限個の点で交叉 (general position \wedge transversal) するよう描く。

1.11 定義: (0) $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ を H-図式とするとき、 F_g を $\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}$ で切り開いて得られる領域 D_λ の集合を $\Gamma = \Gamma(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ で表わす。 ∂D_λ を 1 周するとき、例えば $\tilde{\alpha}$ の成分の一部分 $\rightarrow \tilde{\beta}$ の成分の一部分 $\rightarrow \tilde{\alpha}$ の成分の一部分 $\rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\beta}$ の成分の一部分の順で現われる (各部分弧を D_λ の 辺 と呼ぶ)。 D_λ の辺の数は偶数である。

(1) H-図式 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ が 正規 (normal) であるとは、任意の $D_\lambda \in \Gamma$ について、 $(D_\lambda \text{ の 辺 の 数 }) \geq 4$ であるときをいう。実際、正規でない H-図式が与えられたとき、 $\tilde{\alpha}$ または $\tilde{\beta}$ を F_g 上で同位変形するだけで、同値で正規な H-図式にできる (正規化)。次の

定理を参照。そこで、特別を目的 a を限り、正規な H -図式を考察すればよい。

(2) H -図式 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ は、交点数 $\#(\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta})$ の少い程“簡単”を考へる a が普通であろう。 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ が可約 (reducible) であるとは、次の条件 (Y) を満たす領域 $D_\lambda \in \Gamma$ が少なくとも 1 つ存在するときをいう：

(Y) $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ の 1 つ a 成分が存在し、これを C とする、 D_λ の辺は 2 つ (あるいはそれ以上) の C の部分弧を含み、 ∂D_λ と C に適当な向きを与えたとき、その 2 つ a 部分弧の向きが両方とも同調するようになっている。

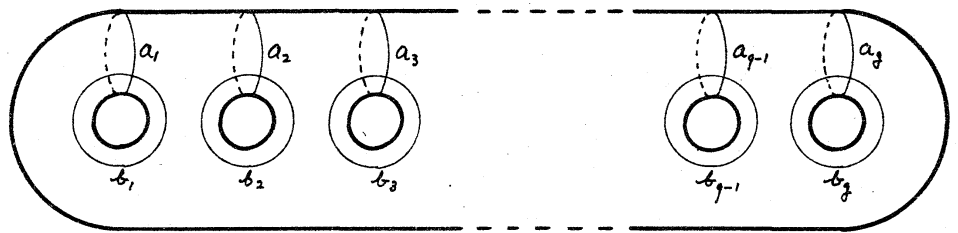
可約でないとき、既約 (irreducible) という。 H -図式 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ が可約であつて、 $D_\lambda \in \Gamma$ が条件 (Y) を満たす領域とすれば、条件に挙げた 2 つ a 部分弧を結ぶ単純弧 $\beta \subset D_\lambda$ が存在する (この β を短絡線 (short-cut, [B28], [B10] では wave と呼ぶ) と呼ぶことにする。この β を利用して定義 1.8 の band-move の逆の操作を施すことによつて、 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ と同値な H -図式 $(F_g; \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}')$ を、 $\#(\tilde{\alpha}' \cap \tilde{\beta}') < \#(\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta})$ とするものが得られる (本講究録中の森川氏の記事参照)。

(3) 2 つ a H -図式 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ と $(F_{g'}; \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}')$ が同型であるとは、同相写像 $f: F_g \rightarrow F_{g'}$, $f(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}'$, $f(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}'$, が存在するときをいう。

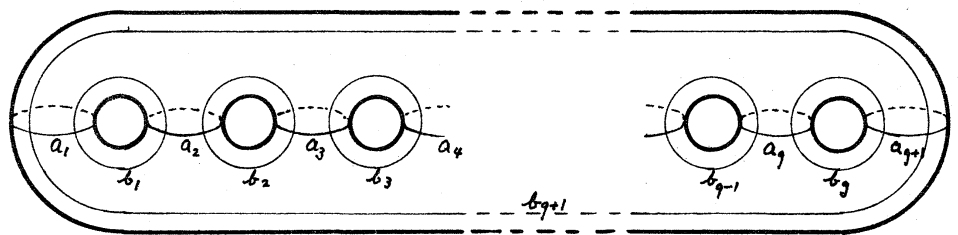
(4) 上の (0)~(3) の各定義を、拡大 H-図式にも自然に拡張する。

1.12 命題 [B10], [本講究録中の落合氏の記事]: $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ を H-図式とし、 $(F_g; \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}')$ と $(F_g; \tilde{\alpha}'', \tilde{\beta}'')$ をいずれも $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ より正規化して得られた H-図式とすれば、 $(F_g; \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}')$ と $(F_g; \tilde{\alpha}'', \tilde{\beta}'')$ は同型である。□

1.13. 3次元球面 S^3 の標準的 H-図式 $(T_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ および標準的拡大 H-図式 $(T_g; \tilde{\alpha}^*, \tilde{\beta}^*)$ として、それぞれ次図を採用しよう:



$(T_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$



$(T_g; \tilde{\alpha}^*, \tilde{\beta}^*)$

いずれも、もちろん正規かつ既約である。

1.14. 演習: 上の S^3 の標準的 H-図式を用いて、定理 1.5 を H-図式の言葉で述べよ。□

さて H -図式から PC を考察するためには、まず S^3 の H -図式の特徴付けが必要になる。これに本格的に挑戦したのは [B26] で、そこで用いたアルゴリズムを改良し、コンピューターを用いて実験をしたのが [B28] の長い論文である。結局彼等の予想は、「 S^3 の H -図式は、標準的図式を除いて、すべて可約である」という形でまとめることができる。しかしこの予想は、種数 4 またはそれ以上の場合に否定された [B15]。従って、与えられた H -図式が S^3 の H -図式であるか否かを判定するアルゴリズムは、今迄のところまだみつかっていない。種数 1 の場合はレンズ空間で、容易に判定できる。種数 2 の場合には、この予想が正しいことが証明された。

1.15 定理 [B10]: S^3 の種数 2 の H -図式および拡大 H -図式は、標準的図式を除いては、すべて可約である。□

尚その後種数 3 の場合にも反例が得られたとのことである。

1.16 H -図式より基本群の表示: 円多様体 M の H -図式 $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ は、自然に $\pi_1(M)$ の表示を与えらる。実際、 $\tilde{\alpha} = a_1 \cup \cdots \cup a_g$ とするとき、形式的に a_1, \dots, a_g を生成元とし、関係式 γ_i ($i=1, \dots, g$) を次のように定めればよい: $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ の成分は勝手に 1 つ向きを与えらる。 $\tilde{\beta} = b_1 \cup \cdots \cup b_g$ とする。有向閉曲線 b_i に沿って 1 周するとき、 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$ の順に $\tilde{\alpha}$ と交叉し、その交叉点における交叉数が $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_s}$ ($=\pm 1$) ならば、 $\gamma_i = a_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} a_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \cdots a_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}}$

と書く。(例之ば、本講究録中の森川氏の記事参照。)

<注意> ① 曲線 a_i のホモトピー類が生成元ではない。② a_i を 1 周するとき、どこからスタートしてもよい。

このようにして得られた $\pi_1(M)$ の表示 $\langle a_1, \dots, a_g \mid \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$ には、例之ば b_1, \dots, b_g が互いに素な単純閉曲線であり、 F_g を $b_1 \cup \dots \cup b_g$ で切り開いたとき球面 S^2 に $2g$ 個の穴をあけた連結な曲面になっている……というように幾何的な性質が反映しているはずであるが、一般には特に有効な性質はみつかっていない。種数 2 の場合には、ある種の対称性があることが知られる。

1.17 定理 [B9]: 閉多様体 M が種数 2 の H -分解を持つば、その基本群 $\pi_1(M)$ は次のように表示 $\langle a_1, a_2 \mid \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ を持つ:

(i) $\gamma_1 = w_0^{-1} w_1 w_2 w_0 w_3 w_4$, w_i は a_1, a_2 の語。

(ii) γ_1 は freely symmetric,

(iii) w_1, w_2, w_3, w_4 は symmetric,

(iv) $\gamma_2 = (w_1 w_2)^h (w_0 w_3 w_0^t w_2)^k$, $h, k, t \in \mathbb{Z}$, $(h, k) = 1$. \square

この定理の中の用語の定義については、原論文を参照されたい。

さてこのようにして得られた表示 α をかから、自明な群 α の表示……即ち単連結な閉多様体……を見い出す α が次の重要な課題である。数年前より東工大の本間グループが、種数 2

の場合についてコンピューターを用いてまずホモロジー球面を探し、その中から更にホモトピー球面(単連結な閉多様体)を……という作業を精力的に続けておられるが、その一つの報告が本講義録中の森川氏の記事である。この過程で次の予想が生れた:

1.18. 予想 (本間, etc.): $(F_2; \alpha, \beta)$ を S^3 の種数 2 の H-図式としたとき、この図式から得られる $\pi_1(S^3)$ の表示 $\langle a_1, a_2 \mid \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ について、一方の関係子が他方の関係子に語として含まれる(?) \square
この予想が成立すれば、相互代入を繰返すことにより

$$\langle a_1, a_2 \mid \gamma_1, \gamma_2 \rangle \longrightarrow \langle a_1, a_2 \mid a_1, a_2 \rangle$$

とできるから、triviality が判定できることになる。相互代入の特徴は、関係子の“長さ”がどんどん小さくなることであるが、その他に当然いくつかの基本的な変形も許される。

1.19 定義: 表示 $\langle a_1, \dots, a_q \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ において、次の4つの関係子の変形を単純変換と呼ぶ [B13]:

(1) 順序の巡回的変換:

$$\gamma_i = a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} a_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots a_{i_s}^{\epsilon_{i_s}} \longleftrightarrow \gamma'_i = a_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots a_{i_s}^{\epsilon_{i_s}} a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}.$$

(1.16 の場合には、 a_i のスタート点の変更に相当.)

(2) 初等的縮小:

$$\gamma_i = w_1 a_x^{\epsilon} \bar{a}_x^{\epsilon} w_2 \longrightarrow \gamma_i^* = w_1 a_x^0 w_2 \longrightarrow \gamma_i' = w_1 w_2.$$

但し、 w_1, w_2 は $a_1^{\pm 1}, \dots, a_q^{\pm 1}$ の語。

(図形的には 1.11(2) の正規化の作用に対応する。但し逆向き \leftarrow の変換は必ずしも H-図式とは対応しない。)

(3) 逆転 :

$$Y_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_s}^{\varepsilon_s} \longleftrightarrow Y_i' = Y_i^{-1} = a_{i_s}^{-\varepsilon_s} \cdots a_{i_2}^{-\varepsilon_2} a_{i_1}^{-\varepsilon_1}.$$

(1.16 の場合には、 b_i の向きを度えることに相当。)

(4) 代入 :

$$Y_i = w_1 Y_j w_2, Y_j \longrightarrow Y_i' = w_1 w_2, Y_j' = Y_j.$$

(図形的には、 b_i と b_j についてみると、定義 1.8 において $x_i = b_i$, $x_j = b_j$ とおいた場合の band-sum に相当するが、 b_i と b_j を結ぶ単純弧 α が一般には他の $\tilde{\alpha}$ の成分とも変わるので、1.8 の band-move には必ずしもならない。即ち (4) 代入の変換を行った後は必ずしも H-図式とは対応しない。もちろん逆向き \leftarrow の変換も必ずしも H-図式とは対応しない。)

上の定義とその注意を考慮して、予想 1.18 に対応(同値という意味ではない)する予想を挙げてみよう :

1.20 予想 : $(F_2; \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})$ を S^3 の種数 2 の H-図式とする。

(1) α の H-図式から 1.17 によって得られる $\pi_1(S^3)$ の表示を $\langle x_1, x_2 \mid Y_1, Y_2 \rangle$ とするとき、 $\{Y_1, Y_2\}$ が単純変換のみで $\{x_1, x_2\}$ に移る(?)

(2) $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^{(0)}$ の band-moves の列 $\tilde{\gamma}^{(0)} \rightarrow \tilde{\gamma}^{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \tilde{\gamma}^{(t)}$ が存在し、 $(F_2; \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}^{(i)})$, $i=1, \dots, t$, はすべて $(F_2; \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})$ と同値(即ち S^3 の H-図

式) であって、 $(F_2; \tilde{\alpha}, \tilde{\eta}^{(k)})$ と 標準 H-図式 $(T_2; \tilde{\alpha}, \tilde{\xi})$ が同型となる(?)

(3) 予想 1.18 が正しいとき、単純変換 (4) が band-move と compatible になるように実行可能か(?) □

種数が大きくなれば、予想 1.20 (1) は成立しないことが知られる [B13] が、少し弱い次の定理が得られる:

1.21 定理 [B13]: $(F_g; \tilde{\alpha}, \tilde{\xi})$ を S^3 の種数 g の H-図式とし、この図式から得られる $\pi_1(S^3)$ の表示を $\langle a_1, \dots, a_g \mid r_1, \dots, r_g \rangle$ とすると、同値な群表示 $\langle a_1, \dots, a_g \mid r'_1, \dots, r'_g \rangle$ が存在し、 $\{r'_1, \dots, r'_g\}$ は単純変換 (1)~(4) によって $\{a_1, \dots, a_g\}$ に移る。□

ここで群表示の同値とは次のように定める:

1.22 定義 [B13]: 表示 $\langle a_1, \dots, a_g \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ が 既約 とは、どの関係子 r_i も単純変換 (2) (mod. 単純変換 (1), (3)) ではない、長さが短くならないときをいう。2 つの表示 $\langle a_1, \dots, a_g \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ と $\langle a_1, \dots, a_g \mid r'_1, \dots, r'_n \rangle$ が 同値 とは、 $\{r_1, \dots, r_n\}$ と $\{r'_1, \dots, r'_n\}$ を単純変換 (2) (mod (1), (3)) で既約化したとき $\{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n\}$, $\{\bar{r}'_1, \dots, \bar{r}'_n\}$ とするとき、 $\{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n\} \equiv \{\bar{r}'_1, \dots, \bar{r}'_n\}$ (mod. (1), (3)) が成立するときをいう。

<注意> 定義 1.19 および 1.22 は、組合せ群論の用語として必ずしも一般的なものである。また、定理 1.21 における $\{r'_1, \dots, r'_g\}$ は、一般に $\{r_1, \dots, r_g\}$ に単純変換 (1)~(4) の他に (2) の逆

向きの変換を施して得られるもので、H-図式に対応してゐるとは限らない。

1.23 命題 [B22]: $(F_2; \alpha, \beta)$ を単連結な閉多様体 M の種数 2 の H-図式とし、 $\langle a_1, a_2 | \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ をこの図式から得られる $\pi_1(M)$ の表示とする。もし γ_1, γ_2 の長さが適当に短かければ、 $M \cong S^3$ である。□

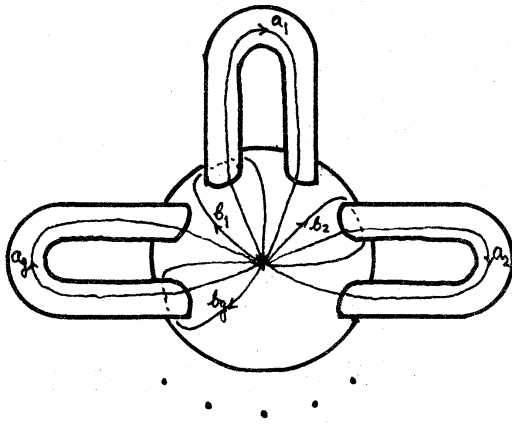
この命題の詳細な内容については、原論文を見らねばいい。前記のような予想等を背景に、定理 1.17 を依りどころとして γ_1, γ_2 の長さや形に制限を付して、PC の肯定的な答を出してゐるわけで、今後このような方向から PC にアプローチする際の一つの目安になると思われぬ。

§2. Poincaré 予想と群論的問題

前節の H-分解および H-図式に関する考察は、PC を純群論的問題に置き換へられることを暗示する。この節で代表的なものをもとめておく。

2.1 $(M; V_g, W_g; F_g)$ を閉多様体 M の種数 g の H-分解とし、基点 $* \in F_g$ を定め、次頁の図のように $*$ を基点とする単純閉曲線系 $\{a_1^*, \dots, a_g^*, b_1^*, \dots, b_g^*\}$ を定める。これら g 本の閉曲線の点 $*$ を法としたホモトピー類も同じ記号で表わす。

$$\pi_1(F_g; *) = \langle a_1^*, \dots, a_g^*, b_1^*, \dots, b_g^* \mid \prod_{i=1}^g [b_i^*, a_i^*] = 1 \rangle.$$



ところで、1.2 と 閉多様体の素分解 [A4], Loop 定理等から、次は明らかである:

2.2 命題: PC と次の命題は同値である: $(M; V_g, W_g; F_g)$ を単連結な閉多様体 M の種数 $g \geq 2$ の H-分解とするとき, F_g 上に次の条件を満たす単純閉曲線 α が存在する;

$$\alpha \neq 1 \text{ on } F_g, \quad \alpha \simeq 1 \text{ in } V_g, \quad \alpha \simeq 1 \text{ in } W_g. \quad \square$$

そこで問題は、上記のような単純閉曲線 α が存在するかどうかであるが、これに関して次の2つの予想がある。

2.3 予想 [B16]: * を基点とする単純閉曲線 ω_i が F_g 上に存在し、次の2条件を満たす(?)

$$(i) \quad \omega_i \sim a_i^* \text{ (ホモトピー)} \text{ on } F_g,$$

(ii) 交換子 $[a_i^*, \omega_i]$ を含む $\pi_1(F_g; *)$ の最小の正規部分群を Δ_i とするとき, $\pi_1(F_g; *) / \Delta_i$ は有限位数の元を持たない。 \square

2.4 予想 [B16]: 予想 2.4 における Δ_i に対応する F_g の被覆空間 D_i は planar 曲面 (= S^2 に埋蔵可能な曲面) である(?)

2.5 定理 [B19]: 予想 2.3 は正しい。□ 実際 [B19] では、さらに一般化して肯定的解答を与えている。

2.6 定理 [B16]: 定理 2.5 のもとに、予想 2.4 が成立すれば PC は正しい。□

予想 2.4 に関して は 次の考察がある:

2.7 問題 [B18]: F_g を 種数 $g \geq 2$ の有向閉曲面とし、与えられた元 $x \in \pi_1(F_g)$ を含む最小の正規部分群を G_x とするとき、 G_x に対応する F_g の被覆空間 \tilde{F}_g は planar か? □

[B18] では、 \tilde{F}_g 上の任意の 2 本のループの交叉数を、元 x を用いて計算する公式を導き出している。一方、一般に

2.8 命題: \tilde{F}_g が planar $\iff \tilde{F}_g$ 上の任意の 2 本のループの交叉数が 0。□

というのは容易にわかるから、問題 2.7 は理論上では決定的可能である。しかし問題 2.7 および予想 2.4 はいまだ解決していない。[B14] では、命題 2.2 で述べた単純閉曲線 $\alpha \subset F_g$ の存在について、別の必要十分条件を与えている。

2.9 定義: $(M; V, W; F)$ を閉多様体 M の H -分解とする。さらに、 $p_v: \tilde{V} \rightarrow V$, $p_w: \tilde{W} \rightarrow W$ を普遍被覆空間とし、 S および T をそれぞれ $\partial \tilde{V}$, $\partial \tilde{W}$ の連結成分とする。 F の正則被覆 $p: \tilde{F} \rightarrow F$ が (S, T) に従属 (subordinate) するとは、次の条件をみたすとき:

(i) \tilde{F} は S と T の被覆空間とみなせる。(この条件は、群を

用いて, $p_{\#}\pi_1(\tilde{F}) \subset p_{V\#}\pi_1(S) \cap p_{W\#}\pi_1(T)$ と書ける.)

(ii) \tilde{F} は F の普遍被覆空間ではない.

2.10 定理 [B14]: 命題 2.2 の条件をみたす単純閉曲線 $\alpha \subset F_g$ が存在するための必要十分条件は, (S, T) に従属する正則被覆 $p: \tilde{F}_g \rightarrow F_g$ で, \tilde{F}_g が planar なるものが存在することである. \square

2.11 定理 [B23]: $(M; V, W; F)$ が多様体 M の H-分解とすれば次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(V) & & \\
 & \nearrow \varphi & & \searrow i_* & \\
 \pi_1(F) & & & & \pi_1(V) \times \pi_1(W) \\
 & \xrightarrow{\varphi \times \psi} & & & \\
 & \searrow \psi & \pi_1(W) & \nearrow j_* &
 \end{array}$$

ここで φ, ψ, i_*, j_* はいずれも包含写像から誘導される準同型である. \square

M が単連結 $\iff \varphi \times \psi$ が全射. \square

この定理を基に, $\mathbb{P}C$ の純代数的な表現が得られる. それを述べるために, 一先定義を要する.

2.12 定義 [B23]: G, A, B を群とし, $\varphi: G \rightarrow A * B$ を準同型写像とする. φ が 本質的 であるとは, \langle 注意の元 $g \in A * B$ に対して, $g\varphi(G)g^{-1}$ が因子 A にも因子 B にも含まれない \rangle とするときを言う. ただし A, B はいずれも $A * B$ の部分群とみなす.

2.13 予想 [B23], [B11]: $G = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \mid \prod_{i=1}^g [x_i, y_i] = 1 \rangle$ とし, A_g, B_g を階数 g の自由群とする. $\eta: G \rightarrow A_g \times B_g$ を

全射準同型写像とするとき、(任意の自然数 $g \geq 2$ に対して、群 G_1, G_2 と、本質的準同型写像 $\psi_1: G \rightarrow G_1 * G_2$ 、および準同型写像 $\psi_2: G_1 * G_2 \rightarrow A_g \times B_g$ が存在して、 $\eta = \psi_2 \circ \psi_1$ とするようにはできない(?) \square

2.14 定理 [B23]: 予想 **2.13** が正しいならば **PC** も正しい。 \square

[B11] では、準同型写像 $G \rightarrow A_g \times B_g$ と H -分解との関係を研究することにより、定理 **2.14** の逆も証明した。つまり

2.15 定理 [B11]: **PC** \iff 予想 **2.13**.

§ 3. 曲面の写像類群と Heegaard 接着

3.1 定義: $(S^3; V_g, W_g; F_g)$ を種数 g の H -分解とする。

$$\bar{N}(g) = \{ \psi: F_g \rightarrow F_g \mid \psi \text{ は向きを保存する同相写像} \},$$

$$\bar{A}(g) = \{ \psi \in \bar{N}(g) \mid \psi \text{ は同相写像 } \tilde{\psi}: V_g \rightarrow V_g \text{ に拡張できる} \},$$

$$\bar{B}(g) = \{ \psi \in \bar{N}(g) \mid \psi \text{ は同相写像 } \tilde{\psi}: W_g \rightarrow W_g \text{ に拡張できる} \}$$

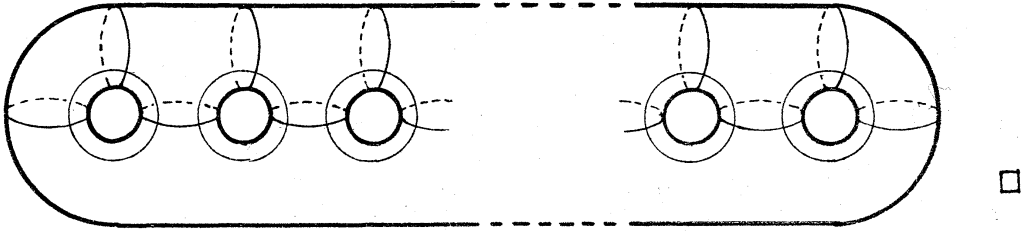
$$\mathcal{D}(g) = \{ \psi \in \bar{N}(g) \mid \psi \approx \text{id.} \}, \quad (\approx \text{ は同位を示す.})$$

とおけば、いずれも写像の合成と積とにて群になり、 $\mathcal{D}(g)$ は残り3つの群の正規部分群となることも容易にわかる。

$$\mathcal{M}(g) = \bar{N}(g)/\mathcal{D}(g), \quad \mathcal{A}(g) = \bar{A}(g)/\mathcal{D}(g), \quad \mathcal{B}(g) = \bar{B}(g)/\mathcal{D}(g)$$

とおき、それぞれ閉曲面 F_g 、ハンドル体 V_g 、ハンドル体 W_g の写像類群と呼ぶ。 $\psi \in \bar{N}(g)$ に対し、自然な準同型 $\bar{N}(g) \rightarrow \mathcal{M}(g)$ による像を $[\psi]$ で示す。

3.2 定理 [C9], [C15], c.f. [C4] : $\mathcal{M}(g)$ は、下図に示した $3g-1$ 本の単純閉曲線に沿った Dehn twists によって生成される :



Dehn twist の定義は省略するので、[C4] を参照されたい。[C15] 等では C -homeomorphism という名を用いている。 $\mathcal{M}(g)$ の生成元を最初に決定したのは [C9] で $2g(g-1)$ 個の Dehn twists によるものであった。1960年代になって [C15] により再証明され、その後証明の工夫がいろいろなされていく。 $\mathcal{M}(g)$ の定義関係式については、 $g=1$ の場合は $\mathcal{M}(1) \cong Sp(2; \mathbb{Z})$, 有理整数環 \mathbb{Z} 上の 2×2 シンプレクテック行列全体、だから別格で、 $g=2$ の場合は [C6] によって 1970年代になってようやく決定された ([C4] も参照)。この夏、Birman 教授によって Hatcher-Thurston のプロレプリントがもたらされ、 $g \geq 3$ の場合もいよいよ解決かと思われたが、その後の検討によって少々飛躍があることが判明し、いまだ完全ではない。

3.3. $\mathcal{A}(g)$ と $\mathcal{B}(g)$ が $\mathcal{M}(g)$ の部分群として互いに共役であることは容易にわかるから (後述定義 3.5 の写像 ρ を用いる)、群としては一方を調べれば十分である。 $\mathcal{A}(1)$ についてはその

構造はよく知られており、 $A(2)$ の生成元は古く [C10] によって与えられた。 $A(g)$, $g \geq 3$, の生成元は [C21] により、6種の写像により与えられた。定義関係式については、 $g \geq 2$ についていまだ確定してはいないが、前記の Hatcher-Thurston の方法論は、むしろこの場合に有効かとも思われる。

また [C20] では、[C21] の写像を利用して、

$A(g) \cap B(g) = \{[\psi] \in \mathcal{M}(g) \mid \psi \text{ は同相写像 } \tilde{\psi}: S^3 \rightarrow S^3 \text{ に拡張できる}\}$
の生成元を与えていた。

3.4. $(S^3; V_g, W_g; F_g)$ を種数 g の H-分解とし、 F_g 上には 2.1 の図のように点 $*$ を基点とする単純閉曲線系 $\{a_1^*, \dots, a_g^*; b_1^*, \dots, b_g^*\}$ を定める。 $v_V: F_g \rightarrow V_g$, $v_W: F_g \rightarrow W_g$ を包含写像とすると、

$$\textcircled{1} \dots \dots \begin{cases} v_V(a_i^*) = \hat{a}_i, & v_V(b_i^*) = 1, \\ v_W(a_i^*) = 1, & v_W(b_i^*) = \hat{b}_i \end{cases} \quad (i=1, \dots, g)$$

とおくことができる、

$$\pi_1(V_g; *) = \langle \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_g \rangle, \quad \pi_1(W_g) = \langle \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_g \rangle$$

(いずれも階数 g の自由群) である。

任意の $[\psi] \in \mathcal{M}(g)$ には、 $\psi(*) = *$ をみたす代表元 $\psi \in \overline{\mathcal{M}}(g)$ が存在し、このような ψ については、自己同型写像

$$\psi_{\#}: \pi_1(F_g; *) \longrightarrow \pi_1(F_g; *)$$

が誘導される。各 $[\psi]$ に対し、このような $\psi_{\#}$ は、自己同型写像全体の作る群 $\text{Aut}(\pi_1(F_g; *))$ の内部自己同型手法として一意

に定まることは容易にわかる。逆に、 $\text{Aut}(\pi_1(F_g; *)) / \text{Inn}(\pi_1(F_g; *))$ の任意の元 σ に対し、元 $[\psi] \in \mathcal{M}(g)$ が存在し、 $\psi_{\#} = \sigma$ とする。これも [C19], [C17] によって示されているので、同型写像

$$\begin{aligned} \xi: \mathcal{M}(g) &\xrightarrow{\cong} \text{Aut}(\pi_1(F_g; *)) / \text{Inn}(\pi_1(F_g; *)) \\ [\psi] &\longmapsto \langle \psi_{\#} \rangle \end{aligned}$$

が存在する。このとき、 $\mathcal{A}(g), \mathcal{B}(g)$ は [C11], [C12] 等に依って、次のように特徴付けられる。

$$\begin{aligned} \xi: \mathcal{A}(g) &\cong \{ \langle \psi_{\#} \rangle \mid \psi_{\#}(N(a_1^*, \dots, a_g^*)) \subset N(a_1^*, \dots, a_g^*) \}, \\ \xi: \mathcal{B}(g) &\cong \{ \langle \psi_{\#} \rangle \mid \psi_{\#}(N(b_1^*, \dots, b_g^*)) \subset N(b_1^*, \dots, b_g^*) \}. \end{aligned}$$

但し、 $N(x_1, \dots, x_g)$ は x_1, \dots, x_g を含む $\pi_1(F_g; *)$ の最小の正規部分群を表わす。

3.5 定義: $(S^3; V_g, W_g; F_g)$ を種数 g の H-分解, $\gamma: S^3 \rightarrow S^3$ を方向逆転の周期 2 の同相写像とし、 $\gamma(V_g) = V'_g$, $\gamma(W_g) = W'_g$, $\gamma(F_g) = F'_g$ 等と表わす。また:

$$\rho: (F_g; *) \longrightarrow (F_g; *) \in \bar{\mathcal{N}}(g)$$

$$\xi, \quad \rho_{\#}(a_i^*) = (a_i^*)^{-1} b_i^* a_i^*, \quad \rho_{\#}(b_i^*) = (a_i^*)^{-1}, \quad i=1, \dots, g,$$

を同相写像とする。(ρ は容易につくられる。実際、 $V_g \rightarrow W_g$ を同相写像 τ 、 ∂V_g の m 線系と ∂W_g の m 線系に移す写像である。))

閉多様体 M の種数 g の H-分解 $(M; V, W; F)$ に対し、同相写像 $\hat{f}_1: V_g \rightarrow V$, $\hat{f}_2: W_g \rightarrow W$ を定めれば、 $F_g = \partial V_g = \partial W_g$ について $f_1 = \hat{f}_1|_{F_g}$, $f_2 = \hat{f}_2|_{F_g}$ とおくことにより、同相写像

$$\varphi = f_2^{-1} f_1 : F_g \rightarrow F_g \in \bar{\mathcal{N}}(g)$$

を得る. $\varphi : \tau, V_g \cup V_g'$ と τ ,

$$\varphi(x) = \rho \tau(x), \quad x \in \partial V_g$$

なる規則によって表面を貼り合せて得られる空間を $M(\varphi) = V_g \cup_{\varphi} V_g'$ と書けば, 3対として $(M(\varphi); V_g, V_g')$ と $(M; V, W)$ は写像 $\tilde{f}_1 \cup \tilde{f}_2 \tilde{\rho} \tau$ によって同相となる. 但し, $\tilde{\rho}$ は $V_g \rightarrow W_g$ の同相写像で, $\tilde{\rho}|_{F_g} = \rho$ なるものとする. $V_g \cup_{\varphi} V_g' = M(\varphi)$ と M の Heegaard-接着 (以後略して H-接着) と呼び, $\varphi \in \bar{\mathcal{N}}(g)$ と H-接着写像 と呼ぶ.

<注意> (1) H-接着 $V_g \cup_{\varphi} V_g' \in M$ の H-分解と呼ぶことも多い.

(2) 2つのハンドル体の接着空間として閉多様体 M を表現する仕方は, 上の定義の他にいろいろ考えられる. 例として, 後出 3.12 を参照.

次は容易に確かめられる:

3.6 命題: (1) $[\psi] = [\varphi] \in \mathcal{M}(g) \Rightarrow M(\psi) \cong M(\varphi)$.

(2) $M(\text{id.}) \cong S^3$. \square

3.7 基本群の表示: さて H-接着の場合に, 1.16 に対応する基本群の表示を求めてみよう. $\varphi \in \bar{\mathcal{N}}(g)$ について, φ が基点 $* \in F_g$ を保存するとし, $\varphi_{\#} : \pi_1(F_g; *) \rightarrow \pi_1(F_g; *)$ が,

$$\textcircled{2} \dots \begin{cases} \varphi_{\#}(a_i^*) = A_i(a_1^*, \dots, a_g^*, b_1^*, \dots, b_g^*), \\ \varphi_{\#}(b_i^*) = B_i(a_1^*, \dots, a_g^*, b_1^*, \dots, b_g^*), \end{cases} \quad (i=1, \dots, g)$$

のように, $a_1^*, \dots, a_g^*, b_1^*, \dots, b_g^*$ の語によって表わされたとする.

3.4① と上の ② より, van Kampen の定理 から

$$\textcircled{3} \quad \pi_1(M(\varphi)) \cong \langle \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_g \mid A_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_g, 1, \dots, 1) = 1, i=1, \dots, g \rangle$$

が証明される.

3.8. (注意の $\varphi \in \bar{N}(g)$ は, 同型 $\varphi_*: H_1(F_g; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(F_g; \mathbb{Z})$ を誘導する. $H_1(F_g; \mathbb{Z})$ は $a_1^*, \dots, a_g^*, b_1^*, \dots, b_g^*$ (のホモロジ-類) を基底とする階数 $2g$ の自由アーベル群 (または自由 \mathbb{Z} -加群) だから, φ_* はこの基底に関して \mathbb{Z} 上の $2g \times 2g$ シンプレクテック行列で表現される. 実際 3.7② をホモロジ-で,

$$\textcircled{2}' \dots \begin{cases} \varphi_*(a_i^*) = \sum_{k=1}^g \alpha_{ik} a_k^* + \sum_{k=1}^g \alpha_{i, g+k} b_k^*, \\ \varphi_*(b_i^*) = \sum_{k=1}^g \alpha_{g+i, k} a_k^* + \sum_{k=1}^g \alpha_{g+i, g+k} b_k^*. \end{cases} \quad (i=1, \dots, g)$$

と書けば, φ_* は行列 $\|\alpha_{rs}\|$ で表わされる. そこで, 準同型

$$\sigma: \mathcal{M}(g) \longrightarrow Sp(2g; \mathbb{Z})$$

を, $\sigma([\varphi]) = \|\alpha_{rs}\|$ で定義し, $\mathcal{K}(g) = \text{Ker}(\sigma)$ と定める.

$Sp(2g; \mathbb{Z})$ の生成元は [C13] で, 定義関係式は [C14] で決定されている. [C1] は定義関係式を定理 3.2 との関係で再考察している. $\mathcal{K}(g)$ の代数的構造は, 3次元多様体との関係で重要だが, まだあまりよくわかっていない. [C1], [C20], [C23] に多少の結果がある.

3.9 定理 [C3]: $M(\varphi) = V_g \cup_{\varphi} V_g'$ がホモロジ-球面 $\iff [\varphi] \in \mathcal{A}(g) \mathcal{K}(g) \mathcal{B}(g)$.

3.10 定理 [C3]: $M(\varphi) = V_g \cup_{\varphi} V'_g \cong S^3 \iff [\varphi] \in \mathcal{A}(g)\mathcal{B}(g)$. \square

ここで $\mathcal{A}(g)\mathcal{B}(g)$ は $\mathcal{M}(g)$ の部分群ではないことに注意。この定理の必要性の証明では、本質的に定理 1.3 を利用する。十分性の証明はそんなに難かしくない。この結果 PC は写像類群の言葉で次のように述べられる:

3.11 系 [C3]: PC が成立することと、次の命題が成立することとは同値である: $[\varphi] \in \mathcal{A}(g)\mathcal{A}(g)\mathcal{B}(g)$ に対し、 $\varphi_{\#}$ が 3.7② で与えられ、 $\pi_1(M(\varphi))$ が 3.7③ の表示を持つとき、

$$\pi_1(M(\varphi)) = \{1\} \implies [\varphi] \in \mathcal{A}(g)\mathcal{B}(g). \quad \square$$

3.12 定義: 3.5 の H-接着を少し違う角度からながめてみる。 S^3 を 4次元球体 D^4 の境界とみて、3.5 で定義した写像 γ を、 $\tilde{\gamma}: D^4 \rightarrow D^4$ の拡張とし、 $\gamma(D^4) = (D^4)'$ とおく。また元 $\psi \in \mathcal{A}(g)$, $\varphi \in \mathcal{B}(g)$ に対し、それぞれ拡張した同相写像を $\tilde{\psi}: V_g \rightarrow V_g$, $\tilde{\varphi}: W_g \rightarrow W_g$ で示す。さて元 $\varphi \in \mathcal{B}(g)$ に対し、 D^4 と $(D^4)'$ とを

$$\tilde{\varphi}(x) = \gamma(x), \quad x \in W_g,$$

なる規則によって貼り合わせることによって、単連結な 4次元境界付多様体 $N^4(\varphi) = D^4 \cup_{\tilde{\varphi}} (D^4)'$ が得られる。 $\partial N^4(\varphi)$ は V_g と V'_g とを、 $\varphi(x) = \gamma(x)$, $x \in F_g = \partial V_g = \partial W_g$, の規則で貼り合せた閉多様体(これを $\tilde{M}(\varphi)$ と書く)になる; $\partial N^4(\varphi) = \tilde{M}(\varphi)$.

閉多様体 M が 特殊な Heegaard-接着 (以後略して 特殊 H-接着) によって表現されるとは、ある自然数 g' と、元 $\varphi \in \mathcal{B}(g')$ が存

在し、 $M \cong \tilde{M}(\varphi)$ なるときをいう。 $\tilde{M}(\varphi)$ を M の 特殊 H-接着、 φ を 特殊 H-接着写像 と呼ぶ。特殊 H-接着写像 φ が even であるとは、 V_g の完全 m 線系 $\tilde{\alpha} = a_1 \cup \dots \cup a_g$ が存在して、代数的な交叉行列 $W(\varphi) = \| |\varphi(a_i) \cap a_j|_0 \|$ が対称行列でかつ対角成分がすべて偶数 n のときをいう。

3.13 定理 [C5]: 任意の閉多様体 M に対し、自然数 g' と $\varphi \in \mathcal{B}(g')$ が存在し、 M は特殊 H-接着 $\tilde{M}(\varphi)$ として表現され、特に φ は even となるようにできる。□

証明では次節で述べる絡み目に沿った手術 (surgery) の概念が本質的に用いられる。定義 1.1 の意味の H-分解、あるいは定義 3.5 の意味の H-接着の種数 g に比べて、この特殊 H-接着の種数 g' は一般にかなり大きい。

特殊 H-接着から、特殊 H-図式、さらに even を特殊 H-図式等も自然に定義されるが、これらが閉多様体の研究にどのような意味を持つのかについては、残念ながら今のところよくわからない。応用例としては、 $\tilde{M}(\varphi)$ が \mathbb{Z}_2 -ホモロジー-球面 α のとき、代数的交叉行列 $W(\varphi)$ の signature (mod 16) が、Rohlin 不変量 $\mu(\tilde{M}(\varphi))$ と一致すること、これを利用して index 8 のホモロジー-球面の構成がなされる [C5], [C8]。その他、 $\mathcal{M}(g)$ のいろいろな部分群とそれに対応する閉多様体の類に関する話題が [C7] にある。

§4. Dehn構成とProperty P.

Poincaréが1900年に「 S^3 と同じホモロジー一群を持つ閉多様体は S^3 と同相か？」という予想を出し [A7]、この反例を種数2のH-図式を用いて自ら作ってみせた [A8] : とは御承知の通りである。このホモロジー球面は、Poincaré Räume, — manifold, icosahedral space, dodecahedral space などと呼ばれ、その後いろいろな表現が研究されてきた (これらについては [A9] の第9章, [A10] 等を参照されたい)。この節で述べるのは、[B7] を起源とする絡み目・結び目による閉多様体の構成についてである。

4.1 定義: 絡み目・結び目 (=成分1の絡み目) はすべて tame とする。絡み目 L_1 と L_2 が 同じ型 とは、同相写像 $f: S^3 \rightarrow S^3$ で、 $f(L_1) = L_2$ とするものが存在するときとする。絡み目とその絡み目型とを特に区別しない。

μ 成分の絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu \subset S^3$ について、

$$C(L) \equiv S^3 - \overset{\circ}{N}(L; S^3) = S^3 - \bigcup_{i=1}^{\mu} \overset{\circ}{N}(K_i; S^3) = Cl(S^3 - N(L; S^3))$$

とおく。 L の各成分 K_i について、

$$N(K_i; S^3) \cong \mathbb{D}^2 \times S^1, \quad \partial N(K_i; S^3) \cong S^1 \times S^1$$

である。

4.2 結び目の補空間予想: 2つの結び目 K_1, K_2 について、

$$C(K_1) \cong C(K_2) \implies K_1 \text{ と } K_2 \text{ は同じ型 (?) } \square$$

4.3 定義: 絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ について, $C(L)$ と μ 個の $\mathbb{D}^2 \times S^1$ とを, それらの表面(境界)で, 同相写像

$$\varphi_i : \partial(\mathbb{D}^2 \times S^1) \longrightarrow \partial N(K_i; S^3) \subset \partial C(L), \quad i=1, \dots, \mu$$

によって貼り合せて得られる閉多様体

$$M(L; \varphi_1, \dots, \varphi_\mu) = C(L) \cup_{\varphi_1} \mathbb{D}^2 \times S^1 \cup_{\varphi_2} \dots \cup_{\varphi_\mu} \mathbb{D}^2 \times S^1$$

を, L を Dehn手術する ことにより得られた閉多様体という.

またこのような閉多様体の構成法を総称して, Dehn構成 と呼ぶ.

4.4. 単純閉曲線 $m_i, l_i \subset \partial N(K_i; S^3)$ が K_i の 経線, 緯線 であるとは, それぞれ次の条件をみたすときをいう:

$$m_i \neq 1 \text{ on } \partial N(K_i; S^3), \quad m_i \simeq 1 \text{ in } N(K_i; S^3),$$

$$l_i \neq 1 \text{ on } \partial N(K_i; S^3), \quad l_i \sim 0 \text{ in } S^3 - \overset{\circ}{N}(K_i; S^3).$$

m_i, l_i は, up to 同位で一意に定まることが知られる.

ところで 4.3 における同相写像 $\varphi_i : \partial(\mathbb{D}^2 \times S^1) \rightarrow \partial N(K_i; S^3)$ について, $\varphi_i(\partial \mathbb{D}^2 \times \{*\})$, $* \in S^1$, は $\partial N(K_i; S^3)$ 上の単純閉曲線だから, m_i と l_i を用いて $m_i^{p_i} l_i^{q_i}$ ($p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $\text{g.c.d.}(p_i, q_i) = 1$) と表わせる. 次は容易に証明される:

4.5 命題: 絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ を Dehn手術することによって得られた閉多様体 $M(L; \varphi_1, \dots, \varphi_\mu)$ は, 絡み目 L と, 互いに素な整数対 $(p_1, q_1), \dots, (p_\mu, q_\mu)$ によって一意に決定される;

$$M(L; \varphi_1, \dots, \varphi_\mu) \cong M(L; (p_1, q_1), \dots, (p_\mu, q_\mu)). \quad \square$$

4.6 命題 : 結び目 K と、互いに素な整数対 (p, q) について、

$$(1) H_1(M(K; (p, q))) \cong \mathbb{Z}_{p'}, \quad p' = |p|,$$

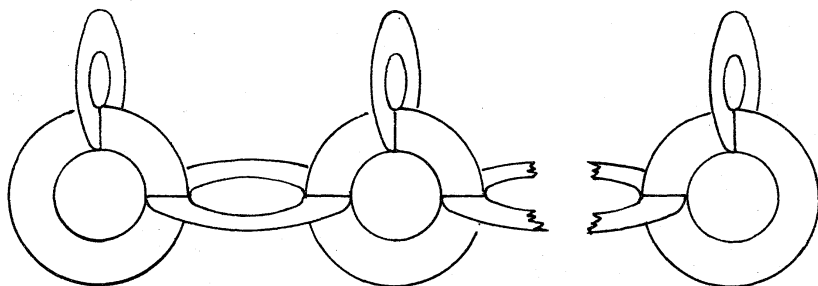
$$(2) q=0 \text{ ならば, } p = \pm 1 \text{ となり, } M(K; (\pm 1, 0)) \cong S^3. \quad \square$$

4.7 定理 : 任意の閉多様体 M に対して、

(1) 絡み目 L が存在し、 M は L を Dehn 手術することによって得られる [D24], [D11].

(2) 成分 K_i がすべて平凡型 (= unknotted, 円板の境界となるもの) の絡み目 L が存在し、 M は L を Dehn 手術することによって得られる [D6], [C15].

(3) Lickorish 絡み目 L_g が存在し、 M は L_g を Dehn 手術することによって得られる。特に、(注意の i について、4.4 (or 4.5) における p_i, q_i について、 $|p_i| = |q_i| = 1$ とできる [C15], [A9] etc.) ここで Lickorish 絡み目 L_g とは、次のような絡み目という: L_g の各成分 K_i が、定理 3.2 の図に示した単純閉曲線のいずれかと平行である。言換えると、 K_i が下図の $3g-1$ 個の円環面のいずれか 1 つの上にその中心線と平行に含まれる。



□

4.8 問題: すべて n ホモロジ-球面は、結び目を Dehn 手術することによって得られるか? □

定理 4.7 を基礎にした閉多様体の一般論はさて置いて、以下 PC と n の関連から 結び目 または 絡み目の Property P について調べてみよう。

4.9 定義: 絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ の Dehn 手術に際して、 $g_i = 0$ のときは 命題 4.6(2) によって、成分 K_i に沿っての手術は、何もせずそのままにしておくのと同じことになる。 $g_i = 0$ のとき、 K_i については 自明な Dehn 手術 であるといい、すべての成分について自明な Dehn 手術 a とし、 L について 自明な Dehn 手術 であるという。

絡み目 L について、(任意の非自明な Dehn 手術によって得られる閉多様体 $M(L; (p_1, q_1), \dots, (p_\mu, q_\mu))$ が単連結でないとき、 L は 特性 P (Property P) を持つという [D1], [D4], [D21]。平凡型結び目は特性 P を持たないことが知られる唯一の結び目である。また成分の数が 2 またはそれ以上の絡み目については、特性 P を持たないものが多い [D27]。

4.10 予想 P: 非平凡型のすべて n の結び目は特性 P を持つ(?)

4.11 命題: 結び目 K について、次の 4 つの命題は同値:

(1) K が特性 P を持つ;

(2) $g \neq 0$ をらば、 $\pi_1(M(K; (p, g))) \neq \{1\}$;

(3) (イ) $\pi_1 M(K; (p, q)) = \{1\} \Rightarrow M(K; (p, q)) \cong S^3$, かつ

(ロ) 任意の埋蔵 $h: C(K) \rightarrow S^3$ に対して, h の拡張同相写像 $H: S^3 \rightarrow S^3$ が存在する;

(4) ホモトピー-球面 Σ^3 と, 任意の埋蔵 $h: C(K) \rightarrow \Sigma^3$ であり, $\mathcal{O}(\Sigma^3 - h(C(K)))$ が種数 1 のハンドル体となるものに対して, h の拡張同相写像 $H: S^3 \rightarrow \Sigma^3$ が存在する. \square

4.12 定義: 絡み目 L について,

(1) $M(L; (p_1, q_1), \dots, (p_r, q_r))$ が単連結 $\Rightarrow M(L; (p_1, q_1), \dots, (p_r, q_r)) \cong S^3$ を性質をみたすとき, L は 特性 P^* (Property P^*) を持つという.

(上の命題 4.11(3)-(イ) の部分に相当する)

(2) 任意の埋蔵 $h: C(L) \rightarrow S^3$ に対して, h の拡張同相写像 $H: S^3 \rightarrow S^3$ が存在するとき, L は 特性 U (Property U) を持つという. (命題 4.11(3)-(ロ) の部分に相当.)

4.13. 命題: (1) 絡み目 K について, K が特性 P を持つ必要十分条件は, K が特性 P^* と特性 U を持つことである.

(2) 平凡型絡み目は, 特性 P^* を持つが特性 U を持たない. \square

4.14 命題 [D4]: (1) 絡み目 L が特性 P^* を持つならば, L の Dehn 手術によって PC の反例は得られない.

(2) 2つの絡み目 K_1, K_2 について, K_1 が特性 U を持ち, かつ $C(K_1) \cong C(K_2)$ ならば, K_1 と K_2 は同じ型である. (すなわち補空間予想 4.2 が成立する.) \square

4.15. 予想 P^* : すべての絡み目は特性 P^* を持つ(?)

$PC \iff$ 予想 P^* . \square

4.16. 予想 U : すべての非平凡型結び目は特性 U を持つ(?)

予想 $U \implies$ 補空間予想 4.2. \square

尚、一般の絡み目については、予想 P , 予想 U , 補空間予想のいづれも成立しない。また、命題 4.6(2) より、次の定義も意味を持つ。

4.17. 定義 [D23]: (1) 絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ が 特性 P_n (Property P_n) ($n \neq 0$) を持つとは、 $\pi_1(M(L; (\pm 1, n), \dots, (\pm 1, n))) \neq \{1\}$ をみたすときをいう。

(2) 絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ が 特性 P_n^* (Property P_n^*) を持つとは、 $\pi_1(M(L; (\pm 1, n), \dots, (\pm 1, n))) = \{1\} \implies M(L; (\pm 1, n), \dots, (\pm 1, n)) \cong S^3$ が成立するときをいう。

4.18. 定義 [D21]: 結び目 K が 特性 Q (Property Q) を持つとは、次の 3 条件をみたす閉曲面 $F \subset S^3$ が存在するときをいう:

- ① $K \subset F$;
- ② $F - K$ が連結;
- ③ $S^3 - F$ の 2 つの領域の閉包を A, B とするとき、

$$H_1(A, F - K) \neq \{0\}, \quad H_1(B, F - K) \neq \{0\}.$$

結び目 K が 特性 Q^* (Property Q^*) を持つとは、 K が特性 Q を持ち、さらに次の条件をみたすときをいう:

- ④ $\partial N(K; F)$ の 1 つの成分を K^* とし、 K^* の表わす $H_1(S^3 - K)$

$\cong \mathbb{Z}$ の元を $[K^*]$ と書くとき, $|[K^*]| \geq 3$.

4.19 定義 [D17]: 結び目 K が interpolating-曲面 F を持つとは、閉曲面 $F \subset S^3$ が次の条件をみたすときをいう:

① $K \subset F$;

② $S^3 - F$ の 2 つの領域の閉包を A, B とするとき, K は $H_1(A), H_1(B)$ の free factor を生成しない。

さらに条件

③ $F - K$ が連結;

をみたすとき, interpolating-曲面 F は 非自明 であるという。

自明な (= $F - K$ が連結でない) interpolating-曲面は常に存在することが容易に確かめられる。

4.20 命題 [D22]: 結び目 K が特性 Q を持つ $\iff K$ が非自明な interpolating-曲面を持つ。□

4.21 命題 [D21]: 結び目 K が特性 Q^* を持つば特性 P を持つ。□

4.22 定義 [D21]: 結び目 K が 特性 Q^{**} (Property Q^{**}) を持つとは、次の 4 条件をみたす閉曲面 $F \subset S^3$ が存在するときをいう:

① $K \subset F$;

② $F - K$ が連結;

③ $S^3 - F$ の 2 つの領域の閉包を A, B とするとき,

$$\pi_1(A) / i_{\#} \pi_1(F - K) \neq \{1\}, \quad \pi_1(B) / i_{\#} \pi_1(F - K) \neq \{1\};$$

④ $|[K^*]| \geq 8$, 但し K^* は 4.18 ④ で定義したものの。

4.23 命題 [D21]: 結び目 K が特性 Q^{**} を持つば特性 P を持つ。□

4.24 定義 [D20]: 結び目 K が 特性 PP (parabolic Property P) を持つ

とは、 $\pi_1(S^3 - K)$ の上方表示

$$\pi_1(S^3 - K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$$

に対して、

$$\pi_1^j(K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid y_1, y_2, \dots, y_n, l^j = x_1, (l \text{ は } K \text{ の 緯線}) \rangle$$

とおくとき、(任意の $j \in \mathbb{Z}$ について、表現

$$\theta_j: \pi_1(S^3 - K) \longrightarrow \text{PSL}(2; *), \quad \theta_j(l^j) = \theta_j(x_1),$$

$$* = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p, \mathbb{C}_p,$$

が存在するときをいう。

4.25 命題 [D20]: 結び目 K が特性 PP を持つば特性 P を持つ。□

さて特性 P を持つ結び目の類は、これ迄にかなり多数知られてゐる。その証明に用ゐる手段としては、これ迄に挙げた種々の特性 X の他に、主なるものは次の3つの補題である。

4.26 補題 [D1]: $V \subset S^3$ を平凡型の種数1のハンドル体 (i.e. 平凡型結び目の正則近傍) とし、 $K \subset \dot{V}$ を単純閉曲線とする。 K を (p, q) の Dehn 手術して得られた閉多様体のなかで、 ∂V によつて囲まれる境界付多様体を $V(K; (p, q))$ で表わすことにする。もし V の m 円板 D で、 $D \cap K$ が1点を交叉するものがあるならば、

$$V(K; (p, q)) \not\cong V \quad (\cong: \text{ホモトピー同値を示す}). \quad \square$$

4.27 補題: Σ^3 をホモトピー-球面, T を種数 1 の閉曲面とする.
 T の任意の埋蔵 $T \subset \Sigma^3$ について, $\Sigma^3 - T$ の 2 つの領域の閉包を A, B とすれば,

$$A \simeq V \quad \text{または} \quad B \simeq V$$

が成り立つ. 但し V は種数 1 のハンドル体 とする. \square

4.28 補題 [D1], [D21]: K_0, K を結び目とし, K_0 は平凡型とする.
 $J \subset {}^oN(K_0; S^3)$ を単純閉曲線とし, $\varphi: N(K_0; S^3) \rightarrow N(K; S^3)$ を忠実な同相写像 (ie. K_0 の緯線 $\rightarrow K$ の緯線: 字す同相写像) とする.
 このとき, J が特性 P を持つならば, $\varphi(J)$ も特性 P を持つ. \square

4.29 特性 P を持つ結び目一覧 (各結び目類の定義については, それぞれ文献参照のこと. また各類の中の平凡型は除く.)

A. composite knots : [D1] 4.26, 4.27 ; [D4] π_1 の計算, 4.27.

B. twist knots : [D1], [D4] いずれも π_1 の計算; [D20] PP.

C. doubled knots : [D1] B と 4.28 ; [D4] B に reduce.

D. torus knots : [D5] π_1 の計算; [D21] Q^* .

E. (p, q) -cable knots K about K' : [D4] $|p| \neq 1, |pq| \neq 2$ の場合に π_1 の計算;
 [D21] $|p| \neq 1, |q| \neq 2$ の場合に π_1 の計算; ($|q|=1$ or $p=0$ or $q=0$ のときは,
 K は K' と同じ型になるか, 平凡型になる.)

F. two-bridge knots (α, β) : [D14] $\alpha = |2p(2m-1)+1|, \beta = 2p, p \geq 0, m \neq 1, \pi_1$ の計算;
 [D20] ある多項式 $R(x)$ について, $R(j) \neq 1 (\forall j \neq 0)$ をみたす結び目, PP;
 尚, 高橋元男氏からすべての two-bridge knots について証明したとのこと.

- G. prezel knots (p, q, r) : [D21] r : even, $p+q \neq 0$, $(p, q) = 1$, Q^* ; [D20] r : even, $p+q \neq 0$, PP. (p, q, r の高々 1 \rightarrow "even のとき結び目にはあつ.)
- H. weakly splittable knots: [D3].
- I. $I(W; K) \neq (0, 0, \dots)$ なり knots: [D4].
- J. totally knotted knots with 2 clasping singularities: [D16].
- K. doubly twist knots $T(m, n) \subset$ unknotted handlebody T of genus 1, $K \neq$ 非平凡型 knot, $\varphi: T(m, n) \rightarrow N(K; S^3)$ \neq 忠実な同相写像としたとき
に得られる knots $\varphi(T(m, n))$: [D18] $(m, n) \neq (\text{even}, \pm 1)$, C を含む.
- L. classical knots (9 crossing まで): [D20] PP. ただし次を除く: $8_{10}, 9_n$
 $n = 24, 29, 32, 33, 34, 38, 39, 41, 46, 47, 49$. \square

4.30. 定義 [D15]: 結び目 K が 特性 R (Property R) を持つとは、任意の $g \in \mathbb{Z}$ について、 $M(K; (0, g)) \neq S^2 \times S^1$ のときとする。

結び目 K が 特性 R' (Property R') を持つとは [D10], (任意の $g \in \mathbb{Z}$ について、 $M(K; (0, g)) \neq S^2 \times S^1$ のときをいう。平凡型結び目は特性 R を持たないことが知られる唯一の結び目である。

4.31 予想 R : 非平凡型のすべての結び目は特性 R を持つ (?) \square

4.32 特性 R を持つ結び目一覧: (各類の中の平凡型は除く.)

- A. composite knots: [D15] π_1 の計算, R' .
- B. doubled knots: [D15] π_1 の計算, R' .
- C. knots with Alexander polynomial $\neq 1$: [D15] π_1 の計算, R' ; [D19]
- D. knots of genus 1: [D10] (すべてではない)

E. non slice knots : [D8] R.

4.33 特性 P^* を持つ絡み目一覧 :

A. 特性 P を持つ絡み目.

B. torus links : [D27], [D2].

C. composite links $L_1 \# L_2$ of L_1 and L_2 with Property P^* : [D27].

4.34 予想 : 素な Lickorish 絡み目はすべて特性 P^* を持つ(?)

PC \iff 予想 4.34 \square

§5. 球面 S^3 の分岐被覆空間

5.1 定理 [E1]: 任意の閉多様体は、 S^3 の分岐被覆空間となり、この際 (下階) 分岐集合は S^3 の 1 次元閉部分多様体 (i.e. 結び目の絡み目) となる。 \square

この 1920 年代の論文は、かなりスケッチ風の証明で、最近になって [E6], [E14] 等によって完全な証明が与えられると共に状況もより明確となった。まず定義から述べねば、ここでは後の話とに必要十分な形で制限してある。

5.2 定義 [本講義録中の河野氏の記事参照]: M, N を閉多様体とし、 $\pi: M \rightarrow N$ を全射連続写像とする。(PL 圏で議論していることに注意。)

$$B_\pi = \{x \in M \mid x \text{ において, } \pi \text{ が局所同相でない}\}$$

とみると、 B_π は M の閉部分集合である。

$$\pi(B_\pi) = L \subset N, \quad \pi^{-1}(P) = \tilde{L} \subset M$$

とおく. $B_\pi \subset \tilde{L}$ であるが, 必ずしも $B_\pi = \tilde{L}$ ではない.

$\pi: M \rightarrow N$ が 上階分岐集合 \tilde{L} , 下階分岐集合 L をもつ 分岐被覆 であるとは, 次の2条件をみたすときをいう:

(i) N の閉部分集合の原像の連結成分が, M の位相の基である;

(ii) $\pi|_{M-\tilde{L}}: M-\tilde{L} \rightarrow N-L$ が (普通の意味の) 被覆である.

このとき, M を L 上で 分岐する N の 分岐被覆空間 という.

また (ii) を, 随伴する非分岐被覆 と呼ぶ. 随伴する非分岐被覆が n 重被覆 (resp. 正則) のとき, $\pi: M \rightarrow N$ を n 重分岐被覆 (resp. 正則分岐被覆) と呼ぶ. 点 $x \in \tilde{L}$ が 分岐指数 e を持つとは, x の近くで π が e 対1写像になっている場合をいう. この数は \tilde{L} の連結成分上では一定の値をとる.

5.3 命題 [E3]: $\pi: M \rightarrow N$ が上の意味で有限分岐被覆ならば, L は N の絡み目 (i.e. 1次元閉部分多様体), \tilde{L} は M の絡み目 (i.e. 1次元閉部分多様体) とする. \square

以下, 上下の分岐集合 \tilde{L}, L を明記する必要があるときは, 分岐被覆として, $\pi: (M, \tilde{L}) \rightarrow (N, L)$ をこの記法を用いる.

5.4 命題 [E3]: N を閉多様体, $L \subset N$ を絡み目とすると, L 上で分岐する N の有限分岐被覆空間は, $N-L$ の有限被覆空間によって一意的に決まる. \square

5.5 定義: 上の命題 5.4 より、絡み目 $L \subset N$ 上で分岐する N の n 重分岐被覆空間は、 $\pi_1(N-L)$ の n 次対称群 S_n への可移表現 $\phi: \pi_1(N-L) \rightarrow S_n$ によって一意に定まる。 Z_n を巡回置換 $\tau = (1\ 2\ \dots\ n)$ によって生成される位数 n の巡回群とするとき、 L の各成分の経線すべて τ に移すような表現

$$\phi: \pi_1(N-L) \rightarrow Z_n < S_n$$

に対応する分岐被覆空間を、 n 重巡回被覆空間と呼ぶ。特に $N = S^3$ の場合には、次の標準図式を得る:

$$\pi_1(S^3-L) \xrightarrow{\sigma} H_1(S^3-L) \cong \bigoplus_{\substack{m_i \\ i=1}}^n \mathbb{Z} \xrightarrow[\substack{Y \\ Y(m_i) = \tau}]{} Z_n < S_n$$

但し、 t_i は L の成分 K_i の経線、 σ は Hurewicz の準同型写像。

このとき、 $\phi = Y\sigma$ に対応する分岐被覆空間は、 L 上で分岐する S^3 の n 重巡回分岐被覆空間になる。これは結び目理論で常用するもので、Seifert 曲面を利用して作る分岐被覆空間と一致する。また 2 重分岐被覆はすべて巡回分岐被覆である。

5.6 定理 [E7], [E14] etc: 任意の閉多様体 M に対し、絡み目 $L \subset S^3$ が存在し、 M は L 上で分岐する S^3 の 3 重 (非正則) 分岐被覆空間として得られる。特に L は結び目とすることもできる。

[E7] と [E14] の証明は多少異なる。[E14] の方法による [A9] の才 10 章の説明がわかりよい。証明は、本質的に定理 4.7(3) を用いる。またこの定理における「3 重」は一般的には最大の可

能性である。例えば、 $S^1 \times S^1 \times S^1$ は S^3 の 2 重分岐被覆空間となり得ないし、またいかなる巡回分岐被覆空間ともなり得ない [E5], [E10]。また $\tilde{L} \subset M$ は一般に 2 本の単純閉曲線 \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 から成り、1 本 \tilde{K}_1 の分岐指数は 2、もう 1 本 \tilde{K}_2 の分岐指数は 1 であって、 \tilde{K}_2 は定義 5.2 の B_π には含まれない。

5.7 定理 [E8]: 任意の閉多様体 M に対し、絡み目 $L \subset S^3$ が存在し、 M は L 上で分岐する S^3 の分岐被覆空間であって、上階分岐集合 \tilde{L} の各成分は M で円板の境界となる。□

5.8 問題 [E15]: 任意のホモトピー(ホモロジ-)球面は、 S^3 の 2 重分岐被覆空間となるか? 任意のホモトピー(ホモロジ-)球面は、 S^3 の巡回分岐被覆空間となるか? □

5.9 問題 [E15]: 任意の閉多様体は、 S^3 の 2 重分岐被覆空間の 2 重分岐被覆空間の……の 2 重分岐被覆空間となるか? □

もし問題 5.9 が肯定的であって、PC の反例があればとすれば、 S^3 の 2 重分岐被覆空間として反例が作れることになる。

5.10 定理 (1) 結び目 $K \subset S^3$ 上で分岐する S^3 の 2 重分岐被覆空間が S^3 となるのは、 K が平凡型るときに限る [E25]。

(2) 2 成分あるいはそれ以上の成分から成る絡み目 $L \subset S^3$ 上で分岐する S^3 の 2 重分岐被覆空間 M について、 $H_1(M) \neq \{0\}$ 。

(3) 非平凡型の 2 つの結び目 K_1, K_2 の和 $K = K_1 \# K_2 \subset S^3$ 上で分岐する S^3 の分岐被覆空間 M について、 $\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$

が成立する。但し M_1, M_2 はそれぞれ K_1, K_2 上で分岐する S^3 の分岐被覆空間とする。□

5.11 予想 [E15]: $K \subset S^3$ を非平凡型で素な結び目とし, M を K 上で分岐する S^3 の 2重分岐被覆空間とすると, M は単連結にはならない(?) □

この予想を結び目群の言葉で述べると次のようになる:

5.12 予想 [E5]: $K \subset S^3$ を非平凡型の素な結び目とし, α を $\pi_1(S^3 - K)$ の元で, K の経線で実現されるものとすると, 剰余類群 $\pi_1(S^3 - K) / \langle \alpha^2 = 1 \rangle$ は非可換群である(?) □

5.13 定義 [E14]: 絡み目 $L \subset S^3$ が強意の両手型 (strongly invertible) とは, 向きを保存する周期 2 の同相写像 $u: S^3 \rightarrow S^3$ が存在し, 次の性質をみたすときとする: L の各成分 K_i について, 制限写像 $u|_{K_i}$ が $K_i \rightarrow K_i$ の周期 2 の同相写像であって, 丁度 2 個の不動点を持つ。

もちろん 強意の両手型絡み目は 両手型 (invertible) であるが, 逆はまだ解決されていない。

5.14 定理 [E15]: 強意の両手型絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ を Dehn 手術することによって得られる閉多様体を M とすると, M は高々 $\mu + 1$ 成分の絡み目上で分岐する S^3 の 2重分岐被覆空間となる。逆に, S^3 の 2重分岐被覆空間 M は, ある強意の両手型絡み目を Dehn 手術することによって得られる。□

5.15 定理 [E15]: もしすべて a 強意の両手型結び目が特性 1 を持つならば、予想 5.11 (従って 5.12) は正しい。□

5.16 定理 [B4], [E15], [E24]: 閉多様体 M が種数 2 (あるいはそれ以下) の H -分解を持つならば、 M は S^3 の 2 重分岐被覆空間となる。□

追記 (1978年11月): Princeton に滞在中の河内明夫氏からの復りによれば、11月16日のセミナーにおいて Thurston が Smith 予想が正しいことを証明したとのことです。可なり。

定理 A (Smith 予想): S^3 (または一般にホモトピー-球面 Σ^3) 上の任意の differentiable \mathbb{Z}_n action について、その不動点集合は平凡型結び目である。□

<注> Dehn 補題 (or Loop 定理) によつて、「ホモトピー-球面 Σ^3 の結び目が平凡型である」との定義を、「円板の境界となる結び目型」としてよい。

さてこの定理 A は、実は次の定理 B の系として得られる:

定理 B: Σ^3 をホモトピー-球面、 $K \subset \Sigma^3$ を非平凡型結び目とする。 K 上で分岐する Σ^3 の n 重巡回分岐被覆空間は決して単連結とはならない。□

定理 B から定理 A を導くのは容易である。これは前記予想 5.11 (従って 5.12) の肯定的な解答であつて (もっと広いか)、上記

の定理 5.16 と合せることにより、次が得られる:

定理 C: 種数 2 の H-分解を持つホモトピー-球面は S^3 にある。□

残念ながら今のところ定理 B の証明については不明ですが種々の情報からみて、かなり信頼が持てそうです。

§6. 球体被覆

この節では、特にことわらない限り、 M^n によってコンパクトで連結な n 次元 PL 多様体を表わす。

6.1 定義 [F4] etc.: n 次元多様体 M^n の、 n 次元部分球体の有限個の集まり $\mathcal{B} = \{B_1^n, B_2^n, \dots, B_k^n\}$ について、

$$(i) \bigcup_{i=1}^k B_i^n = M^n;$$

となるとき、 \mathcal{B} を M^n の 弱球体被覆 (weak ball covering) と呼ぶ。

弱球体被覆のさらに条件

(ii) $B_i^n \cap B_j^n = \partial B_i^n \cap \partial B_j^n$ が有限個の $(n-1)$ 次元多様体となる; をもみたすとき、 M^n の 球体被覆 (ball covering) と呼ぶ。

M^n のすべての弱球体被覆 $\{\mathcal{B}_\lambda\}$, および球体被覆 $\{\mathcal{B}_\mu\}$ について、

$$\beta(M^n) = \min_{\lambda} \{\#\mathcal{B}_\lambda\}, \quad b(M^n) = \min_{\mu} \{\#\mathcal{B}_\mu\}$$

をそれぞれ M^n の 弱球体被覆数, 球体被覆数 と呼ぶ。ただし $\#\mathcal{B}$, $\#\bar{\mathcal{B}}$ はそれぞれの要素の個数を表す。 $\beta(M^n) \leq b(M^n)$ は明らかである。

6.2 定理 [F4]: 任意の n 次元多様体 M^n について.

$$1 \leq b(M^n) \leq n+1. \quad \square$$

この定理の証明は、多様体のハンドル分解の議論に依る.

$n=3$ のときは、 H -分解の存在によって明らかであろう.

6.3 命題 [F4]: M_1^n, M_2^n を n 次元多様体とするとき.

$$b(M_1^n \# M_2^n) \leq \max. \{b(M_1^n), b(M_2^n)\}.$$

予想 C(n): $b(M_1^n \# M_2^n) = \max. \{b(M_1^n), b(M_2^n)\}$ (?) \square

C(1), C(2), C(3) は正しいことが知られる.

6.4 命題: 任意の整数 p, q (≥ 1) について, $b(S^p \times S^q) = 3$. \square

6.5 命題: M^n を境界付 n 次元多様体とし, $D(M^n)$ をその double とすると, $b(D(M^n)) \leq b(M^n) + 1$ である. また等号が成立しない例が存在する. \square

6.6 命題 [F14]: M^m, N^n をそれぞれ m 次元・ n 次元多様体とすると, $b(M^m \times N^n) \leq b(M^m) + b(N^n) - 1$ である. ただし等号が成立しない例が存在するが、境界付多様体である.

予想 P(m, n) (= P(n, m)): M^m, N^n が共に閉多様体ならば.

$$b(M^m \times N^n) = b(M^m) + b(N^n) - 1 \quad (?) \quad \square$$

6.7 予想 B(n, k): M^n を n 次元閉多様体とする. もし自然数 k が存在して $\rho(M^n) \leq k$ ならば, $b(M^n) \leq k$ が成立する (?) \square
 $n=4$ で $\partial M^4 \neq \emptyset$ の場合に反例が存在する. $B(n, 2), n \neq 4$, は正しい. また $B(n, n+1)$ も常に正しい.

6.8 定理 [F4]: M^n が n 次元ホモロジースphere ならば、 $b(M^n) \leq 3$ ならば、 $M^n \cong S^n$ である。□

6.9 系: M^n が acyclic な n 次元多様体とする。もし $b(M^n) \leq 2$ かつ $n \leq 4$ ならば、 $M^n \cong D^n$ である。□

6.10 定理: M^n が n 次元閉多様体とするとき次の成立する:

$$M^n \cong S^n \iff b(M^n) = 2 \iff \beta(M^n) = 2 \quad (\text{但し } \Leftarrow \text{ は } n \neq 4). \quad \square$$

以下 3次元多様体についての結果を述べてみる。

6.11 定理: 任意の 3次元多様体 M^3 について、 $\beta(M^3) = b(M^3)$ 。□

6.12 定理: M^3 が境界付 3次元多様体とする。

$$b(M^3) = 2 \iff M^3 \cong \alpha(S^1 \times S^2) \# \beta(S^1 \times_{\tau} S^2) \text{ から 有限個 } > 0 \text{ の } \\ \text{3次元閉球体を除いた多様体。}$$

ただし $S^1 \times_{\tau} S^2$ は、 S^1 上の twisted S^2 bundle を示す。□

6.13 定理: M^3 が 3次元閉多様体とする。

$$b(M^3) = 3 \iff \text{整数 } k, \varepsilon \text{ が存在し, } k + \varepsilon \geq 1, \varepsilon = 1 \text{ or } 0,$$

$$M^3 \cong k(S^1 \times S^2) \# \varepsilon(S^1 \times_{\tau} S^2). \quad \square$$

6.14 定理: M^3 が 3次元閉多様体とし、 $M^3 \neq S^3$ とし、 $\pi_1(M^3) \cong \{1\}$

かつ $H_2(M^3) = \{0\}$ とする。(定理 6.13, 6.10 等より $b(M^3) = 4$.)

$\mathcal{B} = \{B_1^3, B_2^3, B_3^3, B_4^3\}$ が M^3 の球体被覆とすれば次の成立する:

(i) $B_i^3 \cap B_j^3 = \partial B_i^3 \cap \partial B_j^3$ ($i \neq j$) は、有限個の円板である;

(ii) $(M^3; B_{i_1}^3 \cup B_{i_2}^3, B_{i_3}^3 \cup B_{i_4}^3)$ は M^3 の H-分解となる。ただし

$$\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ とする。} \quad \square$$

これらの命題でみる通り、球体被覆の議論はそれだけで3次元多様体(特にPC)がどうこうというべきものではないが、多くの問題が球体被覆の言葉で定式化されることがわかる。特にH-分解などに新しい観点を与えるだろうことは、十分に期待される。これ迄のところ、3次元よりはむしろ4次元で興味ある結果が得られている [F4], [F12], [F15], [F3]。PCとの関連で、ごく一部を記録しておく。

6.15 命題: 単連結な4次元多様体 M^4 については、 $\beta(M^4) \leq 3$ が成立する。□

6.16 命題: ホモトピー-4次元球面 Σ^4 に対して、整数 $k \geq 0$ が存在し、 $b(\Sigma^4 \# k(S^2 \times S^2)) \leq 3$ となる。□

6.17 例題 [F1]: (1) $n \geq 4$ について、可縮な n 次元多様体 M^n で、 $M^n \neq D^n$, $\beta(M^n) = 2$ なるものが存在する。

(2) 可縮な4次元多様体 M^4 で、 $\beta(M^4) = 2$, $b(M^4) = 3$ なるものが存在する。□

6.18 命題 [F4]: PC(4) は4次元Poincaré予想を、SC はSchönfliesの予想を示すと、次の関係がある:

$$\begin{array}{c} \text{予想 } B(4, 3) \\ \text{予想 } C(4) \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} \text{PC}(4) \longrightarrow \text{SC} \longrightarrow \text{予想 } B(4, 2). \quad \square$$

尚、ここで述べた(弱)球体被覆の他に、いくつか同じような概念が導入されているので参照されたい; [F2], [F6], [F13]等。

§7. Spines, Zeeman 予想

多様体, 多面体 (polyhedron) に関する collapse の概念および spine については既知のものとする, [A11]. とこゝで次はよく知られる: (再び多様体は 3 次元とする.)

7.1 命題: M を境界付多様体とする.

$$(1) M \searrow P, \dim P \leq 2.$$

$$(2) M \searrow 0 \text{ (collapsible)} \iff M \cong D^3.$$

$$(3) M \searrow K \text{ (1次元多面体)} \iff M \text{ はハンドル体. } \square$$

そこで spine として 2 次元多面体が出てくる場合の問題となるわけであるが, [G24] で dunce hat と名付けた 2 次元多面体で, $D^3 \searrow (\text{dunce hat}) \searrow 0$ なるものを見つけた. しかも, $(\text{dunce hat}) \times I \searrow 0$ である. そこで

$$C_2 = \{ \text{すべて } a \text{ の可縮なコンパクトな 2次元多面体} \}$$

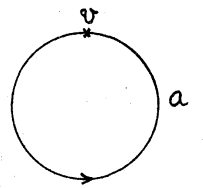
とおいたとき.

7.2 予想 Z (Zeeman 予想): 任意の $P \in C$ について, $P \times I \searrow 0$ (?) \square

7.3 命題 [G24]: 予想 Z \iff BC \iff PC. \square

予想 Z は PC のためには いささか虫がよすぎるという批判もありますが, 以下この予想をめぐり考察をまとめてみる.

7.4 定義: $U \in C_2$ を, 円周 a に円板 D^2 をその境界で貼り合せて得られる多面体の類とする. a 上に 1 点 v と, 向きを指定する.



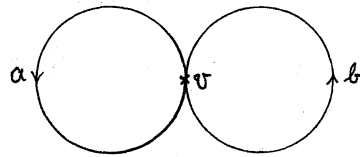
∂D^2 の貼り合せ方を, $\pi_1(a; v)$ で読んで a と a^{-1} の語で示したものを $W(a, a^{-1})$ と書くことにする. $P \in \mathcal{U}$ ならば, $W_P(a, a^{-1})$ の a に関する total degree は ± 1 である. 例えは dunce hat については, $W(a, a^{-1}) = a a^{-1}$ である. (一意ではない.)

7.5 定理: $P \in \mathcal{U}$ について.

- (1) 点 $x \in D^2$ が存在して, $P \times I \searrow x \times I \searrow 0$ [G8].
- (2) もし $W_P(a, a^{-1}) \neq a, a^{-1}$ ならば, $P \times I \not\searrow v \times I$ [G22].
- (3) $\exists y \in a-v, P \times I \searrow y \times I \iff W_P(a, a^{-1}) = a a^{-1} a a^{-1} \dots a^{-1} a$. \square

7.6 定義: $\mathcal{W} \subseteq C_2$ を, 1 点 v を

共有する 2 個の円周 $a \cup b$ に, 2 枚の円板 D_1^2 と D_2^2 を各々その境界で貼り合せ得られる多面体の類とする.



$\partial D_1^2, \partial D_2^2$ の貼り合せ方は, a と b に向きを指定したとき.

$$\partial D_1^2 \rightarrow a^p b^q, \quad \partial D_2^2 \rightarrow a^r b^s, \quad |ps - qr| = 1$$

で表わせる. このようにして得られる多面体を $P(p, q, r, s)$ と書くことにする.

7.7 命題 [G21], [G18]: $P = P(1, n, m, nm \pm 1) \in \mathcal{W} \implies P \times I \searrow 0$. \square

7.8 命題 [G9] (1) $P = P(2, 3, 3, 4)$ については, $P \times I \searrow 0$ であるが, 点 $x \in P$ について $P \times I \not\searrow x \times I$ である.

(2) $P = P(2, 3, 2n+1, 3n+1), P(2, 3, 2n+1, 3n+2) \in \mathcal{W} \implies P \times I \searrow 0$.

7.9 命題 [G6]: $P = P(p, q, r, s) \in \mathcal{W}$ について.

(1) $p, q, r, s \geq 2$ のとき, 任意の点 $x \in P$ について, $P \times I \searrow x \times I$.

(2) p, q, r, s のうち 1 つだけ 1 のとき: ($p=1$ または $q=1$)

$$P \times I \searrow x \times I \iff x \in \mathring{D}_2^2$$

(3) p, q, r, s のうち 丁度 2 つだけ 1 のとき:

(イ) $p=r=1$: $P \times I \searrow x \times I \iff x \notin \mathring{b}$.

(ロ) $p=q=1$: $P \times I \searrow x \times I \iff x \in \mathring{D}_2^2$.

(4) p, q, r, s のうち 丁度 3 つが 1 のとき:

$$P \times I \searrow x \times I \iff x = v. \quad \square$$

7.10 定義: $C_n = \{ \text{すべての可縮でコンパクトな多面体} \}$

とする. 多面体 $P \in C_n$ が q -collapsible とは, $P \times I^q \searrow 0$ のときをいう.

7.11 定理 [G3], [G4]: (1) $P \in C_n$ は $\max\{6, 2n\}$ -collapsible.

(2) $n \geq 3$ のとき, 1-collapsible ではない元 $P \in C_n$ が存在する.

(3) もし元 $P \in C_2$ で, (イ) P は多様体の spine になり,かつ (ロ) 3-collapsible ではない... という条件をみたすものが存在するならば, **PC** は成立しない.

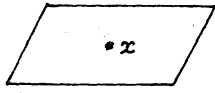
(4) **PC**(4) が成立すれば, $P \in C_2$ は 5-collapsible.

(5) $P \in \mathcal{U}$ は 3-collapsible, [G19]. \square

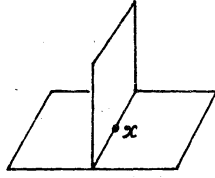
7.12 定義 [G15]: 2次元多面体 P が 特殊 (special) とあるとは, 次の 2 条件をみたすときをいう:

(1) $\forall x \in P$ について星状近傍 $St(x; P)$ は次の 3 つのうちの

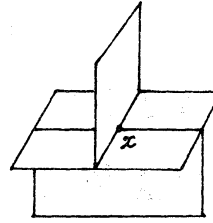
いずれかである：



type 1.



type 2.



type 3.

(2) $K = \{x \in P \mid \text{St}(x; P) \text{ が type 2 または type 3}\}$ とおくとき、 $\text{Cl}(P - N(K; P))$ の連結成分はすべて円板である。

7.13 定義 [G15]: 境界付多様体 M の spine P が 特殊 (special) であるとは、 P が特殊 2 次元多面体 のときをいう。 M の特殊 spine P が条件 (*) を満たすとは、多面体の有限列 $P_0, \dots, P_k = P$ が存在し、次の性質を満たすときをいう：

$$(i) M = P_0 \searrow P_1 \searrow P_2 \searrow \dots \searrow P_k = P,$$

$$(ii) \text{Cl}(P_i - P_{i+1}) = B_i \text{ は 3 次元球体};$$

$$(iii) P_{i+1} \cap B_i \text{ は } B_i \text{ の face (面)}.$$

7.14 定理 [G15]: 任意の境界付多様体 M は、条件 (*) を満たす特殊 spine を持つ。 \square

7.15 定理: $P \in C_2$ が条件 (*) を満たす特殊 spine ならば、 P は 5-collapsible である。 \square

7.16 定理: $P \in C_n$ が条件 (*) を満たす特殊 spine とする。

$$(i) n=3 \implies P \text{ は 4-collapsible である。}$$

$$(ii) n \geq 4 \implies P \text{ は 3-collapsible である。 } \square$$

7.17 問題: n 次元球体 D^n の spine は 1-collapsible か? \square

これについては、今 n と $n-2$ の結果がある。

7.18 定理 [G3]: D^n の spine は n -collapsible である。 \square

7.19 定理 [G15]: P を条件(*)を満すような D^n の特殊spine とすれば、2-collapsible である。 \square

その他、acyclic な特殊2次元多面体の基礎的研究が [G10] に、またこれらが3次元多様体の spine であるか否かの考察等が [G11], [G12], [G14] 等にある。一方、予想Zとは直接関係はないが、[G25] を基礎として、spine より多様体の基本群の表示を求めたり、多様体の分類をしたりという基礎的研究も近年見られるようになった、[G16], [G17], [G19] 等。

REFERENCES

以下の文献表は 大きく7項目に分けてあるが、便宜上の
ものであって厳密な基準があるわけではない。D, E*, F, G は
ほぼ完全リストに近いが、その他は本稿の為のものである。
また数項目に渡るものも、一項目にだけ載せてある。

A. General

- [A1] Bing, R.H.: Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture, Lectures on Modern Mathematics, vol. II (T.L.Saaty(ed.)), John Wiley & Sons, 1963, 93-128.
- [A2] Haken, W.: Various aspects of the three-dimensional Poincaré problem, Topology of Manifolds (J.C.Cantrell & C.H.Edwards, Jr.(ed.)), Markham Publ., 1970, 140-152.
- [A3] Hempel, J.: 3-Manifolds, Ann.of Math.Studies #86, Princeton Univ.Press, 1976.
- [A4] Milnor, J.: A unique factorization theorem for 3-manifolds, Amer.J. Math., 84(1962), 1-7.
- [A5] Moise, E.E.: Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Graduate texts in Math. #47, Springer-Verlag, 1977.
- [A6] Price, T.M.: Towards classifying all manifolds, Chronicle 7(1978), 1-47.
- [A7] Poincaré, H.: Second complément à l'Analysis situs, Proc.London Math. Soc., 32(1900), 277-308.
- [A8] ———— : Cinquième complément à l'Analysis situs, Rend.Circ.Math. Palermo, 18(1904), 45-110.
- [A9] Rolfsen, D.: Knots and Links, Publish or Perish Inc., 1976.
- [A10] Seifert, H. & Threlfall, W.: Lehrbuch der Topologie, Chelsea, 1947.
- [A11] Zeeman, E.C.: Seminar on Combinatorial Topology (mimeo notes), I.H.E.S. and Univ.of Warwick, 1963-1966.

B. Heegaard Splittings, Diagrams and Sewings

- [B1] Birman, J.S.: On the equivalence of Heegaard splittings of closed orientable 3-manifolds, *Ann. of Math. Studies* #84, Princeton Univ. Press, 1975, 137-164.
- [B2] ——— : Heegaard splittings, diagrams and sewings for closed, orientable 3-manifolds, *Lecture Note for CBMS conference at Va.*, Oct. 8-12, 1977.
- [B3] ——— & Hilden, H.M.: The homeomorphism problem for S^3 , *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79(1973), 1006-1010.
- [B4] ——— & ——— : Heegaard splittings of branched coverings of S^3 , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 213(1975), 315-352.
- [B5] ———, González-Acuña, F. & Montesinos, J.M.: Heegaard splittings of prime 3-manifolds are not unique, *Michigan Math. J.*, 23(1976), 97-103.
- [B6] Craggs, R.: A new proof of the Reidemeister-Singer theorem on stable equivalence of Heegaard splittings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 57(1976), 143-147.
- [B7] Dehn, M.: Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Math. Ann.*, 69(1910), 137-168.
- [B8] Engmann, R.: Nicht-homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 der zusammenhängendem summe zweier Linsenräume, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 35(1970), 33-38.
- [B9] Homma, T.: On presentations of fundamental groups of 3-manifolds of genus 2, to appear.
- [B10] ———, Ochiai, M. & Takahashi, M.: An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two, to appear.
- [B11] Jaco, W.: Heegaard splittings and splitting homeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144(1969), 365-379.
- [B12] ——— : Stable equivalence of splitting homeomorphisms, *Topology of Manifolds* (J.C. Cantrell & C.H. Edwards (ed.)), Markham, 1970, 153-156.

- [B13] Kaneto, T.: On a presentation of the fundamental group of the 3-sphere from its Heegaard diagram, to appear.
- [B14] Maskit, B.: A theorem on planar covering surfaces with application to 3-manifolds, *Ann. of Math.*, 81(1965), 341-355.
- [B15] Ochiai, M.: A counterexample to the conjecture of Volodin-Kuznetsov-Fomenko and Whitehead, *J. Math. Soc. Japan*, to appear.
- [B16] Papakyriakopoulos, C.D.: A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjecture, *Ann. of Math.*, 77(1963), 250-305.
- [B17] ————— : Attaching 2-dimensional cell to a complex, *Ann. of Math.*, 78(1963), 205-222.
- [B18] ————— : Planar regular coverings of orientable closed surfaces, *Ann. of Math. Studies #84*, Princeton Univ. Press, 1975, 261-292.
- [B19] Rapaport, E.S.: Proof of a conjecture of Papakyriakopoulos, *Ann. of Math.* 79(1963), 506-513.
- [B20] Reidemeister, K.: Zur dreidimensional Topologie, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 9(1933), 189-194.
- [B21] Singer, J.: Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35(1933), 88-111.
- [B22] Takahashi, M.: Some simple cases of Poincaré conjecture, to appear.
- [B23] Stallings, J.: How not to prove the Poincaré conjecture, *Ann. of Math. Studies #60*, Princeton Univ. Press, 1966, 83-88.
- [B24] Traub, R.: Poincaré's conjecture is implied by a conjecture on free groups, *J. Res. Nat. Bur. Standard Sec. B*, 71B, (1967), 53-56.
- [B25] Waldhausen, F.: Heegaard Zerlegungen der 3-Sphäre, *Topology* 7(1968), 195-203.
- [B26] Whitehead, J.H.C.: On certain sets of elements in a free group, *Proc. London Math. Soc. (2)*, 41(1936), 48-56.
- [B27] Nagase, T.: A Reidemeister-Singer theorem and signatures of characteristic Heegaard splittings, *Dissertation, Univ. of Illinois at Urbana*, 1978.

- [B28] Volodin, I.A., Kuznetsov, V.E. & Fomenko, A.T.: The problem of discriminating Algorithmically the standard three dimensional sphere, Russian Math.Surveys, 29:5(1974), 71-172.

C. Mapping class groups and Heegaard sewings

- [C1] Birman, J.S.: On Siegel's modular group, Math. Ann., 191(1971), 59-68.
- [C2] ——— : Mapping class groups of surfaces ; a survey, Ann. of Math. Studies #79, Princeton Univ. Press, 1974, 57-71.
- [C3] ——— : Poincaré conjecture and the homeotopy group of a closed 2-manifold, J. Aust. Math. Soc., 17(1974), 214-221.
- [C4] ——— : Braids, Links and Mapping Class Groups, Ann. of Math. Stud. #82, Princeton Univ. Press, 1974.
- [C5] ——— : Special Heegaard splittings for closed oriented 3-manifolds, Topology 17(1978), 157-166.
- [C6] ——— & Hilden, H.M.: On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces, Ann. of Math., 97(1973), 424-439.
- [C7] ——— & Craggs, R.: The μ -invariant of 3-manifolds, and certain structural properties of the group of homeomorphisms of a closed, oriented 2-manifold, Trans. Amer. Math. Soc., 237(1978), 283-309.
- [C8] ——— & ——— : On index-8 \mathbb{Z} -homology 3-spheres, to appear.
- [C9] Dehn, M.: Die Gruppe der Abbildungsklassen, Acta Math., 69(1938), 135-206.
- [C10] Goeritz, L.: Die Abbildungen der Brezelflachen und der Vollbrezel vom Geschlecht 2, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 9(1933), 244-259.
- [C11] Griffiths, H.B.: Automorphisms of a 3-dimensional handlebody, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 26(1964), 191-210.
- [C12] ——— : Some elementary topology of 3-dimensional handlebodies, Comm. Pure & Appl. Math., 17(1964), 317-334.

- [C13] Hua, L.K. & Reiner, I.: On the generators of the symplectic modular group, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 65(1949), 415-426.
- [C14] Klingens, H.: Charakterisierung der Siegel'schen Modulgruppe durch ein endliches System definierender Relationen, *Math.Ann.*, 144(1961) 64-82.
- [C15] Lickorish, W.B.R.: A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold, *proc.Camb.Phil.Soc.*, 60(1964), 769-778. Also *Corrigendum* 62(1966), 679-681.
- [C16] Luft, E.: Actions of the homeotopy group of an orientable 3-dimensional handlebody, *Math.Ann.*, 234(1978), 279-292.
- [C17] Mangler, W.: Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich, *Math.Z.*, 44(1939), 541-554.
- [C18] McMillan, D.R.: Homeomorphisms on a solid torus, *Proc.Amer.Math.Soc.*, 14(1963), 386-390.
- [C19] Nielsen, J.: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I, *Acta Math.*, 50(1927), 184-358. Also III, *Acta Math.* 58(1932), 87-167.
- [C20] Powell, J.: Homeomorphisms of the 3-sphere leaving a Heegaard surface invariant, *Dissertation, Columbia Univ.*, 1977.
- [C21] Suzuki, S.: On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, *Canad.J. Math.*, 29(1977), 111-124.
- [C22] Zieschang, H.: Über einfache Kurven auf Vollbrezeln, *Abh.Math.Sem.Univ. Hamburg*, 25(1962), 231-250.
- [C23] Powell, J.: Two theorems on the mapping class group of a surface, *Proc. Amer.Math.Soc.*, 68(1978), 347-349.

D. Dehn's construction and Property P

- [D1] Bing, R.H. & Martin, J.M.: Cubes with knotted holes, *Trans.Amer.Math.Soc.* 155(1971), 217-231.
- [D2] Clark, B.E.: Surgery on torus and cable links, to appear.
- [D3] Connor, A.C.: Splittable knots, preprint.
- [D4] González-Acuña, F.: Dehn's construction on knots, *Bol.Soc.Math.Mexicana*, 15(1970), 58-79.

- [D5] Hempel, J.: A simply connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of solid torus and the complement of a torus knot, Proc.Amer.Math.Soc., 15(1964), 154-158.
- [D6] ——— : Construction of orientable 3-manifolds, Topology of 3-Manifolds and Related Topics, Prentice-Hall, 1962, 207-212.
- [D7] Kirby, R.: A calculus for framed links in S^3 , Invent.Math., 45(1978), 35-56.
- [D8] ——— & Melvin, P.: Slice knots and Property R, Invent.Math.45(1978), 57-59.
- [D9] Lambert, H.: Planar surfaces in knot manifolds, Pacific J.Math., 39 (1971), 727-733.
- [D10] ——— : Longitude surgery on genus 1 knots, Proc.Amer.Math.Soc., 63(1977),
- [D11] Lickorish, W.B.R.: A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, Ann.of Math., 76(1962), 531-540.
- [D12] ——— : A foliation for 3-manifolds, Ann.of Math., 82(1965), 414-420.
- [D13] ——— : Surgery on knots, Proc.Amer.Math.Soc., 60(1976), 296-298.
- [D14] Mayland, E.J., A class of two-bridge knots with Property-P, Proc.Amer.Math.Soc., 64(1977), 365-369.
- [D15] Moser, L.E.: On the impossibility of obtaining $S^2 \times S^1$ by elementary surgery along a knot, Pacific J.Math., 53(1974), 519-523.
- [D16] Nakagawa, Y.: A new class of knots with Property P, Res.Inst.Math.Sci. Kyoto Univ., 10(1975), 445-455.
- [D17] Neuwirth, L.: Interpolating manifolds for knots in S^3 , Topology 2 (1964), 359-365.
- [D18] Neuzil, J.P.: Surgery on a curve in a solid torus, Trans.Amer.Math.Soc., 204(1975), 385-406.
- [D19] ——— : Elementary surgery manifolds and the elementary ideals, Proc.Amer.Math.Soc., 68(1978), 225-228.

- [D20] Riley, R.: Knots with the parabolic Property P, *Quart. J. Math. Oxford*(2), 25(1974), 273-283.
- [D21] Simon, J.: Some classes of knots with Property P, *Topology of Manifolds* (J.C. Cantrell & C.H. Edwards (ed.)), Markham, 1970, 195-199.
- [D22] ——— : On knots with nontrivial interpolating manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 160(1971), 467-473.
- [D23] ——— : On the problems of determining knots by their complements and knot complements by their groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 57(1976), 140-142.
- [D24] Wallace, A.H.: Modifications and cobounding manifolds, *Canad. J. Math.*, 12(1960), 503-528.
- [D25] Weaver, M.: Dehn's construction and the Poincaré conjecture, *Pacific J. Math.*, 73(1977), 247-255.
- [D26] ——— : A type of homology preserving surgery on 3-manifolds, *J. London Math. Soc.*(2), 17(1978), 183-185.
- [D27] Yokoyama, K.: On links with Property P*, *Yokohama Math. J.*, 25(1977), 71-84.

E. Branched covering spaces

- [E1] Alexander, J.W.: A note on Riemann space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 26(1919) 370-372.
- [E2] Birman, J.S.: On the stable equivalence of plat representations of knots and links, *Canad. J. Math.*, 28(1976), 264-290.
- [E3] Fox, R.H.: *Covering spaces with singularities*, Algebraic Geometry and Topology, Princeton Univ. Press, 1957, 243-257.
- [E4] ——— : Construction of simply connected 3-manifolds, *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, 1962, 213-216.
- [E5] ——— : A note on branched cyclic coverings of sphere, *Rev. Mat. Hisp. Amer.*, 32(1972), 158-166.

- [E6] Hilden, H.M.: Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3 , Bull.Amer.Math.Soc., 80(1974), 1243-44.
- [E7] ———— : Three-fold branched coverings of S^3 , Amer.J.Math., 98 (1976), 989-997.
- [E8] ———— , Montesinos, J.M. & Thickstun, T.: Closed oriented 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3 of special type, Pacific J.Math., 65(1976), 65-76.
- [E9] Hirsch, U.: Über offene Abbildungen auf die 3-Sphäre, Math.Z., 140 (1974), 203-230.
- [E10] ———— & Neumann, W.D.: On cyclic branched coverings of sphere, Math. Ann., 215(1975), 289-291.
- [E11] Montesinos, J.M.: Sobre la conjetura de Poincaré y los recubridores ramificados sobre un nudo, Tesis doctoral, Univ. de Madrid, 1972.
- [E12] ———— : Reduccion de la conjetura de Poincaré a otras conjeturas geometricas, Rev.Mat.Hisp-Amer., 32(1972), 33-51.
- [E13] ———— : Una nota a un teorema de Alexander, ibid. 158-166.
- [E14] ———— : Three-manifolds as 3-fold branched covers of S^3 , Quart.J.Math.Oxford(2), 27(1976), 85-94.
- [E15] ———— : Surgery of links for double branched covers of S^3 , Ann.of Math.Stud. #84, Princeton Univ.Press, 1975, 227-259.
- [E16] ———— : Minimal plat representations of prime knots and links are not unique, Canad.J.Math., 28(1976), 161-167.
- [E17] McA Gordon, C. & Heil, W.: Simply connected branched coverings of S^3 , Proc.Amer.Math.Soc., 35(1972), 287-288.
- [E18] Nishida, O. & Suzuki, S.: Remarks on branched covering spaces of the 3-sphere, Math.Sem.Notes Kobe Univ., 5(1977), 401-411.
- [E19] Reddy, W.L.: Branched coverings, Michigan Math.J., 18(1971), 107-114.
- [E20] Reidemeister, K.: Knotentheorie, Springer-Verlag, 1932.
- [E21] Suzuki, S. & Hosokawa, F.: いくつかの単純な絡み輪の分岐被覆空間, 数理解析研講究録 #309, 1970.

- [E22] Takahashi, M.: Two knots with the same 2-fold branched covering space, *Yokohama Math.J.*, 25(1977), 91-99.
- [E23] ———— : An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's theorem, *Tsukuba J.Math.*, to appear.
- [E24] Viro, O.Ja.: Linking, 2-sheeted branched coverings and braids, *Math. USSR Sbornik*, 16(1972), 223-236.
- [E25] Waldhausen, F.: Über Involutionsen der 3-Sphäre, *Topology* 8(1969), 81-91.

Branched coverings については, このほかに [E21] の References 参照.

F. Ball coverings

- [F1] Glaser, L.: Intersections of combinatorial balls and of Euclidean spaces, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 122(1966), 311-320.
- [F2] Hempel, J. & McMillan, D.: Covering three manifolds with open cells, *Fund.Math.*, 64(1969), 99-104.
- [F3] Ikeda, H. & Yamashita, M.: Closed 4-manifolds covered by three 4-balls, *Yokohama Math.J.*, 26(1978),
- [F4] Kobayashi, K. & Tsukui, Y.: The ball coverings of manifolds, *J.Math.Soc. Japan*, 28(1976), 133-143.
- [F5] ———— & ———— : Manifold の ball covering について, *数理解析 研講究録* #243(1975), 77-87.
- [F6] Luft, E.: Covering of manifolds with open cells, *Illinois J.Math.*, 13(1969), 321-326.
- [F7] Mielke, M.: Spherical modifications and coverings by cells, *Duke Math.J.* 36(1968), 49-53.
- [F8] Moran, D.: Minimal cell coverings of some sphere bundles, *Comment.Math. Univ.Carolinae*, 14(1973), 647-650.
- [F9] ———— : Cell coverings and residual sets of closed manifolds, *Comment. Math.Univ.Carolinae*, 17(1976), 516-518.

- [F10] Osborne, R.P. & Stern, J.: Covering manifolds with cells, Pacific J. Math. 30(1969), 201-207.
- [F11] Summerhill, R.: A characterization of the connectivity of a manifold in terms of large open cells, Proc. Amer. Math. Soc., 45(1974), 285-290.
- [F12] Tsukui, Y.: 1-conn. 4-manifold M^4 with $b(M) = 3$ and $H_2(M) = \mathbb{Z}$, 数理解析研究録 #268(1976), 75-80.
- [F13] ——— : Ball coverings and products of manifolds, 数理解析研究録 #297(1977), 35-91.
- [F14] ——— : On ball coverings for products of manifolds, Yokohama Math. J., 25(1977), 113-117.
- [F15] Yamashita, M. & Ikeda, H.: 4-manifolds of covering number 2, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 4(1976), 105-111.

G. Spines, Zeeman Conjecture

- [G1] Berstein, J., Cohen, M. & Connelly, R.: Contractible, non-collapsible products with cubes, preprint.
- [G2] Caslar, B.G.: An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 559-566.
- [G3] Cohen, M.: Dimension estimates in collapsing $X \times I^q$, Topology 14(1975), 253-256.
- [G4] ——— : Whitehead torsion, group extensions and Zeeman's conjecture in high dimensions, Topology 16(1977), 79-88.
- [G5] Dieker, P.: Note on collapsing $K \times I$ where K is a contractible polyhedron, Proc. Amer. Math. Soc., 19(1968), 425-428.
- [G6] Grajek, M.: Collapsing $K \times I$ where K is a triode 2-complex, Notice Amer. Math. Soc., 20(1973), p.A-596.
- [G7] ——— : Obstructions to collapsing $K \times I$ to certain 1-complex, Preprint.
- [G8] Lickorish, W.B.R.: On collapsing $X^2 \times I$, Topology of Manifolds (J.C. Cantrell & C.H. Edwards(ed.)), Markham, 1970, 157-160.

- [G9] Lickorish, W.B.R.: An improbable collapse, *Topology* 12(1973), 5-8.
- [G10] Ikeda, H.: Acyclic fake surfaces, *Topology* 10(1971), 9-36.
- [G11] ——— : Acyclic fake surfaces which are spines of 3-manifolds, *Osaka J.Math.*, 9(1972), 391-408.
- [G12] ——— : Non-contractible acyclic normal spines, *Osaka J.Math.*, 10(1973), 511-520.
- [G13] ——— : Orientable 3-manifolds as singular block bundles, *Yokohama Math.J.*, 22(1974), 141-149.
- [G14] ——— : Fake surfaces which are spines of 3-manifolds, *Yokohama Math. J.*, 23(1975), 55-61.
- [G15] Matveev, S.V.: Special spines of piecewise linear manifolds, *Math.USSR Sbornik*, 21(1973),
- [G16] Osborne, R.P. & Stevens, R.S.: Group presentations corresponding to spines of 3-manifolds I, *Amer.J.Math.*, 96(1974), 454-471.
- [G17] ——— & ——— : Group presentations corresponding to spines of 3-manifolds II, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 234(1977), 213-243. Also, III, *ibid.* 245-251.
- [G18] Robertson, J.: On the collapsibility of $K \times I$, *Notice Amer.Math.Soc.*, 18(1971), 979.
- [G19] Stevens, R.S.: Classification of 3-manifolds with certain spines, *Trans. Amer.Math.Soc.*, 205(1975), 151-166.
- [G20] Wajda, L.: Collapsing of $K \times I^n$, *Notice Amer.Math.Soc.*, 24(1977), A-260.
- [G21] Webster, D.E.: Collapsing $K \times I$, *Proc.Camb.Phil.Soc.*, (1973), 39-42.
- [G22] Wright, P.: Collapsing $K \times I$ to vertical segments, *Proc.Camb.Phil.Soc.* 69(1971), 71-74.
- [G23] ——— : On the collapsibility of $K \times I^m$, *Quart.J.Math.Oxford(2)*, 22(1971), 491-493.
- [G24] Zeeman, E.C.: On the dunce hat, *Topology* 2(1964), 341-358.
- [G25] Neuwirth, L.: An algorithm for the construction of 3-manifolds from 2-complexes, *Proc.Camb.Phil.Soc.*, 64(1968), 603-613.