数理解析研究所講究録
346巻 1979年 66-79

Notes on 2-fold branched coverings

北大 理数　河野 正晴

このNoteでは、2-fold branched covering のいくつかの性質について述べる。§1ではbranch set のホモロジー的な性質。§2ではsurface の homeotopy group のある subgroup と branch set の関係について、である。

最初にbranched covering の定義を書く。

<u>Def</u>　M, Nをcompact n-manifold とします。

A, BをM, N の proper な $(n-2)$-submanifold とする。(AがMで proper とは $\partial A = A \cap \partial M$)

$f: (M, A) \longrightarrow (N, B)$ が branched covering であるとは、(i) N の open base の逆像の component 全体がM の base となる (ii) $f(A) = B$, $f(M-A) = N-B$ で $f|_{M-A}: M-A \longrightarrow N-B$ は普通の covering になっている。を満たす時のこととする。

§1. branch setのホモロジー的性質

$p:(M^3, \tilde{L}^1) \longrightarrow (N^3, L^1)$ を2-fold branched covering とする。(ここで、2-fold という意味は $x \in N-L$ に対し $p^{-1}(x)$ が2個ということ) ただし、M, Nは closed 3-manifoldsで $\tilde{L}$, Lはその中の links。 N上のLで branchする2-fold covering space をつくる時、ふつうNの中でLをbound するsurface Fをとり、NをFでcut する。そして、そのcopyを2コ用意し、Fに対応するF_1, F_2をはりあわせる。

この時Lはあるsurfaceをboundするということが仮定されているが、このことは正しいだろうか? 次の定理は 2-fold branched covering の時は正しいということを示している。

<u>Theorem 1</u>

M, Nを orientable closed 3-manifolds とし、$\tilde{L}$, Lをその中のlink とする。

$\exists p:(M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ 2-fold branched covering

$\Longrightarrow \quad [L] = 0 \in H_1(N; \mathbb{Z}_2)$

（証明の概略）

$\tau : M \to M$ を non-trivial covering transformation とすると、この involution τ に対し characteristic mfd $\hat{F}$ が存在する。ここで $\hat{F}$ は closed 2-mfd で、$\hat{L} \subset \hat{F}$。よって $p(\hat{F}) = F$ とすると、F は 2-mfd（non-orientable かもしれない）で $\partial F = L$ となる。よって $\circ$.κ。

—

又、高次元でも同様に次の定理が示される。

<u>Theorem 2</u>

M, N; closed $(n+2)$-mfd

$\hat{L}, L$ は closed n-submfd of M, N

$p : (M, \hat{L}) \longrightarrow (N, L)$ 2-fold branched covering

L は N の locally flat な submfd

$\Longrightarrow [L] = 0 \in H_n(N; Z_2)$

更に、M, N に boundary があっても次の定理が成り立つ。

<u>Theorem 3</u>

M, N を compact $(n+2)$-mfd, $\hat{L}, L$ をその proper な n-submfd とする。（L は N で locally flat）

$p : (M, \hat{L}) \to (N, L)$ 2-fold branched covering

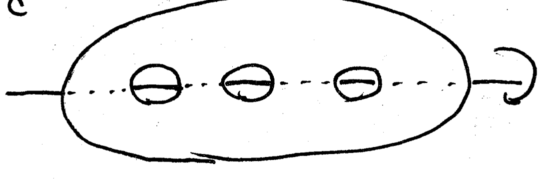
$\Rightarrow$ $[L] = 0 \in H_n(N, \partial N; \mathbb{Z}_2)$

Remark

1. Theorem 1, 2, 3において係数を$\mathbb{Z}_2$から$\mathbb{Z}$にかえると定理は成立しない。
2. 同じく、2-foldを一般のbranched coveringにすると(少なくともirregularも許すと)、定理は成立しない。

§2. 曲面のhomeotopy groupとbranched covering

Fをconnected closed orientable surfaceでgenusがnのものとします。H(F)をF上のorientation preserving homeo.全体として、$H_0(F)$をそのなかでidとisotopicなもの全体とする。H(F), $H_0(F)$は写像の合成によって群をなし、特に$H_0(F)$はH(F)のnormal subgroupをなす。H(F)の$H_0(F)$による剰余群を$\mathcal{M}(F)$と書きFのhomeotopy groupと呼ぶ。Fをstandardな位置(Look ⇒)においた時180°回転のhomeo.をT



と書く。$H(F)$ から $\mathcal{M}(F)$ への自然な準同型を φ を書く。
更に、$\hat{\Lambda}(F) \equiv \{ f \in H(F) \mid fT = Tf \}$, $\Lambda(F) \equiv \varphi(\hat{\Lambda}(F))$ とする。

(i) $F/T \cong S^2$ となるので、$p : F \longrightarrow S^2$ で $\mathrm{cov}(p) = \{1, T\}$ となる 2-fold branched covering が存在する。この branched covering の下の branch set を B，上の branch set を $\tilde{B}$ とする。

$h \in \hat{\Lambda}(F)$ に対し，$g \in H(S^2)$ が存在して，右の図式を可換にし，g は $g(B) = B$ をみたす。h に対してこの様な g は一意的。又逆に、$g(B)=B$ をみたす $g \in H(S^2)$ に対し，右の図式を可換にする $h \in H(F)$ は存在して，$h \in \hat{\Lambda}(F)$ となる。この様な h は2個存在し，それを h , h' とすると $h' = Th$ となっている。

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "p"] \\
S^2 \arrow[r, "g"'] & S^2
\end{tikzcd}
$$

(ii) $\tilde{H}(n)$ を S^2 の geometric $(2n+2)$-braid 全体とする。つまり，geometric $(2n+2)$-braid $\{b_1, \cdots, b_{2n+2}\}$ とは次の様なもの。$p_1, \cdots, p_{2n+2}$ を S^2 にとり以下 fix

0) $b_i : I \longrightarrow S^2 \times I$ map

1) $b_i(t) \in S^2 \times \{t\}$ for $\forall t \in I$, $i = 1, \cdots, 2n+2$

2) $b_i(0) = (p_i, 0)$ とすると，$i = 1, \cdots, 2n+2$

$\{b_1(1), \cdots, b_{2m+2}(1)\} = \{(p_1, 1), \cdots\cdots, p_{2m+2}(1)\}$

(ただしsetとしてのイコール)

3) $i \neq j$ の時 $b_i(t) \neq b_j(t)$ for $\forall t \in I$

この $\hat{H}(m)$ に次の様に同値関係をいれる。

(a) $\{b_1(t), \cdots, b_{2m+2}(t)\} \sim_a \{b_1'(t), \cdots, b_{2m+2}'(t)\}$

とは、 $\exists B_k : I \times I \longrightarrow M \times I \quad (k = 1, \cdots, 2m+2)$

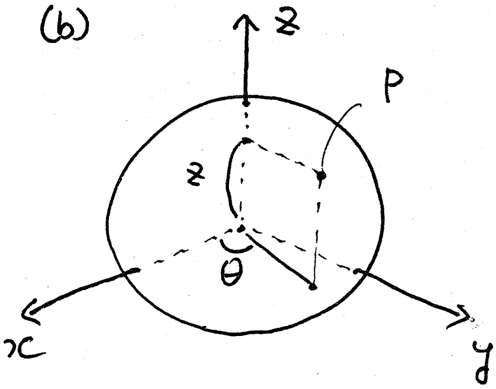
$\ni \; B_k | I \times \{0\} = b_k, \quad B_k | I \times \{1\} = b_k'$

そして、各 $\tau \in I$ に対す

$\{B_1 | I \times (\tau), \cdots\cdots, B_{2m+2} | I \times \{\tau\}\}$ が

geometric $(2m+2)$-braid になっているもの

(b)



$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ とした時 p の z 座標を z, p を xy-平面へ射影した点と x 軸のなす角を θ として、$p = (z, \theta)$ と表わす。($z = \pm 1$ の時は $\theta = 0$ ときめておく)

$\hat{R}_t : S^2 \longrightarrow S^2$ を $\hat{R}_t(z, \theta) = (z, \theta + 2\pi t)$ ときめる。そして $R : S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$

$$(a, t) \longmapsto (\hat{R}_t(a), t)$$

とする。$\{b_1, \cdots, b_{2m+2}\} \sim_b \{b_1', \cdots, b_{2m+2}'\}$

とは $R(b_i(t)) = b_i'(t)$ for $\forall t \in I$, $i = 1, \cdots, 2m+2$

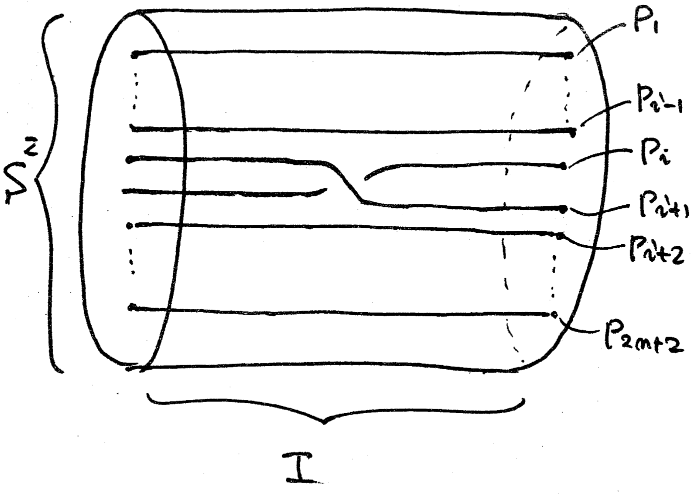
ときめる。そして $\sim_a$ と $\sim_b$ から generate される同値関係を $\sim$ と書き、これで $\tilde{H}(n)$ をわったsetを $H(n)$ と書く。

$\tilde{H}(n)$ の元は $S^2 \times I$ の link と見ることができる。これを L とすると，L が属する $H(n)$ の class を $[L]$ と書く。

さて、$H(n)$ に積を定義する。 $\tau_1 : S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$ を $\tau_1(a,t) = (a, \frac{t}{2})$ ，$\tau_2 : S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$ を $\tau_2(a,t) = (a, \frac{1}{2} + \frac{t}{2})$ とする。 $[L]$ ，$[L'] \in H(n)$

$\hat{L} = \tau_1(L) \cup \tau_2(L')$ として

$[\hat{L}] = [L] \cdot [L']$ で積を定義する。この積は well-def. でこの積により $H(n)$ に群をなす。



左図の様な link を L_i とすると $L_i \in \tilde{H}(n)$ なので，$l_i = [L_i]$ として $H(n)$ の元がきまる。 $H(n)$ は l_1，$l_2, \cdots, l_{2n+1}$ によって generate されるが，この群は Magnus によって決定された群と同型になるので，次の様な表示をもつ

<u>Theorem 4</u> [Magnus]

$H(n)$ は次の generator と relator で決定される。

- generators $l_1, \cdots, l_{2n+1}$
- defining relations

(i) $[l_i, l_j] = 1 \quad$ for $|i-j| \geq 2$

(ii) $l_i l_{i+1} l_i = l_{i+1} l_i l_{i+1}$

(iii) $(l_1 l_2 \cdots l_{2n+1})^{2n+2} = 1$

(iv) $l_1 l_2 \cdots l_{2n} l_{2n+1}^2 l_{2n} \cdots l_2 l_1 = 1$

(iii) さて、(i)で定義した$\Lambda(F)$と,(ii)で定義した$H(n)$には次の様な関係がある。

<u>Theorem 5</u>

Fをconnected orientable closed surfaceでgenusがnとする。ここで$n>1$とすると,

$\rho : \Lambda(F) \longrightarrow H(n)$ なる onto homo が存在して,

$\ker \rho = \{1, T\}$ となる。

(証明の概略)

ρは次の様にして定義する。$f \in \Lambda(F)$に対し,$\hat{\Lambda}(F)$の元$\tilde{f}$で$\varphi(\tilde{f}) = f$となるものがある。(i)よりこの$\tilde{f}$に対して$g \in H(S^2)$が一意的に存在して,$gp = p\tilde{f}$となる。gはisotopic to id.だから,$G : S^2 \times I \longrightarrow S^2$で,$G_0 = id$, $G_1 = g$となるisotopyが存在する。このGに対し,$\hat{G} : S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$を$\hat{G}(a, t) = (G_t(a), t)$と

定める。$L_0 = \bigcup_{i=1}^{2n+2} P_i \times I$ に対し、$L_f = \tilde{G}(L_0)$ とし、$[L_f] = l_f$ として、$P(f) = l_f$ と定める。

この map が well-def. になれば他の性質はすぐ出てくる。この map が well-def. になるためには次のことが言えればo.k.。

<u>Lemma 1</u> [Birman]

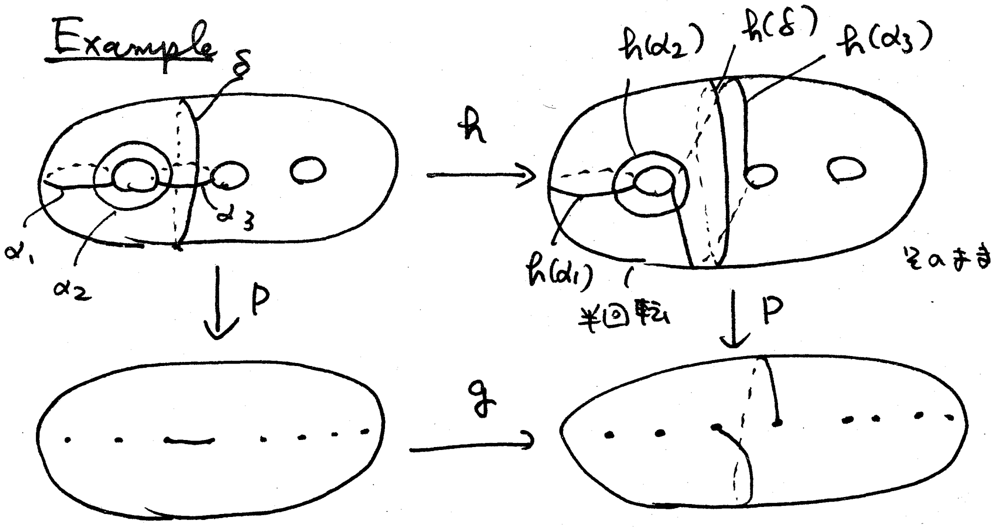
$n > 1$ として、F を connected closed orientable surface とする。$f \in \hat{\Lambda}(F)$ に対して、f と id が $H(F)$ において同じ connected component にはいれば、$\hat{\Lambda}(F)$ においても同じ connected component にはいる。

(証明は Look [BH　　])

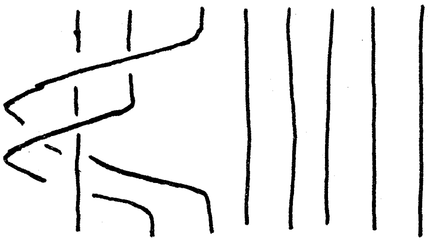
よって定理は成り立つ。

(iv) 上の結果を使って、$\Lambda(F)$ の元を Dehn twist の積で表わすことができる。

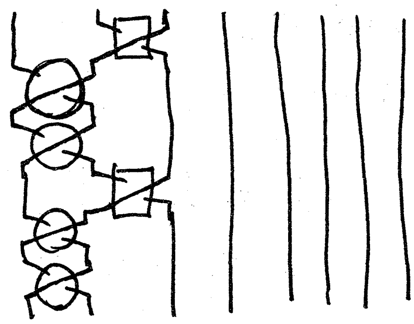
<u>Example</u>



δのまわりのhalf twistをhとする。この時$\rho(h) = [L_h]$を見てやると、$\rho(\delta)$のまわりのtwistに対応してるので、L_hは下の(Fig 1)つまり(Fig 2)の様にな

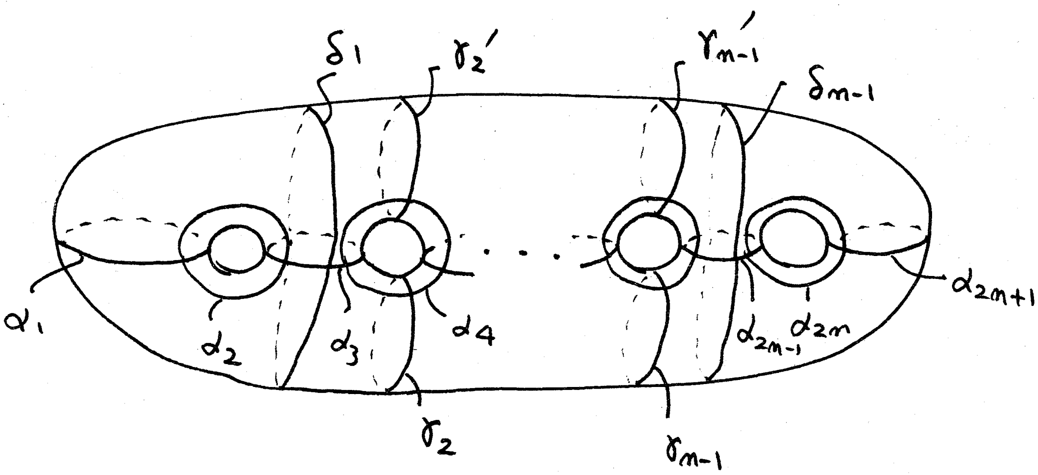


(Fig. 1)



(Fig 2)

っている。○に対応するのは$\Lambda(F)$においてはα_1のまわりのDehn twist a_1，□に対応するのはα_2のまわりのDehn twist a_2である。よって$\varphi(h) \equiv \varphi(a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2)$ (mod $\{1, T\}$)となる。実際に見てやると、$\varphi(h) \equiv \varphi(a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2)$となる。



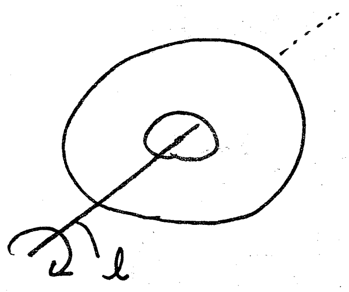
一般にgenus nのsurfaceに対し、surface F上のloopを上の様にきめる。そして、α_iのまわりのDehn twist を a_i, δ_i のまわりの Dehn twist を d_i, γ_i のまわりの Dehn twist と γ_i' のまわりの Dehn twist の積を c_i, δ_i のまわりの half twist を $\hat{d}_i$ とする。この時 $d_i = \hat{d}_i \cdot \hat{d}_i$ となるが、Example と同じ様にやれば次のことがわかる。

Proposition 1

$$\hat{d}_i \simeq a_1 \cdot a_1 a_2 a_1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 \cdot \cdots\cdots a_1 a_2 \cdots a_{2i} \cdots a_1 \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i}$$

$$c_i \simeq a_1 \cdot a_1 a_2 a_1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 \cdot \cdots\cdots a_1 a_2 \cdots a_{2i-1} \cdots a_1 \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i-1}$$

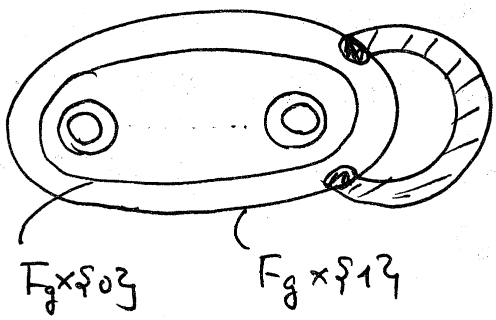
Remark



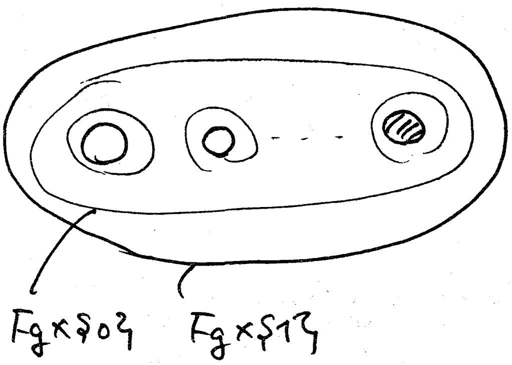
Theorem 5 が $n = 1$ で成立しないのは、Lemma 1 が成立しないから。たとえば左の図で l 軸について 180° 回転させた homeo f は $H(T)$ では id と arc によって結べるが、$\hat{\Lambda}(F)$ では結べない。$n > 1$ の時はこの様なことがおこらない。

(※※) 解析研で話した後に、横山さんから聞いたのですが、§2 の (iii) までの様な内容は Birman がやっているとのことです。(Look [B], [BH])

(v) 次に $\Lambda(F)$ と 3-mfd の 2-fold branched covering の関係について述べる。



$(g,g+1)$ で左図の様な 3-mfd を表わす。つまり $(g,g+1)=(F_g\times I)\cup(D^1\times D^2)$ ここで g は自然数（0 も含む）、F_g は genus g の closed ori. surface で、1-handle $D^1\times D^2$ は $F_g\times\{1\}$ にはりついているとする。I は unit interval



$(g,g-1)=(F_g\times I)\cup(D^2\times D^1)$ g は自然数（0 を含まない）で 2-handle は $F_g\times\{1\}$ 上の homotopic non-zero の curve にはりついているとする。（ただし T について invariant な curve とする）

(*) $(n_1,\cdots,n_m;\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ で次の様な mfd を表わす。ただし $n_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ で $|n_i-n_{i+1}|=1$, $|n_1-n_m|=1$ $\alpha_i\in\Lambda(F_{n_i})$ とする。

$(n_i,n_{i+1})=(F_g\times I)\cup(\text{handle})$ となっているが $\partial(n_i,n_{i+1})$ で $F_g\times\{0\}$ の方を $\underline{\partial}(n_i,n_{i+1})$,

のこりを$\partial^+(n_i, n_{i+1})$とする。

さて、$(n_1, \cdots, n_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$は

$(n_1, n_2), (n_2, n_3), \cdots, (n_{m-1}, n_m), (n_m, n_1)$

を用意し　$\partial^+(n_{i-1}, n_i)$と$\partial^-(n_i, n_{i+1})$をα_iではりあわせたmfdとする。($i=2, \cdots, m-1$　までだが、$i=1, m$も同じ様にはりあわす。)

$$(n_1, n_2)\underset{\alpha_2}{\vee}(n_2, n_3)\underset{\alpha_3}{\vee}\cdots\cdots(n_{m-1}, n_m)\quad\underset{\alpha_m}{\vee}\quad(n_m, n_1)$$

$$\alpha_1$$

この様なmfd全体のsetを$\mathcal{M}$とおく。

又、$[n_1 \cdots\cdots n_m, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}]$で次の様なmfdを表わす。

$$(0,1)\underset{\alpha_0}{\vee}(1, n_1)\underset{\alpha_1}{\vee}(n_1, n_2)\cdots\underset{\alpha_m}{\vee}(n_m, 1)\underset{\alpha_{m+1}}{\vee}(1, 0)$$

ただし
$n_1 = 0$ or 2, $n_m = 0$ or 2, $\alpha_0, \alpha_{m+1} \in \Lambda(F_1)$

$|n_i - n_{i+1}| = 1$, $\alpha_i \in \Lambda(F_{n_i})$ $(i=1, \cdots, m)$

つまり、(n_i, n_{i+1})を用意し、$\partial^+(n_{i-1}, n_i)$と$\partial^-(n_i, n_{i+1})$をはりあわせさらに$(0,1)$と$(1,0)$をはりあわせる。この時　$\partial[n_1, \cdots, n_m, \alpha_0, \cdots, \alpha_{m+1}]$は2個の2-sphereになるがここに3-ballをはりつける。

このmfdを　$\langle n_1, \cdots, n_m; \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}\rangle$

と書く。(この mfd 全体を $\widetilde{\mathcal{M}}$ と書く) この時、次の定理が成り立つ

Theorem 6

$p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (S^2 \times S^1, L)$ 2-fold branched cover

$\Longleftrightarrow$ $M = N \# \ell(S^2 \times S^1)$

ただし、$N \in \mathcal{M}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で

$\ell \neq 0$ の時は $N = (m_1, \cdots, m_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

と書いた時 $m_i = 0$ なるものが一個はあるものと

する。

Theorem 7

$p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (S^3, L)$ 2-fold branched covering

$\Longleftrightarrow$ $M = N \# \ell(S^2 \times S^1)$

ただし $N \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(証明はともに略)

Reference

[B] Birman, "Mapping class groups and their relationship to braid groups," Com. Pure and App. Math. 22 (213-238)

[BH] Birman & Hilden, "On the mapping class groups of closed surfaces as covering space," Ann. of Math Studies 66