数理解析研究所講究録
346巻 1979年 11-16

ReidemeisterとSingerの定理の一般化とその応用

イリノイ大　永瀬 輝男

1930年代にReidemeisterとSingerは,次の様な3次元多様体に関する基本定理を得た.

<u>定理</u>：　3次元閉多様体上の任意の2つのHeegaard分解は,互いにstablyに同値である.

このノートでは,involutionという立場から,上の定理を一般化出来ることを示し,その系として,3次元ホモロジー球面上の向きを保存するinvolutionに対し,signatureを定義出来ることを示す. その為に,いくつかの定義をする. 以下に於て, $Cl(\cdots)$とは$(\cdots)$の閉包を示し, $F(f)$は,写像fの不動点の集合を表わす.

$f: M^m \to M^m$をm次元多様体上のinvolutionとする. Nが$(m-1)$次元のMの部分多様体で,次の条件を満すとき,Nは<u>特性部分多様体</u>と呼ばれる: Mの2つの部分多様体UとVが存在して,
$U \cup V = M$, $U \cap V = \partial U = \partial V = N$, かつ $f(U) = V$.

特に, $m=3$ で, U と V が共にハンドルボディーである時, $(M;U,V,f)$ を M の特性Heegaard分解と呼ぶ.

$f, g: M^3 \longrightarrow M^3$ を M 上の involution とし, $(M;U,V,f)$ と $(M;X,Y,g)$ を M の特性Heegaard分解とする. $(M;U,V,f)$ と $(M;X,Y,g)$ が基本 ss 同値であるとは,次の3種類の操作で,一方から他方に移行出来ることである.

(1) M から M の上への同相写像 h が存在して, $g = h \circ f \circ h^{-1}$ かつ $h(U) = X$.

(2) $f = g$ であり, U の中に次の様な disk D が存在する: $\partial U \cap \mathrm{Int}\,D = \phi$, かつ $P = \mathrm{Cl}(\partial D - \partial U)$ は U に於て proper な曲線であり, $P \cap f(P) = \phi$. さらに, P の U 内の正則近傍 N で,次の条件を満すものがある: $N \cap f(N) = \phi$, かつ $X = \mathrm{Cl}(U - N) \cup f(N)$.

(3) $f = g$ であり, M の中に次の条件を満す2つの disk D_1 と D_2 が存在する: $D_1 \subset V$, $D_2 \subset U$, $D_1 \cap F(f) = \phi$, かつ $\partial D_1 \cap \partial D_2$ は ∂U の上でただ1つの交叉点より成る. さらに D_1 の正則近傍 N で,次の条件を満すものがある: $N \cap f(N) = \phi$, かつ $X = \mathrm{Cl}(U - f(N)) \cup N$.

(注) (3)に於ての D_2 の役割は,変形結果が再び, Heegaard分解であることの保証の為のものです.

2つの特性Heegaard分解が ss 同値であるとは, 上の基本

ss 同値の列で、一方から他方に移行出来ることである。すると、次の様な定理を証明出来る。

定理1： M を向き付けられた3次元閉多様体とする。f と g を M 上の向きを保存するinvolutionとする。このとき、２つの特性Heegaard 分解 $(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ が ss 同値である為の必要十分条件は次の条件を満すことである：M 上の同相写像 h が存在して、$h(\partial U) \cap \partial X$ が $F(g)$ の ∂X 上でのある閉近傍を含むことである。特に、f と g が conjugate な不動点を持たないinvolutionであるならば、$(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ は、ss 同値である。

M が連結でない時、M のHeegaard分解を、M の各連結成分上のHeegaard 分解の和とすることにするならば、不動点を持たないinvolutionに対して、定理1は次の様に拡張される。

系： M を3次元閉多様体とする（連結でないかも知れないし、向き付け不可能かも知れない）。f と g を M 上の不動点を持たないconjugateなinvolutionとし、$(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ を広義の特性Heegaard 分解とする。すると、２つの特性Heegaard分解は、ss 同値である。

M を3次元閉多様体で、M' を M のcopyとし、$h: M \longrightarrow M'$ を同

相写像とする．写像$f: M \cup M' \longrightarrow M \cup M'$を次の様に定義する：

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & もし\ x \in M \\ h^{-1}(x) & もし\ x \in M'. \end{cases}$$

すると，fは$M \cup M'$上の不動点を持たないinvolutionである．$(M; U, V)$をMのHeegaard分解とする．すると，$(M \cup M'; U \cup h(V), V \cup h(U), f)$は，$M \cup M'$上の広義の特性Heegaard分解である．

上の考察によって，上の定理は本来のReidemeisterとSingerの定理の一般化になることが次様にして証明出来る．$(M; U, V)$と$(M; U', V')$をMのHeegaard分解とする．すると，定理の系より，$(M \cup M'; U \cup h(V), V \cup h(U), f)$と$(M \cup M'; U' \cup h(V'), V' \cup h(U'), f)$はss同値である．このss同値の変形を$M$上に制限すれば，$M$上で与えられた2つのHeegaard分解のstable同値を与える．

BrowderとLivesayは，$\mathbb{Z}$-ホモロジー球面M上の不動点を持たないinvolutionに対して，signature不変量を特性部分多様体Nを用いて，次の様に定義した：UをMの部分多様体で，$\partial U = N$となるものとする．$G = \mathrm{Ker}(i_* : H_1(N) \to H_1(U))$とする，ここで，$i: N \hookrightarrow U$は包含写像とする．$\varphi: G \times G \longrightarrow \mathbb{Z}$を次の様に定める：$\varphi(x, y) = x \cdot f'_*(y)$，ここで・は交叉数

を示し, $f' = f|N$ である. すると, φ は2次形式であり, この φ の signature を f の signature と呼ぶ.

しかし, この Browder と Livesay の定義は, 不動点を持つ様な involution に対しては, 成立しない. 即ち, 特性部分多様体の選び方によって, 値が異なる. しかし, 各特性部分多様体に対して, Browder と Livesay による方法で signature を定義することは出来る. 各特性 Heegaard 分解 $(M; U, V, f)$ に対し, ∂U によって決まる f の signature を $\sigma(M; U, V, f)$ で示すことにする.

M を向き付けられた3次元閉多様体で, $g : M \longrightarrow M$ を M 上の向きを保存する involution で, $F(g) = \bigcup_{i=1}^{n} S(i)$ となるものとする, ここで $S(i) \cong S^1$. H と G を M の特性部分多様体で, $F(g)$ を含むものとする. このとき, H の G に対するねじれを次の様に定義する: $T(i)$ を M における $S(i)$ の正則近傍で, $T(i) \cap H$ と $T(i) \cap G$ が共に proper な円管であるものとする. $L(i, H)$ を $T(i) \cap H$ の1つの境界とし, $L(i, G)$ を $T(i) \cap G$ の1つの境界とする. $L(i, H)$ と $L(i, G)$ は共に S^1 に同相である. $T(i)$ は M から導びかれた向きを持ち, $\partial T(i)$ は, $T(i)$ より導びかれた向き持つ. すると, $\partial T(i)$ 上に向き付けられた円 $L(i)$ と, $L(i, H)$ と $L(i, G)$ の向きで, $[L(i)] \cdot [L(i, H)] = [L(i)] \cdot [L(i, G)] = +1$ となるものが存在する. ここで $[(\cdots)]$ は向き付けられた $(\cdots)$ のホモロ

ジー類を示し, $\cdot$ は $\partial T(i)$ 上での交叉数(intersection number)を示す. $m(i)=[L(i,H)]\cdot[L(i,G)]$ とするとき, n 個の数字の組 $(m(1),\cdots,m(n))$ を H の G に対する**ねじれ**と呼び, $tw(H;G)$ で表わす. $\tau(H;G)=\sum_{i=1}^{n} m(i)$ とする.

定理2: M を向き付けられた $\mathbb{Z}$-ホモロジー3次元球面とする. f を M 上の向きを保存するinvolutionで, 不動点を持つものとする. すると,

$$\sigma(M;X,Y,f)=\sigma(M;U,V,f)+\tau(\partial X;\partial U).$$

$\mathcal{H}(M,f)$ を M の特性Heegaard分解 $(M;U,V,f)$ の中で, $\partial U-F(f)$ が2つの連結成分よりなる様なものの全体とする. すると, M が $\mathbb{Z}$-ホモロジー3次元球面の時は, $\mathcal{H}(M,f)\neq\phi$ であり, $\mathcal{H}(M,f)$ の任意の2つの元は, 定理2より同一のsignatureを持つ. この値を f の**signature**と定義出来る.