

余次元 1 葉層構造の SRH-分割と Godbillon-Vey 類

東北大 理 西森敏之

§1 序. M を向きづけ可能な閉多様体とし, \mathcal{F} を M 上の向きづけ可能な余次元 1 葉層構造とする。すべてを C^∞ 級の枠内で議論することにする。 M 上の非特異 1-形式 ω を

$$\mathcal{F} = \{ v \in TM \mid \omega(v) = 0 \}$$

をみたすようにとると, Frobenius の定理により $d\omega = \eta \wedge \omega$ をみたす 1-形式 η が存在する。このとき 3-形式 $\eta \wedge d\eta$ は閉形式となり, コホモロジー類 $[\eta \wedge d\eta] \in H^3(M; \mathbb{R})$ は ω, η のとり方によらず \mathcal{F} のみで定まる。そこで $gv(\mathcal{F}) = [\eta \wedge d\eta]$ とおき Godbillon-Vey 類と呼ぶ。3次元多様体の場合には Godbillon-Vey 数 $gvn(\mathcal{F}) = gv(\mathcal{F})[M] \in \mathbb{R}$ は葉層コボルテイズム不変量となり, Thurston [4] により葉層コボルテイズム群 $\mathcal{F}\Omega_{3,1}^\infty$ から \mathbb{R} への全射写像を引起こすことが知られている:

$$\mathcal{F}\Omega_{3,1}^\infty \xrightarrow{gvn} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Ker gvn を決定せよという問題は未解決であり重要である。ここではこの問題に対する準備とみなせる。

問題 “どういうタイプの葉層構造が $\text{Ker } qv$ に属するか?”
を考える。

著者は葉層構造の定性的研究によりある種の葉層構造がよい分割を許すことに気づいていたが、この分割を用いて計算することができ次に述べる結果を得た。

定義 葉の葉 F_1, F_2 に対し $F_1 < F_2$ とは $F_1 \subset \mathcal{O}(F_2)$ かつ $F_1 \neq F_2$ とする。そこで

$$d(\mathcal{F}) = \sup \{ n \mid \exists F_1 < \dots < F_n, F_i : \mathcal{F} \text{ の葉} \}$$

とおき、葉の *depth* と呼ぶ。

主定理 $d(\mathcal{F}) < \infty$ とし、葉のすべてのホロノミー群が可換とする。このとき

(1) $\dim M = 3$ ならば、 $qv(\mathcal{F}) = 0$ 。

(2) $\dim M > 3$ ならばさらに自明でないホロノミー群をもつ葉 F に対して $H^2_{\text{comp}}(F; \mathbb{R}) = 0$ と仮定すると、 $qv(\mathcal{F}) = 0$ 。
ただし *comp* は *compact support* を意味するものとする。

注意 $\text{Ker } qv$ に属する葉層構造で自明でない例としては

(1) $S^1 \times S^1$ 上の葉層 S^1 -バンドル (Herman [1]),

(2) ホロノミーをもたない葉層構造 (森田-坪井 [3])

などが知られている。

主定理を次のように分解する。定義は §2 にまわす。

定理1 $d(\mathcal{F}) < \infty$ かつ \mathcal{F} のすべてのホロノミー群が可換とすると、 \mathcal{F} は換えされた可換なSRH-分割をもつ。

定理2 $\dim M = 3$ とする。 \mathcal{F} が可換なSRH-分割ですべての室輪と広間が換えされているかまたは開かれているようなものをもつとすると、 $qv(\mathcal{F}) = 0$ 。

定理3 $\dim M > 3$ とする。 \mathcal{F} が換えされたSRH-分割をもち、自明でないホロノミー群をもつ葉 F に対して $H_{\text{comp}}^2(F; \mathbb{R}) = 0$ とすると、 $qv(\mathcal{F}) = 0$ 。

定理4 $\dim M > 3$ とする。 \mathcal{F} がSRH-分割をもち、自明でないホロノミー群をもつ葉 F に対して $H_{\text{comp}}^i(F; \mathbb{R}) = 0$ ($i = 2, 3$) とすると、 $qv(\mathcal{F}) = 0$ 。

§2 SRH-分割の定義. F をコンパクト多様体, $N \in \text{Int } F$ の余次元1閉部分多様体とするとき $C(F, N)$ で F を N で切り開いて得られるコンパクト多様体を表わす:

$$C(F, N) = (F - N) \cup N_1 \cup N_2, \quad N_1 = N_2 = N.$$

さらに微分同型 $f: [0, \delta_1] \rightarrow [0, \delta_2]$ ($\delta_1 > \delta_2$) が与えられたとき、 $C(F, N) \times [0, \delta_1]$ 上に同値関係 \sim を

$$(n_1, t) \sim (n_2, f(t)) \quad \text{ただし } n_i \in N_i, n_1 = n_2 \in N, t \in [0, \delta_1]$$

により定義し $X(F, N, f) = C(F, N) \times [0, \delta_1] / \sim$ とおく。このとき $C(F, N) \times [0, \delta_1]$ の積葉層構造から得られる $X(F, N, f)$

上の葉層構造を子 (F, N, f) で表わす。

子に横断的な流れ $\varphi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ を1つ固定しておく。

定義1 M の部分集合 S が 階段 とは, ある葉の同次元コンパクト部分多様体 F と, $\text{Int } F$ の余次元1開部分多様体 N で $F - N$ が連結なもの, 微分同型 $f: [0, \delta_1] \rightarrow [0, \delta_2]$ ($\delta_1 > \delta_2$), うめこみ $\kappa: X(F, N, f) \rightarrow M$ が存在して

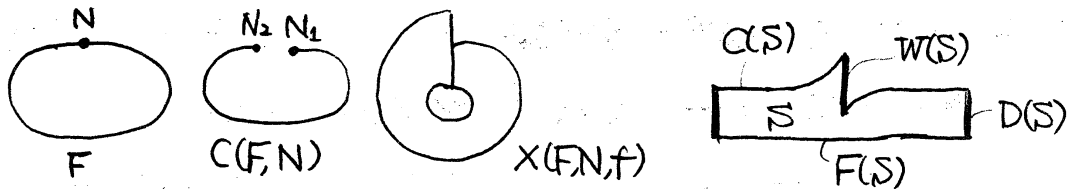
(S1) $\kappa(X(F, N, f)) = S,$

(S2) $\kappa(\{x\} \times [0, \delta_1]) \subset \varphi(\{x\} \times \mathbb{R})$ for $\forall x \in F,$

(S3) $\kappa(x, 0) = x$ for $\forall x \in F,$

(S4) $\kappa(C(F, N) \times \{\delta_1, \delta_2 = f(\delta_1), f(\delta_1), \dots\}) \subset \exists \text{葉}.$

このとき $F(S) = F, C(S) = \kappa(C(F, N) \times \{\delta_1\}), W(S) = \kappa(N_2 \times [\delta_2, \delta_1]), D(S) = \kappa(\partial F \times [0, \delta_1])$ をそれぞれ 床, 天井, 壁, 戸 と呼ぶ。 κ 子 $=$ 子 (F, N, f) のとき S を 正則 という。



定義2 M の部分集合 R が 室 とは, ある葉のコンパクト同次元部分多様体 F と うめこみ $\kappa: F \times [0, 1] \rightarrow M$ が存在して

(R1) $\kappa(F \times [0, 1]) = R,$

(R2) $\kappa(\{x\} \times [0, 1]) \subset \varphi(\{x\} \times \mathbb{R}),$ $\varphi(\{x\} \times [0, 1])$ と φ は同じ向き,

(R3) $\kappa(x, 0) = x$ for $\forall x \in F,$

(R4) $\pi(F \times \{1\}) \subset \text{葉}$.

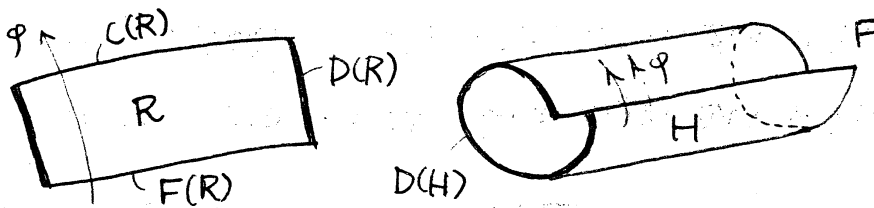
このとき $F(R) = F$, $C(R) = \pi(F \times \{1\})$, $D(R) = \pi(\partial F \times [0, 1])$ をそれぞれ 床, 天井, 戸 と呼ぶ。自然にホロノミー準同型 $\pi: \pi(F, x_0) \rightarrow \text{Diff}[0, 1]$ が定まるが Image 重が可換のとき R を 可換 という。

定義3 M の部分集合 H が 広間 とは, ある葉のコンパクト同次元部分多様体 F と微分同型 $f: D(f) \rightarrow R(f)$ ($D(f) \cup R(f) = F$) が存在し, さらに各 $x \in D(f)$ に対し $t_x > 0$ が存在して

$$\varphi(x, t_x) = f(x), \quad \varphi(\{x\} \times (0, t_x)) \cap F = \emptyset$$

となり $H = \{ \varphi(x, t) \mid x \in D(f), 0 \leq t \leq t_x \}$ とかけること。

このとき $D(H) = \{ \varphi(x, t) \mid x \in \partial D(f), 0 \leq t \leq t_x \}$ を 戸 という。自然にホロノミー準同型 $\pi: \pi(D(f), x_0) \rightarrow \text{Diff}[0, t_x]$ が定まるが Image 重が可換のとき H を 可換 という。



定義4 M の部分集合 ρ が 室輪 とは, 室 R_1, \dots, R_ℓ が存在し

$$C(R_i) \cap F(R_{i+1}) \neq \emptyset, \quad i=1, \dots, \ell-1. \quad C(R_\ell) \cap F(R_1) \neq \emptyset.$$

$$\rho = R_1 \cup \dots \cup R_\ell.$$

定義5 室輪 ρ (または広間 H) が 換気されている とは $\pi(\rho)$ (or $\pi(H)$) がホロノミー群が自明な葉をもつこと。

$\rho(\omega H)$ が開いているとは, 各 $x \in \rho(\omega H)$ に対して $s < 0$
 $t > 0$ が存在して $\varphi(x, s) \notin \rho(\omega H)$, $\varphi(x, t) \notin \rho(\omega H)$ 。

定義6 M の部分集合の有限族 Δ が 擬SRH-分割 とは,

(1) $M = \bigcup_{A \in \Delta} A$. $\{Int A\}_{A \in \Delta}$ は disjoint.

(2) Δ の各元は正則階段, 室, 広間のいずれか:

$$\Delta = \mathcal{S}(\Delta) \cup \mathcal{R}(\Delta) \cup \mathcal{H}(\Delta). \quad \{W(S)\}_{S \in \mathcal{S}(\Delta)} : \text{disjoint}$$

(3) 各 $A \in \Delta$ に対して $D(A) \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}(\Delta)} W(S)$ 。

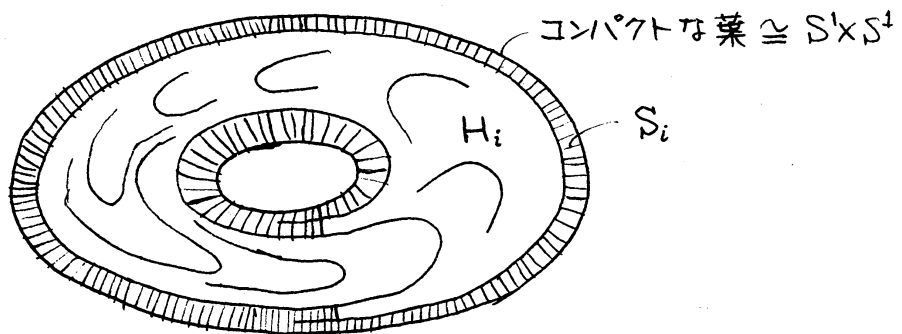
特に各 $A \in \mathcal{R}(\Delta) \cup \mathcal{H}(\Delta)$ が可換のとき Δ を 可換 という。

定義7 擬SRH-分割 Δ が与えられたとき, Δ 上の関係 \leq を

$$A \leq B \Leftrightarrow A=B \text{ または } \exists A_0 = A, A_1, \dots, A_k = B \in \Delta \\ \text{s.t. } W(A_i) \cap D(A_{i+1}) \neq \emptyset$$

により定義する。 (Δ, \leq) が順序集合のとき Δ を SRH-分割
 と呼ぶ。

例 Reeb葉層構造 (S^3, \mathcal{F}_R) に対して, 階段2つと広間2つ
 からなるSRH-分割が存在する: $\Delta = \{S_1, S_2, H_1, H_2\}$



§3 定理1の証明の概略. 各 $x \in M$ に対して次のいづれかをみたす近傍 $U(x)$ が存在する.

- (1) $U(x)$ はコンパクトな葉と交わらない.
- (2) $U(x)$ は1枚のコンパクトな葉とだけ交わる.
- (3) コンパクトな葉を床とする可換な室 $R(x)$ が存在して $U(x)$ と交わるすべてのコンパクトな葉は $R(x)$ に含まれる.

M がコンパクトであることから, x_i, y_i, z_i が存在して

$$M = \underbrace{U(x_1) \cup \dots \cup U(x_k)}_{(1)} \cup \underbrace{U(y_1) \cup \dots \cup U(y_m)}_{(2)} \cup \underbrace{U(z_1) \cup \dots \cup U(z_n)}_{(3)}$$

とかける。そこで

$$R^1 = \{ \alpha(K) \mid K \text{ は } \bigcup_{i=1}^n R(z_i) - \bigcup_{i=1}^n \{FR(z_i) \cup CR(z_i)\} \text{ の連結成分} \}$$

とおくと R^1 の各元は可換な室になる。 $\text{Int}(\bigcup_{R \in R^1} R)$ と交わらないコンパクトな葉は有限枚あるが, 木 Π / ミー群が可換, \mathcal{F} が C^∞ 級, $d(\mathcal{F}) < \infty$ であることから, 西森[2]の定理1によりそれらを床とする正則階段が片側または両側にとれる。

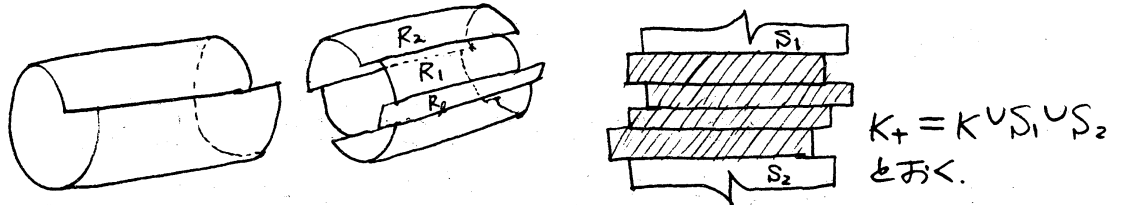
得られた階段の集合を S^1 とおく。

$$M^1 = M - \text{Int} \left\{ \left(\bigcup_{R \in R^1} R \right) \cup \left(\bigcup_{S \in S^1} S \right) \right\}$$

とおくと $d(\mathcal{F}|_{M^1}) \leq d(\mathcal{F}) - 1$ となる。以上の議論をくりかえせば最後に自明な広間が残り SRH-分割を得る。

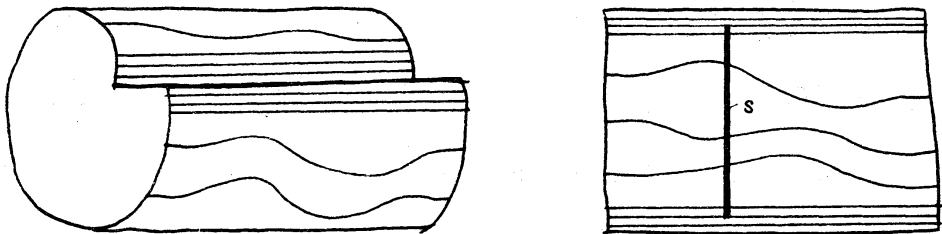
§4 定理2の証明の概略. \mathcal{K} を $M - \text{Int}(\bigcup_{S \in \mathcal{S}(A)} S)$ の連結成分の集合とすると $K \in \mathcal{K}$ は次のいづれかである。

(I) 広間 (II) 室輪 (III) 2つの階段 S_1, S_2 に含まれた室の和.

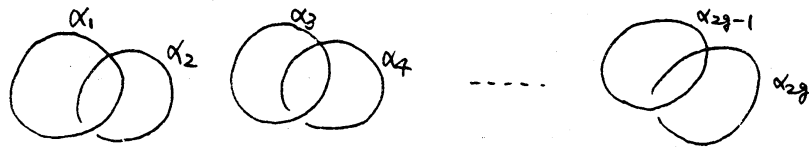


このとき $M - \text{Int}\left\{\left(\bigcup_{I, II} K\right) \cup \left(\bigcup_{III} K^+\right)\right\}$ は床が交わる階段の対 (S_1, S_2) たちの和にわかれる。 $\mathcal{U} = \{K_{I, II}, K_{III}, S_1 \cup S_2\}$ とおく。

\mathcal{U} の各元 K に対して K の部分集合 s で $\mathcal{F} | K - s$ が無木口ノミーの葉層構造となるものを次のように選ぶ。 K が換えされている広間するとき、簡単のため定義3の表現での F の木口ノミーが自明として議論する。 K を F で切り開くと、



F の種数を g とするとき $2g$ 個の輪を次のようにとる。



このとき適当な区間 J に対して $s = (\bigcup \alpha_i) \times J$ とおくと、 K が可換であることから $\mathcal{F} | K - s$ は無木口ノミーとなる。 K が

\mathcal{F} の他のタイプのものでも同様にして s が得られる。

以上のことと (Δ, \leq) が順序集合であることを使って帰納法により M 上のベクトル場 X で, $X|_{M - \bigcup_s N(s)}$ で生成される局所1-径数群 \mathcal{F} を保つものが構成できる。ただし $N(s)$ は s の管状近傍である。そこで M 上の非特異1-形式 ω を

$$\omega(X) \equiv 1, \quad \mathcal{F} = \{v \in TM \mid \omega(v) = 0\}$$

により定義すると, $M - \bigcup_s N(s)$ 上で $d\omega = 0$ となる。

このとき M 上の1-形式 η で

$$d\omega = \eta \wedge \omega, \quad \eta|_{M - \bigcup_s N(s)} = 0$$

をみたすものが構成でき, \mathcal{F} の Godbillon-Vey 数は

$$gvn(\mathcal{F}) = \int_M \eta \wedge d\eta = \sum_s \int_{N(s)} \eta \wedge d\eta$$

とあらわせる。

$N(s)$ の各連結成分 C は $(S^1 \times S^1 - D^2) \times [0, 1]$ に微分同型であり, $\mathcal{F}|_C$ は自明な葉層構造であるので $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$ 上の葉層構造 \mathcal{F}_C に拡張でき, 対応する ω, η も $D^2 \times [0, 1]$ 上で $d\omega = 0, \eta = 0$ となるように拡張できる。さらに $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ と $S^1 \times S^1 \times \{1\}$ を同一視してもすべてうまく行くことがわかり, \mathcal{F}_C は $S^1 \times S^1 \times S^1$ 上の葉層構造とみなせる。したがって

$$\int_C \eta \wedge d\eta = \int_{S^1 \times S^1 \times S^1} \eta \wedge d\eta = gvn(\mathcal{F}_C)$$

となるが Herman [1] の定理により $gvn(\mathcal{F}_C) = 0$ となる。

ゆえに $\int_{N(s)} \eta \wedge d\eta = 0$ となり $gvn(\mathcal{F}) = 0$ を得る。

REFERENCES

- [1] M. Herman, The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of T^3 , Geometry and Topology, Rio, de Janeiro 1976, Springer Lecture Notes vol. 597, Berlin, 1977.
- [2] T. Nishimori, Compact leaves with abelian holonomy, Tôhoku Math. J. 27(1975), 259-272.
- [3] S. Morita and T. Tsuboi, The Godbillon-Vey class of codimension-one foliations without holonomy, to appear.
- [4] W. Thurston, Non-cobordant foliations of S^3 , Bull. Amer. Math. Soc. 78(1972), 511-514.