数理解析研究所講究録
347巻 1979年 39-44

Null transversal をもたない余次元1葉層について

京大 教養 今西英器

$\mathcal{F}$を多様体M上のt-orientableなC^r級の余次元1葉層($r \geqq 2$)とする．$\mathcal{F}$にtransverseな閉曲線Cがホモトープ0のとき．Cをnull transversalという．$\mathcal{F}$は次の場合にはnull transversalをもたない．

(1) $\mathcal{F}$がtransverseにC^ω級のとき．(Haefliger)

(2) $\mathcal{F}$がLie群の局所自由な余次元1作用の軌道で定義されているとき．(Roussarie, Plante [5] 参照)

(3) $\mathcal{F}$がホロノミーをもたないとき．

一般には．$\mathcal{F}$がC^ω級でMがコンパクトであっても$\mathcal{F}$が例外葉をもつことがある(Hector [1])．しかし$\pi_1(M)$に制限を加えると．$\mathcal{F}$がnull transversalをもたなければ．その構造は非常に簡単なものとなる．

定義．連結な多様体N上の余次元1葉層$\mathcal{F}$にたいし．多様体N'とN'上の零点をもたない閉1形式ωおよび．

NからN'への同相写像hが存在して、hが$\mathcal{F}$の葉をωの積分多様体にうつすとき、$\mathcal{F}$は位相的に閉1形式で定義されるという。

このとき、$Per(\omega)$でωの周期のなす$\mathbb{Z}$-加群をあらわし、その階数を$\mathcal{F}$の階数という。また、Cを$\mathcal{F}$にtransverseな閉曲線とし、$\int_{h(C)}\omega=1$ となるようにωを正規化したときの$Per(\omega)$を$Per(\mathcal{F})=Per(\mathcal{F})_C$であらわす。

さらに$\omega(X)\equiv 1$となるN'上のベクトル場Xで完備なものが存在すれば、ωは完備であるという。(このとき、N上には$\mathcal{F}$の葉を葉にうつすような位相的なflowがXとhにより定義され、$\mathcal{F}$のすべての葉は同相となる。)

また、N'上の任意の曲線$l(t), 0\leq t\leq 1$, にたいし、$\int_l \omega\in Per(\omega)$ なら$l(0)$と$l(1)$がωの同じ連結積分多様体上にあるとき、ωは擬完備であるという。ωが完備なら擬完備である。ωが擬完備で階数が2以上なら、$\mathcal{F}$のすべての葉はNで稠密である。またωの階数が1以下なら$\mathcal{F}$のすべての葉はNの閉部分多様体である。

定理1 (土屋[7]) Mはコンパクト、$\mathcal{F}$はC^ω級とする。$\pi_1(M)$が多項式のgrowthをもてば、$\mathcal{F}$のproperな葉$L_1, L_2, \cdots, L_k$が存在して、$M-\bigcup_{i=1}^{k} L_i$の各連結成分上で$\mathcal{F}$は完備な閉1形式で位相的に定義される。

ここでは上の定理で $\pi_1(M)$ の条件を強くすることにより、Mのコンパクト性をとりのぞき、$\mathcal{F}$ に関する条件も弱められることを示す。

<u>定理2</u>　$\pi_1(M)$は有限生成アーベル群、$\mathcal{F}$ は null transversal をもたないとする。$\mathcal{F}$ のすべての閉葉の和を F とすると、$M-F$ の各連結成分上で $\mathcal{F}$ は擬完備な閉1形式により位相的に定義される。また各連結成分上で $\mathcal{F}$ の階数は M の1次元Betti数 b_1 以下である。さらに、C を $\mathcal{F}$ に transverse な閉曲線とし、$C\cap F\neq\phi$ なら $S(C)=\{x\in M \mid L_x\cap C\neq\phi,\ L_x$ は x を通る葉$\}$ の境界を通る $\mathcal{F}$ に transverse な閉曲線は存在しない。

<u>Remarks</u>　(i) 閉葉とはMの閉部分集合であるような葉をいう。上でFは閉集合となる。(ii) $M=F$ なら M から $\mathbb{R}$ または S^1 への位相的な submersion f が存在して $f^{-1}(*)$ の連結成分が $\mathcal{F}$ の葉となっている。

<u>系3</u>　定理2の条件と記号のもとで、

(i)　$F=\phi$ なら $\mathcal{F}$ はホロノミーをもたない。

(ii)　Fの葉Lの片側ホロノミー群は、階数が b_1 以下のアーベル群である。特に、$F\supset L'\neq L$ で $\overline{L'}\supset L$ なら L の L' 側のホロノミー群は $\mathbb{Z}$ と同型である。

(iii)　$\mathcal{F}$ が C^ω 級とすると、$S(C)-F$ の連結成分は有限個(

k 個とする）であるが，各成分への $\mathcal{F}$ の制限を $\mathcal{F}_i$ とすると，$Per(\mathcal{F}_1) = \cdots = Per(\mathcal{F}_k)$ とできる．

(iv) $\mathcal{F}$ がホロノミーをもたなければ，F の葉は M を２つの連結成分に分ける。とくに $F \cap S(C) = \phi$ であるが，さらに $M = F \cup S(C)$ となる．

応用として，$\mathbb{R}^{n-1}$ の n 次元多様体への局所自由な作用の線形化の問題を考える，$\psi : \mathbb{R}^{n-1} \times M \longrightarrow M$ を n 次元多様体 M への C^r 級の局所自由な（すなわち，すべての軌道が $(n-1)$ 次元である）作用とする，ψ が <u>C^s 級の線形作用</u>であるとは，M から $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$ $(0 \leq k \leq n)$ への C^s 級の同相写像 f と，$(n, n-1)$ 行列 A が存在して，${}^\forall x \in M$, ${}^\forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して

$$f \circ \psi(y, x) = f(x) + A \cdot y \pmod{\mathbb{Z}^k}$$

となることをいう．

<u>仮定</u> (i) M は向きづけ可能で $\pi_1(M)$ は有限生成アーベル群 (ii) ψ は M の閉集合であるような軌道をもたない。(iii) $3 \leq r \leq \omega$

この仮定のもとで，ψ の軌道の集合で定義される M 上の葉層を $\mathcal{F}_\psi$ とすると，系３(i) より $\mathcal{F}_\psi$ は位相的に閉１形式で定義され，$Per(\mathcal{F}_\psi)$ が定義される。

<u>定理４</u>．$\mathbb{R}$ の測度０の部分集合 D が存在して，上の仮定のもとで，$Per(\mathcal{F}_\psi) \not\subset D$ なら ψ は C^{r-3} 級の線形作用

である。

Remark 上の D は $\mathbb{Q}$ を含む. $D \ni x$ となる x は"有理数で近似しにくい"無理数である(正確には Herman [2] と Tischler-Tischler [6] を参照のこと). 仮定をみたす φ の集合に適当に位相を入れると $\mathrm{Per}(\mathcal{F}_\varphi)$ は φ に関し連続となり, 上の定理は"殆んどすべての φ は線形作用である"と標語的に言える, また $\mathrm{Per}(\mathcal{F}_\varphi) \subset D$ なら線形化できない φ は存在する。

定理2, 系3, 定理4, の証明は[3], [4]にあるので, ここでは省略する。

なおこれらの結果は, $\pi_1(M)$ が非可換でも, 交換子群 $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ が有限群ならそのままなりたつ.

文　献

[1] G. Hector ; Quelques exemples de feuilletages ; espèces rares, Ann. Inst. Fourier 26.1 (1976) 239-264.

[2] M.R. Herman ; Conjugaison C^∞ des difféomorphisms du cercle pour presque tout nombres de rotation ; C.R. Acad. Sci. Paris t 283 (1976) 579-582.

[3] H. Imanishi ; Structure of codimension one foliations without holonomy on manifolds with abelian fundamental group. to appear in J. of Math. of Kyoto Univ.

[4] ——— ; 余次元1葉層のDenjoy-Siegel理論, 「数学」に投稿中.

[5] J.F. Plante ; Asymptotic properties of foliations Comm. Math. Helv. 47 (1972), 449-456.

[6] D. Tischler - R. Tischler ; Topological conjugacy of locally free $\mathbb{R}^{n-1}$ actions on n-manifolds. Ann. Inst. Fourier 24.4 (1974) 215-217

[7] N. Tsuchiya ; Growth and depth of leaves, preprint