数理解析研究所講究録
347 巻 1979 年 27-38

Γ－葉層構造とtransverse projectable connectionsについて

北大 理 鈴木治夫

§1 序

Gをリー群，Eを主G－束とする。f_1：G→G'をGからリー群G'への準同形写像とし，E'をf_1によってEにassociateされた主G'－束とする。主束における葉層構造は，平坦部分接続として特性づけられる[1]。この報告において，まずEが葉層構造をもつならば，E'も葉層構造をもち，さらにEがtransverse projectable connectionをもつならば，E'もまたそのような接続をもつことを示す。

半単純等質空間L/L_0にassociateされた2次のL_0－構造Qの局所同形変換の擬群をΓとする。多様体M上のΓ－葉層構造$\mathcal{F}$に対し，$\mathcal{F}$の局所しずめこみによるQのひきもどしから定まるM上の主L_0－束を$\tilde{Q}$とし，そのL－拡大を$\tilde{Q}^L$とかくことにする[3，4，5，6]。構造群の準同形写像によるtransverse projectable connectionの移行性を用いて，かなり大きい

範囲の Γ－葉層構造$\mathcal{F}$に対し，$\tilde{Q}^L$にassociateされたベクトル束Wを構成して，これが$\mathcal{F}$の法ベクトル束$V(\mathcal{F})$を含み，その枠束$P(W)$がtransverse projectable connectionをもつようにできる．これは$V(\mathcal{F})$の枠束におけるtransverse projectable connectionの一般化とみなされる．

以下，多様体と写像はすべてC^∞－級とする．

§2 部分接続と主束における葉層構造

Mをn次元多様体，$h: G \to G'$をリー群の準同形写像とする．EをMの上の主G－束とし，$p: E \to M$をその射影写像とする．$\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$を主$G$－束$E$の局所座標系とし，$\pi: U_\lambda \times G \to G$を自然な射影写像とする．$E$上の右$G$－作用，$E \times G \to E$，$(u, g) \mapsto u \cdot g$が

(i) $$p(u) = p(u \cdot g),$$

(ii) $$\pi \circ \phi_\lambda(u \cdot g) = (\pi \circ \phi_\lambda(u)) \cdot g, \quad u \in p^{-1}(U_\lambda)$$

によって定義される．

Gの準同形写像hを通じてのG'の上の左作用によって，Eにassociateされた主G'－束をE'とする．すなわち

$$E' = E \times_G G'$$

である．あきらかに$E = E \times_G G$であるから，写像$id \times h$：$E \times G \to E \times G'$はファイバー写像

$$\tilde{\rho}_E : E = (E \times G)/G \longrightarrow E' = (E \times G')/G'$$

をひきおこし，各 $u \in E$，$g \in G$ に対して

$$\tilde{\rho}_E(u \cdot g) = \tilde{\rho}_E(u) \cdot \rho(g)$$

となる．

主束 E における部分接続[1]は，接ベクトル束 $T(E)$ における部分ベクトル束 H で，次の条件をみたすものである：

(i) 各 $u \in E$ に対して，G_u を u を通るファイバーの接ベクトル空間とするとき，$H_u \cap G_u = \{0\}$．

(ii) 各 $u \in E$ および $g \in G$ に対して，E の上の g の右作用を R_g と表わすとき，$H_{u \cdot g} = (R_g)_* H_u$．

$H \subset T(E)$ の G－同変性により，各 $x \in M$ に対して，$p(u) = x$ とすると $F_x = p_* H_u$ が u によらないで定まり，$\{F_x \mid x \in M\}$ は部分ベクトル束 $F \subset T(M)$ となる．

H が E における部分接続ならば，ρ によって E に associate された主 G'－束 E' において部分接続 H' が定まり，各 $u \in E$ に対し

$$\tilde{\rho}_{E*}(H_u) = H'_{\tilde{\rho}_E(u)}$$

となる． このような H' は一意である． H が E における接続 $\mathcal{H}$ ならば，H' は E' における接続 $\mathcal{H}'$ となる．

E における部分接続 $H \subset T(E)$ は，H が部分ベクトル束として包合的であるとき平坦であるという． 主 G－束 E は，そ

れが平坦な部分接続をもつとき，葉層的であるという． H が平坦ならば，H によって定まる E' の部分接続 H' も平坦となる． H を E の平坦な部分接続とするとき，包合的部分ベクトル束 $H \subset T(E)$ の積分多様体は E の葉層構造を定める． これを $\mathcal{F}_E$ とかく． $T(M)$ の部分ベクトル束 $p_* H = F$ もまた包合的となり，その積分多様体は M の葉層構造 $\mathcal{F}$ を定める． $\mathcal{F}_E$ を $\mathcal{F}$ のリフトという． 葉層構造 $\mathcal{F}_E$ をもつ M の上の主 G－束 E を，葉層構造をもつ多様体 $(M, \mathcal{F})$ の上の葉層的主 G－束とよび，$E(M, p, G, \mathcal{F}_E)$ とかく． ρ によって E に associate された主 G'－束 E' も，また $(M, \mathcal{F})$ の上の葉層的主 G'－束となることが確かめられる． E' における $\mathcal{F}$ のリフトを $\mathcal{F}_{E'}$ とかく．

H を主 G－束 E の部分接続とする． E の接続 $\mathcal{H}$ は，各 $u \in E$ に対して $H_u \subset \mathcal{H}_u$ となるとき，H に適合するということにする． 平坦な部分接続 H に対して $\mathcal{H}$ が適合するならば，$\mathcal{H}$ は H によって定義される葉層構造に，transverse であるという． $\hat{E}$ を多様体 N の上の主 G－束で，$\tilde{f} : \hat{E} \to E$ を G－束写像とする． 各 $u \in \hat{E}$ における接ベクトル部分空間族 $\tilde{\mathcal{H}}_u = \tilde{f}_*^{-1}(\mathcal{H}_{\tilde{f}(u)}) \cap T_u(\hat{E})$ は，$\hat{E}$ における接続を定める． $\tilde{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ から f によって引きおこされた接続とよび，$\tilde{\mathcal{H}} = f^* \mathcal{H}$ とかき表わす． $E = E(M, p, G, \mathcal{F}_E)$ を葉層構造をもつ多様体 $(M, \mathcal{F})$ 上の葉層的主 G－束とし，$\mathcal{H}$ を $\mathcal{F}_E$ に transverse な接続とする． $\mathcal{H}$

は，それが局所的に$\mathcal{F}$の局所しずめこみの上のG－束写像によって，像多様体上の接続から引きおこされた接続となるとき，projectableとよばれる．　Hを$\mathcal{F}_E$によって定まる平坦な部分接続とし，fを上に述べた$\mathcal{F}$の局所しずめこみの上のG－束写像とすると，各$u \in E$に対して$H_u = \mathrm{Ker}(f_* | T_u(E))$となる．　したがって$\mathcal{H}$はHに適合し，$f$は$\mathcal{F}_E$の局所しずめこみとなる．　接続の局所的考察により，次の定理を得る．

定理1　$E(M, p, G, \mathcal{F}_E)$を葉層的主G－束，$E'(M, p', G', \mathcal{F}_{E'})$をリー群の準同形写像によって$E(M, p, G, \mathcal{F}_E)$にassociateされた葉層的主－G′束とする．　$E(M, p, G, \mathcal{F}_E)$における接続$\mathcal{H}$が$\mathcal{F}_E$にtransverseならば，$\mathcal{H}$によって定まる$E'(M, p', G', \mathcal{F}_{E'})$における接続$\mathcal{H}'$も$\mathcal{F}_{E'}$にtransverseである．　さらに$E(M, p, G, \mathcal{F}_E)$におけるtransverseな接続$\mathcal{H}$がprojectableならば，$E'(M, p', G', \mathcal{F}_{E'})$におけるtransverseな接続$\mathcal{H}'$もまたprojectableとなる．

§3　Γ－葉層構造

Γをq次元多様体B上に作用する局所変換の擬群とし，$\mathcal{F}$をn次元多様体M上の余次元qのΓ－葉層構造とする．　すなわちMの開集合U_αからBへのしずめこみ

$$f_\alpha : U_\alpha \to B$$

の極大族であって，

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が M の開被覆となり，

(ii) 各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ $(\alpha, \beta \in \Lambda)$ に対して，元 $\gamma^x_{\beta\alpha} \in \Gamma$ が存在し，x のある近傍の上で $f_\beta = \gamma^x_{\beta\alpha} \circ f_\alpha$ となるものである．

B の点の f_α による逆像は $\mathcal{F}$ の"局所的"な葉であり，$\ker(f_{\alpha *})$ は $\mathcal{F}$ に対する部分接ベクトル束 $F \subset T(M)$ を定める． 剰余ベクトル束 $V(\mathcal{F}) = T(M)/F$ を $\mathcal{F}$ の法ベクトル束という．

$\Gamma(B)$ を B の局所微分位相同形写像の擬群とし，$0 \in B$ を固定する． 各整数 $k \geqq 1$ に対し，$P^k(B)$ を 0 のまわりの局所微分位相同形写像 $f \in \Gamma(B)$ の k－ジェット $j^k_0(f)$ 全体の集合とする． $G^k(q) = \{j^k_0(f) \in P^k(B) \mid f(0) = 0\}$ とおく． R^n 上の $GL(q;R)$－値関数の r－ジェットのなす群を $(GL(q;R))^r_n$ とかくことにすれば，k に関する帰納法により，$G^k(q) \subset (GL(q;R))^{k-1}_n$ がいえる． $P^k(B)$ は，射影写像 $\pi^k; P^k(B) \to B$ を $\pi^k(j^k_0(f)) = f(0)$ と定めることにより，B 上の自然な主 $G^k(q)$－束となる． 0 のまわりに作用する局所微分位相同形写像 $f \in \Gamma(B)$ は，$j^k_0(g) \in P^k(B)$ に対して

$$f^{(k)}(j^k_0(g)) = j^k_0(f \circ g)$$

と定めることによって，自然に $P^k(B)$ の局所束同形写像 $f^{(k)}$ に拡げられる． $f^{(k)}$ を f の <u>prolongation</u> とよぶ．

M 上の Γ－葉層構造 $\mathcal{F}$ において，擬群 Γ を $\Gamma(B)$ におきかえて得られる $\Gamma(B)$－葉層構造を $\mathcal{F}$ とする． $U \subset M$ を開集合と

し，

$$P^k(\hat{\mathfrak{F}})=\{j^k_x(f_U)\mid f_U\in\hat{\mathfrak{F}},\ x\in U,\ f_U(x)=0\}$$

とおく．　$j^k_x(f_U)\in P^k(\hat{\mathfrak{F}})$，$j^k_0(h)\in G^k(q)$ とするとき，$G^k(q)$ は $P^k(\hat{\mathfrak{F}})$ の上に右から $j^k_x(f_U)\cdot j^k_0(h)=j^k_x(h^{-1}\circ f_U)$ によって作用し，$P^k(\hat{\mathfrak{F}})$ は，射影写像 $p^k: P^k(\hat{\mathfrak{F}})\to M$ を $p^k(j^k_x(f_U))=x$ と定めることにより，M 上の主 $G^k(q)$－束となる．　実際 $\hat{\mathfrak{F}}$ の局所しずめこみの近傍 U をとるとき，$G^k(q)$－束同形

$$f_U^*(P^k(B))\xrightarrow{\cong}P^k(\hat{\mathfrak{F}})|U$$

が $j^k_0(g)\in P^k(B)$ に対して，$(x, j^k_0(g))\mapsto j^k_x(g^{-1}\cdot f_U)$ によって得られ，これが $P^k(\hat{\mathfrak{F}})$ の局所自明性を与える．

<u>定理</u>2　$k\geqq 1$ に対し，$P^k(\hat{\mathfrak{F}})$ は $V(\hat{\mathfrak{F}})$ の $(k-1)$－ジェット束 $J^{k-1}(V(\hat{\mathfrak{F}}))$ に associate された主 $G^k(q)$－束となる．

証明　$\hat{\mathfrak{F}}$ の局所しずめこみ $f_\alpha: U_\alpha\to B$ に対し，$f_\alpha(U_\alpha)$ が B の局所座標近傍となると仮定してよい．　$f_\alpha^*(T(B))$ は $V(\hat{\mathfrak{F}})$ の U_α 上の局所座標を与える．　各 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ に対し $\gamma^x_{\beta\alpha}\in\Gamma\subset\Gamma(B)$ が存在し，x の近傍で $f_\beta=\gamma^x_{\beta\alpha}\circ f_\alpha$ となることから，$\gamma^x_{\beta\alpha *}$ は局所座標 $f_\alpha^*(T(B))$ から $f_\beta^*(T(B))$ への座標変換となる．　したがって，$P^1(\hat{\mathfrak{F}})$ は $V(\hat{\mathfrak{F}})$ に associate された主 $GL(q;\mathbb{R})$－束となる．　各 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ に対し，$J^{k-1}(V(\hat{\mathfrak{F}}))$ の局所座標 $J^{k-1}(f_\alpha^*(T(B)))$ から $J^{k-1}(f_\beta^*(T(B)))$ への座標変換は，

$$j^{k-1}_{f_\alpha(x)}(\gamma^x_{\beta\alpha *})=j^{k-1}_{f_\alpha(x)}(j^1_{f_\alpha(x)}(\gamma^x_{\beta\alpha}))$$

となり，自然な同一視 $G^k(q)\subset (GL(q;\mathbb{R}))^{k-1}_q$ の下で右辺は $j^k_{f_\alpha(x)}(\gamma^x_{\beta\alpha})$ とみなされる．これは $P^k(\mathcal{F})$ の局所座標 $f^*_\alpha(P^k(B))$ から $f^*_\beta(P^k(B))$ への座標変換となる．

証明終

§4 Transverse projectable connection の構成

L を半単純リー群，L_0 をその閉部分群とし，L/L_0 が連結な等質空間であるとする．L のリー環 $\mathfrak{l}$ が次数つきリー環構造 $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ をもち，$\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ が L_0 のリー環となるとき，L/L_0 を半単純平坦等質空間という．$\mathfrak{l}$ は L/L_0 に associate された次数つきリー環とよばれる．$\mathrm{Dim}\,\mathfrak{g}_{-1}=q$ とするとき，中への準同形写像 $\mathrm{Exp}: \mathfrak{g}_{-1}=\mathbb{R}^q\to L/L_0$ が $x\mapsto(\exp x)L_0$ によって定まる．これを用いて，自然写像 $\iota: L_0\to G^2(q)$ が $\iota(a)=j^2_0(\mathrm{Exp}^{-1}\cdot a\cdot \mathrm{Exp})$ によって定義され，ι は単射準同形写像であることがよく知られている[5]．ι によって L_0 は $G^2(q)$ の部分群とみなされる．

B 上の主 $G^2(q)$－束 $P^2(B)$ の L_0－reduction Q を半単純平坦等質空間 L/L_0 に associate された２次の L_0－構造とよぶ．$\gamma^{(2)}$ を $\gamma\in\Gamma(B)$ の２次 prolongation とし，$\Gamma=\{\gamma\in\Gamma(B)\mid \gamma^{(2)}Q\subset Q\}$ とかくことにする．これを Q の局所同形写像の擬群とよぶ．以下，$\mathcal{F}$ はこの Γ に対する多様体 M 上の Γ－葉層構造を表わすものとする．$\gamma^{(2)}$ は L_0－reduction Q を保つから，$\{f^*_\alpha Q\}_{\alpha\in\Lambda}$ は

M上の主 L_0－束 $\tilde{Q}$ を定め，これはまた $P^2(\mathcal{F})$ の L_0－reduction となる。 $Q^L = Q\times_{L_0} L$，$\tilde{Q}^L=\tilde{Q}\times_{L_0}L$ とかき，$p^L: Q^L\to M$，$\tilde{p}^L:\tilde{Q}^L \to M$ をその射影写像とする。 また $\hat{\gamma}^{(2)}: Q^L|U \to Q^L|\gamma(U)$ を，$\gamma\in\Gamma$ によって引きおこされた Q^L の局所同形写像，$\hat{f}_\alpha^{(2)}: \tilde{Q}^L|U_\alpha \to Q^L|f_\alpha(U_\alpha)$ を $f_\alpha\in\mathcal{F}$ によって引きおこされた局所束写像を表わすものとする。

可換リー環 $\mathfrak{g}_{-1}$ の $\mathfrak{l}$ 上の adjoint representation に関するコホモロジーを $H^{p,q}(\mathfrak{l}) = H^{p,q}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_{-1})$，$H(\mathfrak{l})=\sum H^{p,q}(\mathfrak{l})$ とする。これは $\mathfrak{l}$ の Spencer コホモロジーとよばれる。

<u>定理</u>3 $H^{2,1}(\mathfrak{l})=0$ とする。

(i) (田中－落合 [5, 6]) Q^L 上の接続 ω が存在し，$\gamma\in\Gamma$ に対して $\hat{\gamma}^{(2)*}\omega=\omega$ となる。 ω は L/L_0 形 Cartan normal connection とよばれるものである。

(ii) (西川－佐藤－竹内 [3, 4]) $\{\hat{f}_\alpha^{(2)*}\omega\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $\tilde{Q}^L$ 上の大域的接続 $\tilde{\omega}$ を定める。

さらに $\tilde{\omega}$ は葉層的主L－束に関する接続となることが，次の補題により示される。

<u>補題</u>4 $\tilde{Q}^L$ において $\mathcal{F}$ のリフト $\mathcal{F}(\tilde{Q}^L)$ が存在し，定理3(ii)の接続 $\tilde{\omega}$ は $\mathcal{F}(\tilde{Q}^L)$ に関し，transverse projectable となる。

証明 $\hat{F}=\{v\in T(\tilde{Q}^L) \mid \tilde{p}^L(v)\in F,\ \tilde{\omega}(v)=0\}$ とおく。 $\mathcal{F}$ の局所しずめこみ $f_\alpha: U_\alpha\to B$ をとり，$F|U_\alpha$ および $Q^L|f_\alpha(U_\alpha)$ が自明となる

ようにすれば，$\tilde{F}|U_\alpha$ が自明となり，$\mathfrak{F}$ の局所自明性がいえるから，$\hat{F}$ は $T(\hat{Q}^L)$ の部分ベクトル束となる．　局所1ずめこみ写像族 $\{\tilde{f}_\alpha^{(2)}: \hat{Q}^L|U_\alpha \to Q^L|f_\alpha(U_\alpha)\}$ と局所同形写像族

$$\{(\hat{\gamma}_{\beta\alpha}^{x})^{(2)} \mid \alpha, \beta \in \Lambda,\ x \in U_\alpha \cap U_\beta\}$$

は $\hat{F}$ の積分多様体族を与えるから，$\hat{Q}^L$ の葉層構造 $\mathfrak{F}(\hat{Q}^L)$ が定まる．　$\tilde{F}$ の定め方から，$\mathfrak{F}(\hat{Q}^L)$ は $\hat{p}^L: \hat{Q}^L \to M$ に関する $\mathfrak{F}$ のリフトであり，$\tilde{\omega}$ は $\mathfrak{F}(\hat{Q}^L)$ に関して transverse となる．　さらに $\tilde{\omega}|U_\alpha = \tilde{f}_\alpha^{(2)*}\omega$ であるから，$\tilde{\omega}$ は projectable である．　　証明終

代数的方法により，次の補題が証明される．

<u>補題</u> 5　L をリー群，$L_0 \subset L$ を部分群とし，V を多様体 M の上のベクトル束で，L_0 を構造群にもつとする．　$\phi: L \to GL(r; \mathbb{R})$ を線形表現で $\phi|L_0$ が faithful であるとする．　P を V に associate された主 L_0－束とし，P^L を P の L－拡大とするとき，P^L に associate された M 上のベクトル束 W が存在し，V がその部分ベクトル束となる．

以上の準備の下で，次の定理が得られる．

<u>定理</u> 6　L/L_0 を q 次元半単純平坦等質空間，$\mathfrak{l}$ を L/L_0 に associate された次数つきリー環とし，$H^{2,1}(\mathfrak{l}) = 0$ とする．$\phi: L \to GL(r; \mathbb{R})$ を線形表現で $\phi|L_0$ が faithful となるものとする．　また Γ を L/L_0 に associate された，q 次元多様体上の2次の L_0－構造 Q の局所同形写像から成る擬群とする．$\mathfrak{F}$ が n

次元 $(n \geq q)$ 多様体上の，余次元 q の Γ-葉層構造ならば，$\hat{Q}^L$ に associate されたベクトル束 W が存在し，$\mathfrak{F}$ の法ベクトル束，$V(\mathfrak{F})$ を含み，その枠束 $P(W)$ が transverse projectable connection をもつ。

証明　定理2により，$P^2(\mathfrak{F})$ は $J^1(V(\mathfrak{F}))$ に associate された $G^2(q)$-束であり，したがって $P^2(\mathfrak{F})$ の L_0-reduction $\hat{Q}$ も $J^1(V(\mathfrak{F}))$ に associate された主 L_0-束である．　補題5の V として $J^1(V(\mathfrak{F}))$，P として $\hat{Q}$ をとると，$\hat{Q}^L$ に associate されたベクトル束 W が存在し，$J^1(V(\mathfrak{F}))$ を部分ベクトル束として含み，したがって $V(\mathfrak{F})$ を含む．　また $\hat{Q}^L$ は補題4によって transverse projectable connection をもつ．　定理1によってこの性質は W の枠束 $P(W)$ に移される．

証明終

任意の半単純リー環 $\mathfrak{l}$ に対して，線形表現 ρ をもつ L の存在がわかっている。

文献

[1] F. W. Kamber and Ph. Tondeur, Foliated bundles and characteristic classes, Lecture Notes in Mathematics 493, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975.

[2] P. Molino, Classe d'Atiyah d'un feuilletáge et connexions

transverses projetables, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 272 (1971), 779-781.

[3] S. Nishikawa and H. Sato, On characteristic classes of riemannian, conformal and projective foliations, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 223-241.

[4] S. Nishikawa and M. Takeuchi, Γ-foliations and semisimple flat homogeneous spaces, Tôhoku Math. J. (2) 30 (1978), 307-335.

[5] T. Ochiai, Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 159-193.

[6] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces, J. Math. Soc. Japan 17 (1965), 105-139.