数理解析研究所講究録
347巻 1979年 19-26

複素解析的特異葉層構造

北大 教養 諏訪 立雄

葉層構造の特異点を調べる(generic な特異点を求める, residue を求める, etc.)ために, その変形を考える. §1では変形理論の outline をのべ, §2では局所的葉層構造について考察する.

§1. 特異葉層構造の変形.

Mを(連結)複素多様体とし, $\mathcal{O}_M$, Ω_M および Θ_M でそれぞれM上の正則関数, 正則1-形式および正則ベクトル場の芽の層を表わす. まず特異葉層構造を次のように定義する([2], [3]参照. ここで用いる積分可能条件は[2]のより弱い).

(1.1) 定義. M上の(特異)葉層構造とは, Ω_M の部分層 $\mathcal{F}$ で次の条件 a), b), c) をみたすものをいう:

a) $\mathcal{F}$ は連接.

$\Omega_{\mathcal{F}} = \Omega_M / \mathcal{F}$ とおき，これを$\mathcal{F}$の葉に沿った正則1-形式の芽の層という．

$S = \{ p \in M \mid \Omega_{\mathcal{F},p}$ は$\mathcal{O}_{M,p}$-自由加群でない$\}$

とおくとSはMの解析的集合となる．これを$\mathcal{F}$の特異集合という．

b) $\mathcal{F}$は積分可能，すなわち $d(\mathcal{F}|M-S) \subset (\Omega_M \wedge \mathcal{F})|M-S$.
従って$\mathcal{F}$は$M-S$上に普通の意味の葉層構造を定義する．これの余次元を$\mathcal{F}$の余次元という．

c) $\mathcal{F}$は full，すなわち，Mの任意の開集合Uに対し，
$\omega \in \Gamma(U-S, \mathcal{F})$ ならば $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{F})$.
(これは reduced varieties のみを考えることに対応する)．

(1.2) 定義. M上の葉層構造$\mathcal{F}$が Haefliger 型であるとは，Mの各点の近傍で$\mathcal{F}$の局所生成系として完全1-形式がとれること．

M上の葉層構造$\mathcal{F}$の annihilator $\mathcal{F}^a$ を，前層 $U \mapsto \{ \gamma \in \Gamma(U, \Theta_M) \mid {}^\forall \omega \in \Gamma(U, \mathcal{F}),\ \omega(\gamma) = 0 \}$ で定義される層とする．明らかに $\mathcal{F}^a \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_M)$ である．$\mathcal{F}^a$ の annihilator $(\mathcal{F}^a)^a$ を同様に定義すると$\mathcal{F}$が full であることから $(\mathcal{F}^a)^a = \mathcal{F}$ であることが分る．

(1.3) 定義. M上の葉層構造Fの変形は次のⅠ), Ⅱ)からなる：

Ⅰ) Mの変形 $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} T$ (点$0 \in T$に対し$\pi^{-1}(0) = M$としておく).

Ⅱ) $\mathcal{M}$上の葉層構造$\mathcal{F}$で次をみたすもの：

a) $\mathcal{M}$の固有な解析的集合$\mathcal{S}$ (一般に$\mathcal{F}$の特異集合より大きい) が存在し,

$$\mathcal{F}^a / \mathcal{F}^a \cap \Theta_{\mathcal{M}/T} \big|_{\mathcal{M}-\mathcal{S}} = \pi^* \Theta_T |_{\mathcal{M}-\mathcal{S}}.$$

b) $\mathcal{F}|_M$ (層の制限ではなく, 形式の制限) $= F$.

正則写像による葉層構造のひきもどし, versal変形等の概念は普通に定義される. $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$が$(M, F)$の変形のとき, 条件 a), b)を用いると次の完全可換図式を得る：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \pi^*\Omega_T \otimes \mathcal{O}_M & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_M & \longrightarrow & \Omega_F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \pi^*\Omega_T \otimes \mathcal{O}_M & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{O}_M & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_M & \xrightarrow{\sim} & F & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\qquad (1.4) \qquad (\otimes = \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}})
$$

第一行より写像

$$(1.5)\qquad \rho : T_{T,0} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$$

を得る（$T_{T,0}$ は T の 0 における正則接空間）。これを無限小変形写像という。$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ の元が obstruct されてないとは、その元がある (M, F) の変形の無限小変形写像の像に入っていることをいう。もし $\mathcal{O}_M$-加群 Ω_F が局所自由分解を持てば（例えば、M が射影代数的, Stein etc.）群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ および写像 (1.5) は具体的に表わすことが出来る（表現は用いる局所自由分解にはよらない）。$F = (df_1, \cdots, df_r)$ が局所的 Haefliger 葉層構造であるときは、F の変形理論は関数系 $(f_1, \cdots, f_r)$ の変形理論あるいは $f_1, \cdots, f_r$ で生成される ideal で定義される variety の変形理論（例えば [1] [6] [10] [11] 等）と同値である。また $f : X \to Y$ が複素多様体の間の正則写像のとき、$F^a = \Theta_{X/Y}$ とすると F の変形理論は f の変形理論（[5]）と同値である。

Ext のスペクトル列から次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{l}
0 \to H^1(M, F^a) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M) \to H^0(M, \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)) \to H^2(M, F^a) \\
(1.6)\qquad\quad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \\
\qquad\qquad H^1(M, \Theta_M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_M, \mathcal{O}_M)
\end{array}$$

2行目は M のみの変形、$H^1(M, F^a)$ は F の "equisingular" な変形を表わしている。

§2. 局所的特異葉層構造. $M=U$ を $\mathbb{C}^n$ の原点 0 を中心とする多重円板とし, $\mathcal{F}$ を U 上の余次元 q の葉層構造とする. さらに $\mathcal{F}$ は完全交叉型とする, すなわち $\mathcal{F}$ は q 個の 1-形式 $\omega_1, \cdots, \omega_q$ で生成され generic な点 $z \in U$ で $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q(z) \neq 0$ とする. $\mathcal{F}$ の特異集合 S は $S = \{z \in U \mid \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q(z) = 0\}$ と書ける. (1.1) b) の条件は

(2.1) $\quad d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q = 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, q$

と書け, さらに (1.1) c) より $\operatorname{codim} S \geq 2$ であることが分る. (1.6) により $\mathcal{F}$ の変形を調べるには, 層 $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_M)$ を調べればよい. この層は次のように表わせる.

$$(2.2)\qquad \begin{array}{ccccccc} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\Omega_M, \mathcal{O}_M) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_M) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_M) & \to & 0 \\ \wr\| & & \wr\| & & & & \\ \Theta_M & & \mathcal{O}_M^q & & & & \end{array}$$

関数系 $(h_1, \cdots, h_q) \in \mathcal{O}_M^q$ の $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_M)$ の中での像を $[h_1, \cdots, h_q]$ で表わす.

ここで, 次の Malgrange-Moussu の定理を引用しておく.

(2.3) 定理 ([4][7][8][9]). $\operatorname{codim} S \geq 3$ なら $\mathcal{F}$ は Haefliger 型.

この定理の証明は変形理論の立場から次のように解釈できる. すなわち, $\operatorname{codim} S \geq 3$ なら q-個の parameter $(t_1, \cdots, t_q)$ による $\mathcal{F}$ の変形 $\mathfrak{F}$ で, $\rho(\frac{\partial}{\partial t_i})(\omega_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$,

となるものが作れる．$\mathcal{F}$ は非特異葉層構造だからFrobeniusの定理によりHaefliger型，従ってその制限である $\mathcal{F}$ もそうである．

(2.3)により，$\operatorname{codim} S=2$ が最も興味ある場合である．一般に $\mathcal{F}$ の一次無限小変形（の同型類）全体が，どのような集合で表わされるかを考える．まず

(2.4) $\quad \tau\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_q=0$

をみたす $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された正則2-形式 τ に対し，$H^1(U-S,\mathcal{O}_U^{q^2})\simeq H^2_S(U,\mathcal{O}_U^{q^2})$ の cohomology 類 $[\tau]$ を次のようにして作る．$U-S$ の小多重円板 U_λ による開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとると (2.4)より，各 U_λ 上で $\tau=\sum_{i=1}^{q}\eta_i^\lambda\wedge\omega_i$ と書ける，ただし η_i^λ, $i=1,\cdots,q$, は U_λ 上の正則1-形式である．従って $U_\lambda\cap U_\mu$ 上で

(2.5) $\quad \eta_i^\lambda-\eta_i^\mu=\sum_{j=1}^{q}\psi_{ij}^{\lambda\mu}\omega_j\ ,\qquad \psi_{ij}^{\lambda\mu}=\psi_{ji}^{\lambda\mu}$

と書ける，ただし $\psi_{ij}^{\lambda\mu}$ は $U_\lambda\cap U_\mu$ 上の正則関数で cocycle 条件をみたす．$\Psi=\{\Psi^{\lambda\mu}\}$, $\Psi^{\lambda\mu}=\{\psi_{ij}^{\lambda\mu}\}$ とおけば，Ψ の定める $H^1(U-S,\mathcal{O}_U^{q^2})\simeq H^2_S(U,\mathcal{O}_U^{q^2})$ の cohomology 類は η, ψ のとり方によらないことが示せる．これを $[\tau]$ と書くことにする．

(2.6) 定理. $\mathcal{F}$の一次無限小変形の同型類全体

$$\simeq\left\{[\ell]=[\ell_1,\cdots,\ell_q]\in \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\Omega_{\mathcal{F}},\mathcal{O}_n)\;\middle|\;\begin{pmatrix}[\ell][d\omega_1]\\ \vdots\\ [\ell][d\omega_q]\end{pmatrix}=0 \text{ in } H^2_S(U,\mathcal{O}_U^{q^2})\right\}.$$

(2.7) 例. $n=2$, $q=1$, $\mathcal{F}=\{\omega\}$, $\omega=z_2^q dz_1 - z_1^p dz_2$, p, q は自然数. このときは各一次無限小変形が変形であるように選べ, 次の $(p-1)(q-1)$ 個の parameter $\{t_{rs}\}$, $1\le r\le p-1$, $1\le s\le q-1$, を含む versal 変形 $\tilde{\mathcal{F}}=\{\tilde{\omega}\}$ を得る:

$$\tilde{\omega}=\Big(z_2^q-\sum_{r,s}(p-r)z_1^{r-1}z_2^s t_{rs}\Big)dz_1-\Big(z_1^p+\sum_{r,s}(q-s)z_1^r z_2^{s-1}t_{rs}\Big)dz_2$$
$$+\sum_{r,s}z_1^r z_2^s\,dt_{rs}.$$

References

[1] M. Artin, Deformations of Singularities, Tata Institute, Bombay, 1976.

[2] P. Baum, Structure of foliation singularities, Advances in Math. 15, 361-374 (1975).

[3] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Diff. Geom. 7, 279-342 (1972).

[4] S. Guelorget et R. Moussu, Le théorème de Frobenius pour un pli intégrable, C. R. Acad. Sc. Paris, 282, 455-458 (1976).

[5] E. Horikawa, On deformations of holomorphic maps I, II, J. Math. Soc. Japan, 25, 372-396 (1973), 26, 647-667 (1974).

[6] A. Kas and M. Schlessinger, On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity, Math. Ann. 196, 23-29 (1972).

[7] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 1, Publ. I.H.E.S. 46 (1976).

[8] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 2, Invent. Math. 39, 67-89 (1977).

[9] R. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, Ann. Inst. Fourier, 26, 171-220 (1976).

[10] M. Schlessinger, On rigid singularities, Rice Univ. Studies, 59, 147-162 (1973).

[11] G.N. Tjurina, Locally semiunversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Izv. Akad. Nauk SSSR, 33, 967-999 (1970).