

## 余次元 1 実解析的葉層構造のトポロジー

東大 理 稲葉尚志

## §1 序.

簡単の爲に、全てを orientable category の中で考えることにする。また foliation とはいえ、全て余次元 1 の foliation のことを指す。

さて、 $C^\omega$  級 foliation は、ふつうの  $C^\infty$  級 foliation にくらべるとさまざまな特徴的性質を備えているが、その中で我々の注目したいのは次の三つである。

$C^\omega 1)$  null homotopic な closed transverse curve をもたない。

$C^\omega 2)$  leaf の両側での holonomy 的挙動が同じである。

$C^\omega 3)$  flat leaf の holonomy 群は自明である。

本稿では、これら 3 つの性質を使って、 $C^\omega$  級 foliation の構造と underlying manifold の topological な性質との間の関係を調べる。

この分野の創始者は A. Haefliger であり、彼は  $C^\omega 1)$  を証明し

た。その後20年間近く進展がなかったが、最近J. Plante-W. Thurston [7], S. Goodman [1], C. Lamoureux [4] 等によって新結果が出された。本稿で述べるのは、それらの拡張であるから、彼等の論文が最も重要な参考文献となろう。

## §2. 定理の statement

有限生成群  $G$  が non-exponential growth をもつとは、 $G$  の有限生成集合  $S$  に関する(語の)長さ関数  $l_S: G \rightarrow \mathbb{Z}^+$  に対し、growth function  $g_S: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  を  $g_S(m) = \text{cardinality of } \{x \in G \mid l_S(x) \leq m\}$  で定義したとき、 $\forall A > 0, \forall a > 1$  に対し、ある  $m$  が存在して  $g_S(m) < Aa^m$  となるときにいう。

定理1.  $M$  を閉  $C^\infty$  多様体で  $\pi_1(M)$  が non-exponential growth をもち、 $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$  であるものとするならば、 $M$  上には、 $C^\infty$  級 foliation は存在し得ない。

定理2.  $M$  を3次元の閉  $C^\infty$  多様体で  $\pi_1(M)$  が non-exponential growth をもつものとする。このとき、

i)  $M$  上に  $C^\infty$  級 foliation が存在すれば、 $M$  は  $S^1 \times S^2$  か、 $S^1$  上の  $T^2$  bundle (の total space) かである。

ii) i) の foliation が non-proper leaf をもていれば、 $M$  は  $T^2$  上

の  $S^1$  bundle が  $M_{-1}$  である。(但し  $M_{-1} \equiv T^2 \times I / \sim$ ,  $(x, 0) \sim (-x, 1)$   
for  $\forall x \in T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ )

iii)  $M$  上に  $C^\infty$  級 foliation が存在すれば、その任意の leaf の holonomy 群は、rank 2 以下の free abelian 群になる。更に、実際に rank 2 の holonomy 群をもつ leaf があれば、 $M$  は  $T^3$  が  $M_{-1}$  でなければならぬ。

定理 3.  $M$  を閉  $C^\infty$  多様体で  $\pi_1(M)$  が abelian なるものとする。

$\mathcal{F}$  を  $M$  上の  $C^\infty$  級 foliation、 $L$  を  $\mathcal{F}$  の leaf とする。

i)  $L$  が closed transverse curve と交わるならば、 $\text{corank } i_*^L \geq 1$ 。

ii)  $L$  の閉包が  $L$  以外の non-compact leaf を含むならば、

$\text{corank } i_*^L \geq 2$ 。

但し、 $i^L: L \rightarrow M$  は inclusion、 $\text{corank } i_*^L$  は、 $i_*^L: H_1(L; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R})$  の cokernel の rank のことである。

### §3. 定理 1 の証明の概略

$M$  を定理 1 の仮定を満たす多様体とする。 $M$  上に  $C^\infty$  foliation  $\mathcal{F}$  が存在したとして矛盾を導く。

補題 3.1.  $\mathcal{F}$  は 1 枚以上有限枚の compact leaf をもつ。

証明. 無限枚あれば、non-isolated compact leaf が存在するが、それは flat leaf であるから  $C^3$  と Reeb の大域安定性定理により

$H^1(M; \mathbb{R}) \neq 0$  となり矛盾。1枚もなければ  $C^\infty$  と Plante, Tischler 等の結果から再び  $H^1(M; \mathbb{R}) \neq 0$  となって矛盾する。Q.E.D.

$M$  から全ての compact leaves を抜き去ったときの連結成分を  $V_1, V_2, \dots, V_p$  とする。  $\pi(M)$  が non-exponential growth であることと、Plante [5] を使えば、各  $V_i$  上に holonomy invariant measure  $\mu_i$  が存在することがわかる。更に  $\mu_i$  達は、  $H^1(\bar{V}_i; \mathbb{R})$  の non-zero elements  $\Phi_i$  を定める。 ( $i=1, 2, \dots, p$ )

補題 3.2.  $\bar{V}_i \cap \bar{V}_j \neq \emptyset$  ( $i \neq j$ ) のとき、  $\Phi_i|_{\bar{V}_i \cap \bar{V}_j}$  と  $\Phi_j|_{\bar{V}_i \cap \bar{V}_j}$  は  $H^1(\bar{V}_i \cap \bar{V}_j; \mathbb{R})$  の中で一次従属である。

証明.  $\bar{V}_i \cap \bar{V}_j$  は一枚の compact leaf である。本質的には  $C^\infty$  により証明されるが、具体的には、その compact leaf の holonomy 群が abelian のときには、Plante-Thurston に従い、non-abelian のときには、Hector の結果 [3] を用いて証明する。Q.E.D.

補題 3.2. と Mayor-Vietoris の完全系列によって、  $H^1(M; \mathbb{R}) \neq 0$  となるから矛盾。よって全2の場合に矛盾を生じたから、定理が証明されたことになる。

注) Plante-Thurston が、  $\pi(M)$  exponential growth の場合には、  $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$  でも  $C^\infty$  級 foliation が存在するような  $M$  の例を挙げているので、定理 1 のこれ以上の一般化は望めない。

#### §4. 定理2の証明の概略

$M$  を、 $\pi(M)$  が non-exponential growth をもつような、向き付け可能な閉3次元多様体とする。 $\mathcal{F}$  をその上の orientable な  $C^\omega$  級 foliation とする。

補題4.1.  $\mathcal{F}$  と concordant な transversely- $C^\omega$  foliation  $\mathcal{F}'$  で、Reeb component を一個も持たないものが存在する。

証明.  $\mathcal{F}$  に Reeb component があると、 $C^\omega(2)$  により、それを concordance の範囲内で、消し去ることが出来る (modification along the transverse simple closed curve の逆操作)。これを有限回行うことにより、Reeb component は全て消される。Q.E.D.

補題4.2.  $\mathcal{F}'$  の各 leaf は、 $S^2$  か  $T^2$  か  $\mathbb{R}^2$  か  $S^1 \times \mathbb{R}$  かである。

証明.  $\mathcal{F}'$  は Reeb component を持たないから、Novikov により、各 leaf  $L \in \mathcal{F}'$  に対し、 $i_{\#}^L: \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$  は injective。  $\pi_1(M)$  が non-exponential growth であるから、 $\pi_1(L)$  も non-exponential growth となる。基本群が non-exponential growth になるような2次元 orientable 多様体は上述の4つに限る。Q.E.D.

補題4.3.  $\mathcal{F}'$  は almost without holonomy である。

証明. 補題4.2. により、 $S^1 \times \mathbb{R}$  と diffeo な leaf が holonomy を持たないことを示せばよいが、やや複雑なのでここでは省略する。Q.E.D.

$\mathcal{F}'$  がもし  $S^2$  を leaf に持てば Reeb の大域安定性定理により、

$M = S^1 \times S^2$  となる。また全この leaf が  $T^2$  であれば、 $M$  は  $S^1$  上の  $T^2$  bundle になる。そこで以下  $\mathcal{F}$  は compact leaves を高々有限枚しか持っていないと仮定する。 $M$  から compact leaves を全て抜き去った後の連結成分を  $V_1, V_2, \dots, V_p$  とすると、これらは境界つき多様体の内部である。これらに境界をつけ足したものを  $\hat{V}_1, \hat{V}_2, \dots, \hat{V}_p$  と書く。各  $\hat{V}_i$  の内部の leaves は全て  $\mathbb{R}^2$  であるか全て  $S^1 \times \mathbb{R}$  である。このような foliations は、Rosenberg-Roussarie, Chatelet-Rosenberg, Hector により、位相共役を除いて完全に分類されている。即ち、

補題 4.4. (plane foliation, cylinder foliation の分類定理)  $(V, \mathcal{F})$  を、orientable 3次元多様体上の orientable  $C^2$  foliation とし、 $\partial V$  の各連結成分は compact leaf であり、 $\text{int} V$  に属する leaf は、全て  $\mathbb{R}^2$  であるか全て  $S^1 \times \mathbb{R}$  であるとする。この時  $(V, \mathcal{F})$  は次の 6 types のどれかに位相共役である。

I)  $(T^3, dx + \alpha dy + \beta dz)$  但  $1, \alpha, \beta$  は  $\mathbb{Q}$  上一次独立。

II)  $(S^1 \times D^2, \text{Reeb component})$

III)  $(T^2 \times I, \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}) = (S^1 \times I \times I, \mathcal{F}_{\varepsilon} \times I) /_{(\theta, s, 0) \sim (\theta + \alpha, s, 1)}, \forall \theta \in S^1, \forall s \in I$

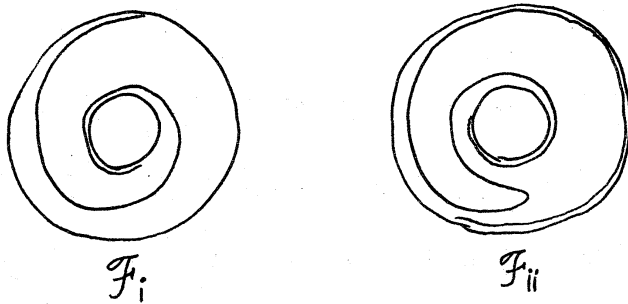
但  $\varepsilon = i$  または  $ii$ ,  $\alpha$  は無理数。

IV)  $(T^2 \times S^1 \text{ bundle}, T^2 \text{ 上の linear irrational line foliation の pull back})$

V)  $(\text{twisted } I \text{ bundle over Klein bottle}, \exists^1 \text{ standard cylinder foliation})$

VI)  $(T^2 \times I, \mathcal{F}_{\varepsilon, 0}) = (S^1 \times I \times I, \mathcal{F}_{\varepsilon} \times I) /_{(\theta, s, 0) \sim (\theta, s, 1)}, \forall \theta, \forall s$

ここで  $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_{ii}$  とは、下図の foliation :



定理を証明するには、補題 4.4. に出てくる 6 種類の foliation を、(2) に注意しつつ、はり合わせてあげればよい。詳細は省略する。 Q.E.D.

定理 2 の証明のなかから、 $\mathcal{F}$  の leaf として <sup>現</sup> われ得る 2 次元多様体は、補題 4.2. の 4 つから高々可算個の disk を抜いたものであることがわかる。特に、

系 4.5. 円周次元多様体  $M$  上の  $C^\infty$  級 foliation  $\mathcal{F}$  が、genus 2 以上の leaf を持っているならば、 $\pi_1(M)$  は、exponential growth である。

## §5. 定理 3 の証明の概略

一般に foliation  $(M, \mathcal{F})$  が与えられたとき、homotopy secant という概念を Lamoreux が定義した。

定義 5.1.  $\mathcal{F}$  の  $x_0$  における homotopy secant  $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$  とは、 $\pi_1(M, x_0)$  の元で、 $x_0$  を通り、 $\mathcal{F}$  に transverse な closed curve である。

あらわされ (orientation を込めた意味で) るもの全体のなす集合のことである。

$\Pi S(x_0, \mathcal{F})$  は半群であることが容易に分かる。また、 $\mathcal{F}$  が  $C^0$  級であれば  $C^1$  により、 $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$  は単位元を持たない。

定義 5.2.  $S$  を単位元を持たない半群とする。  $S$  の元  $s$  が infinitely divisible とは、任意の自然数  $N$  に対して  $S$  の  $N$  個の元  $s_1, s_2, \dots, s_N$  が存在して  $s = s_1 s_2 \dots s_N$  となるときにいう。

次の補題の証明は容易である。

補題 5.3.  $\tau$  を  $x_0$  を通る oriented closed transversal とする。  $\tau$  が  $L_{x_0}$  と無限個の点で交わるならば、  $[\tau] \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$  は、infinitely divisible. (但し  $L_{x_0}$  は、  $x_0$  を通る leaf を表わす)

補題 5.4.  $\alpha \in i_{\#}^{L_{x_0}} \pi_1(L_{x_0}, x_0)$   
 $\beta \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$  }  $\Rightarrow \alpha * \beta \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$

さて定理の証明に入ろう。  $\pi(M)$  は abelian とし、群演算を加法的に表わすことにする。  $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$  は単位元を持たない半群であったから、明らかに torsion element を持たない。そこで

$q: \pi(M) \rightarrow \pi(M) / \text{torsion} \left( \stackrel{\text{同視}}{=} \mathbb{Z}^m \right)$  とし、  $p: \mathbb{R}^m - \{0\} \rightarrow S^{m-1}$  を  $p(x) \equiv \frac{x}{|x|}$  とする。  $q|_{\Pi S(x_0, \mathcal{F})}$  は injective である。

補題 5.5.  $S$  を単位元を持たない  $\mathbb{Z}^m$  の部分半群とすると、  $\mathbb{R}^m$  のある元  $a$  が存在して  $S \subset \{x \in \mathbb{Z}^m \mid (a, x) \geq 0\}$ . 但し  $(,)$  は内積。

補題 5.6.  $S$  を上述のものとする。もし  $a \in \mathbb{Z}^m$  が存在して、



$S \subset \{x \in \mathbb{Z}^m \mid (a, x) > 0\}$  ならば、 $S$  の全ての元は、infinitely divisible でない。

証明は容易である。

補題 5.7.  $\text{TTS}(x_0, \mathcal{F}) \neq \emptyset \Rightarrow \text{pr } i_{\#} \pi(L, x_0) \subset \overline{\text{pr } \text{TTS}(x_0, \mathcal{F})}$ .

証明.  $\alpha \in i_{\#} \pi(L, x_0)$ ,  $\beta \in \text{TTS}(x_0, \mathcal{F})$  とする。補題 5.4. によ  
り任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して、 $n\alpha + \beta \in \text{TTS}(x_0, \mathcal{F})$ 。ゆえに、

$$\text{pr}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{pr}(n\alpha + \beta) \in \overline{\text{pr } \text{TTS}(x_0, \mathcal{F})} \quad \text{Q.E.D.}$$

定理 3 の i) を証明する。corank  $i_x = 0$  とせよ。すると、

$\text{pr } i_{\#} \pi(L)$  は  $S^{m-1}$  の中で dense になる。よって、上の補題から

$$S^{m-1} = \overline{\text{pr } i_{\#} \pi(L)} = \overline{\text{pr } \text{TTS}(x_0, \mathcal{F})}$$

となるが、これは補題 5.5. に反している。

Q.E.D.

補題 5.8.  $i_{\#} \pi(L, x_0) \cap \text{TTS}(x_0, \mathcal{F}) = \emptyset$

証明.  $\gamma \in i_{\#} \pi(L, x_0) \cap \text{TTS}(x_0, \mathcal{F})$  とする。  $-\gamma \in i_{\#} \pi(L, x_0)$

と、 $\gamma \in \text{TTS}(x_0, \mathcal{F})$  に対して補題 5.4. を使えば、

$$0 = (-\gamma) + \gamma \in \text{TTS}(x_0, \mathcal{F})$$

となり、 $C^{\infty}(1)$  に矛盾する。

Q.E.D.

補題 5.9.  $L$  の閉包  $\bar{L}$  が  $L$  以外の noncompact leaf  $L'$  を含むならば、 $\text{TTS}(x_0, \mathcal{F})$  は infinitely divisible な元をもつ。

証明.  $L'$  は noncompact だから、 $L'$  を通る closed transverse curve  $\tau$  が存在する。 $\tau$  は必然的に  $L$  と無限個の点で交わりから補題

5.3.により結論が従う。

Q.E.D.

さて、定理3のii)を証明しよう。  $\text{corank } i_* = 1$  とせよ。すると、容易にわかるように、ある  $a \in \mathbb{Z}^m$  が存在して、

$$\partial \overline{\text{pgi}_\# \pi(L, x_0)} = S^{m-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid (a, x) = 0\}.$$

これと補題5.6, 5.8を合わせると、 $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ の全ての元は、infinitely divisibleでないことになる。しかしこれは、補題5.9に矛盾している。従って証明された。 Q.E.D.

### 参考文献

- [1] S. Goodman ; On the structure of foliated 3-manifolds separated by a compact leaf, Inv. Math. 39 (1977), 213-221.
- [2] G. Hector ; Feuilletages en cylindres, Spring Lecture Note 597 (1977).
- [3] G. Hector ; Classification cohomologiques des germes de feuilletages, preprint
- [4] C. Lamoreux ; Sur quelques phénomènes de captage, Ann. Inst. Fourier 23 (1973), 229-243.
- [5] J. F. Plante ; Foliations with measure preserving holonomy, Ann. Math 102 (1975) 327-361.
- [6] H. Rosenberg and R. Roussarie ; Topological equivalence of Reeb foliations, Topology 9 (1970), 231-242.
- [7] J. F. Plante and W. Thurston ; Polynomial growth in holonomy groups of foliations, Comm. Math. Helv. 51 (1976), 327-361.