数理解析研究所講究録
347巻 1979年 1-8



# P$\mathbb{C}$-foliation について

京大理 足立正久

$\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}^q$ の local analytic automorphisms の germs のつくる topological groupoid とし、$B\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ をその分類空間とする(Buffet-Lor の意味). differential をとることにより次の連続写像をうる:

$$\nu : \Gamma_q^{\mathbb{C}} \longrightarrow GL(q, \mathbb{C}).$$

これは次の連続写像を induce する; これも同じ $\nu$ でかく:

$$\nu : B\Gamma_q^{\mathbb{C}} \longrightarrow BGL(q, \mathbb{C}).$$

この $\nu$ の homotopy fibre を $F\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ とかく.($B\bar{\Gamma}_q^{\mathbb{C}}$ とかくことも多い).

この $F\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ のホモトピー群について次のことがしられている:

1971 A. Haefliger [4], $\pi_1(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$, $q \geq 1$.

1974 P. Landweber [6] $\pi_i(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$. $i < q$.

1977 M. Adachi [1] $\pi_q(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$.

197? W. Thurston $\pi_2(F\Gamma_1^{\mathbb{C}}) = 0$.

1971 R. Bott [2]. $\pi_{2q+1}(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) \neq 0$.

そこで次のことが予想される。

予想：　$\pi_{q+r}(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$，　$0 < r \leq q-2$.

この予想が正しければ，"偶数次元の open manifold の上の almost complex structure は homotopic にうごかせば integrable になる" ことがわかる。(Haefliger の classification theorem より).

上の予想に近ずくために PC-manifold の上に PC-foliation という概念を導入して考えてみたがうまくいかなかった。

## 1. PC-foliations on PC-manifolds.

$M$ を $n$ 次元の $C^\omega$-manifold，$n = 2p+q$ とする。

Def. $M$ の上の <u>PC-structure of type</u> $(p, q)$ とは，$T(M)$ の complexification $\mathbb{C}T(M)$ の $p$ 次 subbundle $S$ で次の条件を満足するもの：

i) $S \cap \bar{S} = \{0\}$,

ii) $T(M) \sim \xi^{2p} \oplus \eta^q$,　$\mathbb{C}T(M) \sim (S \oplus \bar{S}) \oplus (\eta^q \otimes \mathbb{C})$,

iii) $[\Gamma(S), \Gamma(S)] \subset \Gamma(S)$,

ここで $\Gamma(S) = \{S$ の $C^\infty$-cross-section$\}$.

Note: PC-structure については Tanaka [7] を参照。Kuranishi [5] では CR-structure とよんでいる。

$S$ を $M$ の上の PC-structure of type $(p, q)$ としたとき，$(M, S)$ を <u>PC-manifold of type</u> $(p, q)$ とよぶ。

例1. $M$: $C^\omega$-manifold $\Rightarrow$ $M$ は PC-manifold of type $(0,n)$ と考えられる.

例2. $M$: complex manifold of complex dimension $n$

$\Rightarrow$ $M$: PC-manifold of type $(n,0)$ と考えられる.

例3. $M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$, $n = 2p+q$.

$\Rightarrow$ $M$ は自然に PC-structure of type $(p,q)$ をもつ.

次に PC-structure に関する基本的な性質をのべる. (cf. Kuranishi [5], Tanaka [7]).

Def. $(M, S_M)$, $(V, S_V)$ を PC-manifold とする. $f: M \to V$ を $C^\omega$-map とする. $f$ が次の条件を満足するとき, $f$ を PC-map あるいは holomorphic という:

$$df: T(M) \to T(V), \quad \mathbb{C}(df): \mathbb{C}T(M) \to \mathbb{C}T(V),$$

$$\mathbb{C}(df)(S_M) \subset S_V.$$

Proposition 1. $M$ を PC-manifold of type $(p,q)$, $n=2p+q$ とする.

i) $\exists (j, W)$: $W$: complex manifold of $\dim_{\mathbb{C}}$ $p+q$,

$j: M \to W$, holomorphic imbedding,

such that $\forall V$: complex manifold,

$\forall f: M \to V$, holomorphic map,

$\exists \tilde{f}: W \to V$, holomorphic map,

次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[drr, "\tilde{f}"] & & \\ M \arrow[u, "j"] \arrow[rr, "f"] & & V \end{tikzcd}$$

ii) 上のような $(j, W)$ は germ のいみで unique:
すなわち、$(j, W)$, $(j', W')$ と2つあったとすると、

$j(M) \subset {}^{\exists}U \subset W$,

$j'(M) \subset {}^{\exists}U' \subset W'$,

$\exists h : U \to U'$, biholomorphic homeo.

次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "h", "\wr"'] \subset W \\ M \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "j'"'] & U' \subset W' \end{tikzcd}$$

上の $(j, W)$, あるいはその germ を $M$ の PC-化 とよび $PC(M)$ とかく。また上の $\tilde{f}$ を $f$ の PC-化 とよび $PC(f)$ とかく。

例1. $M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$, $n$: even.

$$M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^n - \{0\} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{C}^{\frac{n}{2}}.$$

$M^n$ を上のように PC-manifold of type $(\frac{n}{2}, 0)$ と考えると、$PC(M^n) = \mathbb{C}^{\frac{n}{2}} - \{0\}$.

例2. $M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^2 = (S^{n-1} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $n$: even.

$M$ はしぜんに PC-structure of type $(\frac{n}{2}, 1)$ をもつ。このとき、 $PC(M) = (\mathbb{C}^{\frac{n}{2}} - \{0\}) \times \mathbb{C}^1$.

<u>Proposition</u> 2. $(M, S)$ を PC-manifold of type $(p, q)$ とする。 $(j, W)$ を $(M, S)$ の PC-化とする。このとき、

$$j^* T(W) \sim \xi'_{\mathbb{C}} \oplus \eta^q \otimes \mathbb{C}, \quad (\text{complex vector bundle として}),$$

ここで $T(M) \sim \xi^{2p} \oplus \eta^q$, $\xi'_{\mathbb{C}}$ は $\xi^{2p}$ の complex reduction.

Remark. $(M, S)$ : PC-manifold of type $(p, q)$, $U$ を $M$ の open set とする。このとき、 $U$ へしぜんに PC-structure of type $(p, q)$ が入る。

<u>Definition</u> $(M, S)$ : PC-manifold of type $(p, q)$,

$V$ : complex manifold.

$f : M \to V$. PC-map.

とする。 $f$ が次の条件を満足するとき、 $f$ を <u>PC-submersion</u> とよぶ: $PC(f) : W \to V$ が holomorphic submersion, ここで $(j, W)$ は $M$ の PC-化.

<u>Definition</u> $(M, S)$ を PC-manifold of type $(p, q)$ とする。 $\mathcal{G} = \{(V_\alpha, g_\alpha) ; \alpha \in A\}$ が <u>PC-foliation of codim $r$ on $M$</u> とは、

i) $M = \bigcup_\alpha V_\alpha$. open covering.

ii) $g_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{C}^r$, PC-submersion,

iii) $V_\alpha \cap V_\beta \neq \phi$ ならば、 continuous map $g_{\alpha\beta}$ :

$V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow \Gamma_r^{\mathbb{C}}$ が存在して,

$$g_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)\cdot g_\beta(x), \qquad x \in V_\alpha \cap V_\beta .$$

2つの $P\mathbb{C}$-foliation of codim. $r$ on $M$ の間の equivalence はふつうの foliation のときと同様に定義する.

$M$ を $P\mathbb{C}$-manifold of type $(p,q)$, $(j, W)$ を $M$ の $P\mathbb{C}$-化とする.

<u>Lemma 1</u>. $\mathcal{F}$ が holomorphic foliation of codim. $r$ on $W$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}|M = j^*\mathcal{F}$ は $P\mathbb{C}$-foliation of codim. $r$ on $M$.

Proof. やさしい.

<u>Lemma 2</u>

$$\left\{\begin{matrix}\text{holomorphic foliation of codim. } r\\ \text{on } W\end{matrix}\right\}\Big/\!\sim \;\overset{\mathrm{Hol}}{\longleftrightarrow}\; \left\{\begin{matrix}P\mathbb{C}\text{-foliation of}\\ \text{codim. } r \text{ on } M\end{matrix}\right\}\Big/\!\sim$$

$$\{\mathcal{F}\} \longmapsto \{\mathcal{F}|M = j^*\mathcal{F}\}$$

は bijective, ただし左の～は germ のいみ.

Proof. inj: 一致の定理

surj: $\Gamma$-foliation のときとほゞ同様にしてできる. Prop.1 を用いる.

2. はじめにのべた予想を示すには「$P\mathbb{C}$-foliation に対する Gromov-Phillips の transversality theorem」が Key となる. これが証明できない. 反例もみつからない.

3. 偶数次元 closed manifold で almost complex structure をもつが, complex structure をもたないものがあることがしられている (cf. van de Ven [8], S.-T. Yau [9]).

References


[1] M.Adachi, A note on complex structures on open manifolds, J. Math. Kyoto Univ., 17(1977), 35-46.
J.

[2] R. Bott, On Lefschetz formula and exotic characteristic classes, Symposia Math., 10(1972), 95-105.

[3] A. Haefliger, Feuilletages sur les variétés ouvertes, Topology, 9(1970), 183-194.

[4] A. Haefliger, Homotopy and integrability, Lecture Notes in Math. Springer, 197(1971), 133-163.

[5] M. Kuranishi, Isolated singularities and $\bar{\partial}_b$ 京大 数研 レクチャーノート.

[6] P. Landweber, Complex structures on open manifolds, Topology, 13(1974), 69-75.

[7] N. Tanaka, A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds, Lecture Notes in Math. Kyoto Univ., 9(1975).

[8] A. van de Ven, On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds, Proc. Nat. Acd. Sci. USA., 55(1966),

1624-1627.

[9] S.-T. Yau, Parallélizable manifolds without complex structure, Topology, 15(1976), 51-53.