数理解析研究所講究録
349巻 1979年 45-50

高次元のHolonomic Quantum Fields

京大数理研　佐藤　幹夫
三輪　哲二
神保　道夫

0. 既に何度か発表して来たように，2次元の時空では，モノドロミー保存変形理論と関連してすべてをexactに閉じた形で扱い得る場の理論の模型が構成できる[1]。この類似を共変的局所場の形で高次元時空に構成しようと試みると，大きな困難にぶつかる。むしろ自然でストレートな拡張は，局所場を捨ててextended objectに依存する場の理論を作ることである。

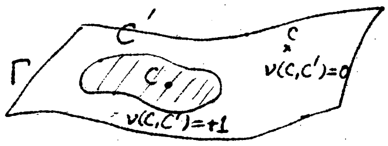
我々の構成法は，次の手続きを踏んでなされる。まず2種の場 ψ（＝補助場）と φ（＝強結合場）を考える。ψ はbosonでもfermionでもよいが，自由場であることが大切である。次に φ と ψ の間に交換関係を設定し，その結果 φ が（定数倍を除き）一意的に ψ を用いて表わされてしまうようにする（＝Clifford群の理論）。交換関係の設定のため，次の状況を考えよう。今 r と s を $r+s=n-2$（n：時空の次元）を満たす非

負整数とし、C, C' をそれぞれ r 次元，s 次元の spacelike closed submanifold とする。これらが互いに spacelike にある時それらを含む spacelike hypersurface Γ をとって考えれば，そこでは linking number $\nu(C,C')$ が定義される。そこで，C, C' に依存する場 $\psi(C)$，$\varphi(C')$ を考え

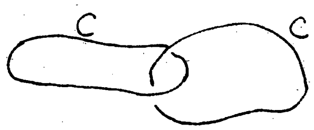
$$\psi(C)\varphi(C') = (-1)^{\nu(C,C')}\varphi(C')\psi(C)$$

$$(\text{if } C, C' : \text{mutually spacelike})$$

とおくのである[1]。-1 のかわりに複雑なモノドロミー行列を折込むことも容易である。



$r=0$, $s=1$



$r=1$, $s=1$ （同時刻）

以下では，現在実行できている $r=0$，即ち補助場 $\psi(x)$ が局所場の場合について解説する[2]。[2] 参照。

1. 少し天下りであるが，次の (fermion) path integral を考えよう：

$$\tau[A] = \frac{\iint \mathcal{D}\bar{\psi}\cdot\mathcal{D}\psi\cdot e^{iS_0 + iS_{int}}}{\iint \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\cdot e^{iS_0}} = \langle \mathbb{T}(e^{iS_{int}}) \rangle$$

$$\tau^*[A] = \frac{\iint \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\cdot e^{-iS_0 + iS_{int}}}{\iint \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\cdot e^{-iS_0}} = \langle \mathbb{T}^*(e^{iS_{int}}) \rangle$$

$$S_0 = \int d^n x\, \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x), \quad S_{int} = -\int d^n x\, \bar{\psi}(x) A\!\!\!/(x)\psi(x)$$

$$\left(\partial\!\!\!/ = \sum_{\mu=0}^{n-1} \gamma^\mu \partial_\mu, \quad A\!\!\!/(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \gamma^\mu A_\mu(x) \right)$$

ここに$(A_\mu(x))_{\mu=0,\cdots,n-1}$は与えられた外場で[3]，$\mathbb{T}$（$\mathbb{T}^*$）は時間順序積（反時間順序積）。物理学者は $\tau[A] = \det(i\partial\!\!\!/ - A\!\!\!/ - m) \times$ $\times \det(i\partial\!\!\!/ - m)^{-1}$ とするが、その意味はあまり明確でない。ここではそれを Clifford 群の元 $\varphi[A] = \mathbb{T}(e^{iS_{int}})$ の真空期待値としてとらえる。

今、外場$A(x)$のひきおこす古典的散乱問題を考え，それに対する散乱作用素を$T[A]$としよう：

$$T[A] : w_{in}(x) \mapsto w_{out}(x)$$

但し $w_{\substack{in \\ out}}$ は $(i\partial\!\!\!/ - A\!\!\!/(x) - m)w(x) = 0$ の解wの漸近形で

$$w(x) \sim w_{in}(x) \ (x^0 \to -\infty), \quad \sim w_{out}(x) \ (x^0 \to +\infty)$$

共役方程式 $\bar{w}(x)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + A\!\!\!/(x) + m) = 0$ $\left(\bar{w}(x) i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} = \sum_{\mu=0}^{n-1} i\partial_\mu \bar{w}(x) \cdot \gamma^\mu \right)$ についても同様に$T[A] : \bar{w}_{in}(x) \mapsto \bar{w}_{out}(x)$を定める。ここで自由な方程式の解空間 $\{ (\bar{w}(x), w(x)) \mid \bar{w}(x)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m) = 0,$ $(i\partial\!\!\!/ - m)w(x) = 0 \} \equiv W$ は，内積

$$\langle (\bar{w}, w), (\bar{w}', w') \rangle = \int_{\text{spacelike}} \left(\bar{w}(x) d\!\!\!/^{n-1}x\, w'(x) + \bar{w}'(x) d\!\!\!/^{n-1}x\, w(x) \right)$$

$$d\!\!\!/^{n-1}x = \sum_{\mu=0}^{n-1} \gamma^\mu (-)^\mu dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{\mu-1} \wedge dx^{\mu+1} \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$$

によって直交空間となるが，$T[A]$ はW上の回転になっていることは容易に示される。従って，それをひきおこすClifford群の元が存在するが，実は $T[A] = T_{\varphi[A]} = T_{\varphi^*[A]}^{-1}$，

$\varphi[A] = \mathbb{T}(e^{iS_{int}})$, $\varphi^*[A] = \mathbb{T}^*(e^{iS_{int}})$。

("証明") $(i\not{\partial}_x - \not{A}(x) - m)\mathbb{T}(e^{iS_{int}}\psi(x)) = 0$ に注意すれば $w(x) = \langle \Phi_1 | \mathbb{T}(e^{iS_{int}}\psi(x)) | \Phi_2 \rangle$ ($\langle \Phi_1 |, | \Phi_2 \rangle$ は任意の状態ベクトル) も同じ方程式の解。一方時間順序積があるから

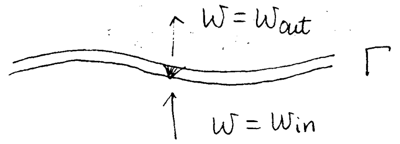
$$w(x) \sim w_{in}(x) = \langle \Phi_1 | \varphi[A]\psi(x) | \Phi_2 \rangle \quad (x^0 \to -\infty)$$

$$\sim w_{out}(x) = \langle \Phi_1 | \psi(x)\varphi[A] | \Phi_2 \rangle \quad (x^0 \to +\infty)$$

従って $T[A] : w_{in} \mapsto w_{out}$ により $\varphi[A]\psi(x) = T[A](\psi(x))\cdot\varphi[A]$ を得る(basis と係数の関係で $T[A]^{-1}$ でないことに注意)。//

このことを利用すると, $\tau[A] = \langle \varphi[A] \rangle$, $\tau^*[A] = \langle \varphi^*[A] \rangle$ の積 $\tau[A]\tau^*[A]$ を compact な形で表示することができる。詳しくは[2]。

2. 次に, 外場 $A(x)$ の台が, ある空間的超曲面の上に集中した極限の場合を考えよう。



このとき回転 $T[A]$ は, Γ 上で瞬間的に起ることになり, 波動方程式の有限伝播性を考慮すると, 結局次のような掛け算演算子(Γ 上の)となる:

$$T[A] : w_{in}(\xi) \longmapsto M(\xi)w_{in}(\xi) \qquad \xi \in \Gamma$$

w を多成分とすれば一般に $M(\xi)$ は行列値函数となる。

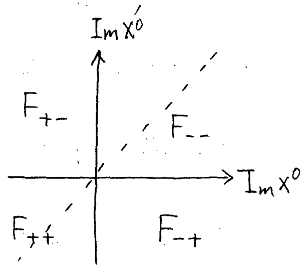
更に $M(\xi)$ が step function であるような極限に移行する。このとき $M(\xi)$ はある（時空内で余次元２の）部分多様体 B_ν ($\nu=1,2,\cdots$) に沿って jump をもつが，それが "main field" φ の argument に対応する。こうして，余次元２の extended object B_ν (B びモノドロミー M_ν) に依存する field operator $\varphi[B_1, M_1; B_2, M_2; \cdots]$ が Clifford 群の元として得られることになる。

より具体的には，φ は次の形となる：

$$\varphi = \langle\varphi\rangle :\exp\left(\iint \bar{\Psi}(x')\, d^{n-1}x\, R(x,x')\, d^{n-1}x'\, \psi(x')\right):$$

$$R(x,x') = F_{+-}(x,x') + F_{-+}(x,x') - F_{++}(x,x') - F_{--}(x,x')$$

ここに $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x')$ ($\varepsilon,\varepsilon'=\pm$) は，方程式 $(i\partial\!\!\!/_x - m)F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x') = 0$, $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x')(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_{x'} + m) = 0$ の解であって，Euclidean への解析接続の性質で特徴づけられる。簡単のため $\Gamma = \{x^0=0\}$ とするならば，これらは $\{\varepsilon\,\mathrm{Im}\,x^0 < 0,\ \varepsilon'\,\mathrm{Im}\,x'^0 < 0\}$ へ接続されて $x=x'$ では基本解的な特異性を持ち，次の境界条件を満たす：



$$F^{Euc}_{+\varepsilon'}(\xi,x') = M(\xi)\, F^{Euc}_{-\varepsilon'}(\xi,x')$$

$$F^{Euc}_{\varepsilon+}(x,\xi') = F^{Euc}_{\varepsilon-}(x,\xi')\, M(\xi')^{-1} \qquad \xi,\xi' \in \Gamma$$

(Riemann-Hilbert の問題！)。

$\langle\varphi\rangle$ 自身は不定であるが，$\langle\varphi\otimes\varphi^{-1}\rangle$ は一意に定まり，その対数変分が再び $F_{\varepsilon\varepsilon'}$ で表わされる。例えば Γ を固定して

Mを変えるとき

$$\delta \log \langle \varphi \otimes \varphi^{-1} \rangle = \int_{\Gamma} \mathrm{trace}\Big\{ \delta M(\xi)\cdot M(\xi)^{-1} \times \big(-F_{++}(\xi,\xi')+G_{--}(\xi,\xi')-iS(\xi-\xi')\big)\Big|_{\xi=\xi'} d^{n-1}\xi' \Big\}$$

G_{--}はF_{--}の定義でMをM^{-1}にとりかえたもの。integrandの各項は対角線に特異性をもつが，全体は$\xi=\xi'$でregularになることに注意。

(文献)

[1] 例えば「核融合研究」別冊(1978)所載の神保・三輪・佐藤の記事参照。

[2] M.Sato, T.Miwa, M.Jimbo : RIMS preprint 266,272 (1978).

[3] 神保・三輪：本講究録の記事。

1) 類似の交換関係は't Hooftも考察しているが，彼の場合$\psi(C)$, $\varphi(C')$とも自由場ではない。't Hooft : On the phase transition towards permanent quark confinement. preprint 1978.

2) $r \geq 1$のときには，extended object に対する"自由場"の意味から検討が必要であろう。なお最近PolyakovがZ_2-ゲージ理論でfree string の operatorを構成していることは注目に値する。

3) $A_\mu(x)$は時間方向$|x^0| \to \infty$について急速に減少するものとする。