数理解析研究所講究録
349巻 1979年 32-44

線形作用素のスペクトル不変量と非線形方程式の保存則

京大 工　　桑原類史

§0. 序

ある種の非線形発展方程式は逆散乱法によって解くことができる．すなわち，非線形発展方程式

(1) $u_t = K(u)$ $\left(u_{xt} = K(u) \right)$

に対して，固有値方程式

(2) $A(u)\psi = \lambda\psi$

および，時間発展方程式

(3) $\psi_t = B\psi$

の組を考える．ここで，$A(u)$ および B は線形作用素である．このとき，本質的なことは，u が方程式(1)に従って変化するとき，固有値方程式(2)の固有値 λ が時間 t に依らず一定であることである．

このことを線形作用素 $\mathrm{A} \equiv A(u)$ を中心に考えてみる．A の固有値全体を Sp(A) とする．すると，非線形方程式(1)は

$Sp(A)$ を不変にする A の変形，すなわち A の等スペクトル変形（isospectral deformation）の方程式であるということができる．例えば，Hill 作用素

$$A(u) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u$$

に対する等スペクトル変形の方程式として，K-dV 方程式および，高次 K-dV 方程式がある（Lax [1]）．

今，I_A が $Sp(A)$ にのみ依存する量であるとき，I_A を A のスペクトル不変量（spectral invariant）と呼ぶ．u が方程式（1）に従って変化するとき $Sp(A)$ は不変であるから，I_A は非線形発展方程式（1）の保存量であることがわかる．すなわち，$\mathcal{C}_K$ を（1）の保存量の全体，$\mathcal{I}_A$ を A のスペクトル不変量の全体とすれば　$\mathcal{I}_A \subset \mathcal{C}_K$　が成り立つ．特に，$\mathcal{I}_A$ は時間発展式（3）には無関係な保存量である．

ここでは，$\mathcal{I}_A$ を考察するのに，Seeley [2] による方法を適用しよう。その手順は以下の通りである；

(i) A に対して，複素巾 A^s を定義する．

(ii) A^s の核函数 $K_s(x, y)$ を考える．

(iii) $Sp(A) = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ とするとき，

$$\zeta(s) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^s = \mathrm{Trace} \int K_s(x, x)\, dx$$

が成り立つ．（$Re(s) \ll 0$）

(iv) $K_s(x, x)$ は $\underbrace{\text{複素平面上で}}_{s\text{の函数として，}}$ 1 位の極（可算個）のみをもつ

有理型函数に解析拡大できる．

(v) 極における留数 $R_j(x)$ $(j=1,2,\cdots)$ はAのシンボルから計算することができる．そして，$\mathrm{Trace}\int R_j(x)\,dx$ はAのスペクトル不変量である．

§1. 楕円型作用素の複素巾

Mを n 次元，コンパクト，C^∞ 多様体 $(\partial M=\phi)$，EをM上の C^∞ ベクトル束とする．

AをE上の $m(>0)$ 階楕円型微分作用素で，最小増大の方向 θ を持つとする．すなわち，Aのシンボル $\sigma(A)$ が

$$\sigma(A)(x,\xi)=\sum_{j=0}^{m}a_{m-j}(x,\xi),\quad \left(a_{m-j}(x,\xi)\text{ は }\xi\text{ について }(m-j)\text{ 次同次}\right)$$

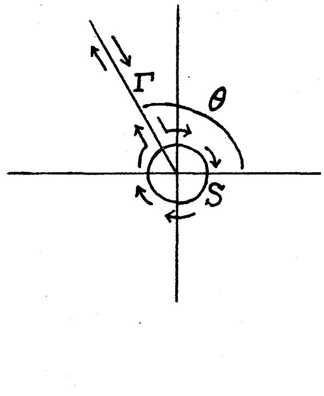
であるとき，

- $^\forall\xi\neq 0$ に対して，$\det a_m(x,\xi)\neq 0$.
- $a_m(x,\xi)$ の固有値は $\{\lambda;\ |\theta-\arg\lambda|>\delta,\ \delta>0\}$ 内にある．

さらに，$\lambda=re^{i\theta}\ (r\geqq 0)$ に対して，$(A-\lambda I)^{-1}$ が存在して，

- $\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqq C|\lambda|^{-1}$,（C：定数）

が成り立つとする．



Γを右図の様な∞から∞への曲線とする．ただし，Sp(A)が小円 S の外部にある様にとる．このとき，

$\mathrm{Re}(s)<0$ なる複素数 s に対して，

$$A_s = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^s (A-\lambda I)^{-1} d\lambda$$

が定義される．そして，$^\forall s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{cases} A^s = A_s, & Re(s) < 0 \\ A^s = A^k \cdot A_{s-k}, & k: 整数,\ k-1 \leq Re(s) < k \end{cases}$$

として定義すると，次が成り立つ（[2]）；

<u>命題 1.</u> A^s は $Re(ms)$ 次の楕円型擬微分作用素で，$A^0 = I$，$A^1 = A$，$A^{s+t} = A^s \cdot A^t$ を満足する．

さらに，A^s のシンボル $\sigma(A^s)$ は擬微分作用素の理論(e.g. [3])を使って求められる；$(A-\lambda I)$ のパラメトリックス B_λ のシンボル

$$\sigma(B_\lambda)(x,\xi,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$$

（ここで，$b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$ は $(\xi, \lambda^{1/m})$ について $(-m-j)$ 次同次.）

に対して，$\sigma(B_\lambda(A-\lambda I)) = I$ であるから，漸近展開公式より

$$\begin{cases} b_{-m}(a_m - \lambda) = I, \\ b_{-m-j}(a_m - \lambda) + \displaystyle\sum_{\substack{l<j \\ l+k+|\alpha|=j}} \frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha b_{-m-l})(D_x^\alpha a_{m-k}) = 0. \end{cases}$$

これより，

$$(4) \quad \begin{cases} b_{-m} = (a_m - \lambda)^{-1}, \\ b_{-m-j} = -b_{-m} \cdot \left\{ \sum \frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha b_{-m-l}) \cdot (D_x^\alpha a_{m-k}) \right\}. \end{cases}$$

そして，$\sigma(A^s)$ は $\{b_{-m-j}\}$ を用いて，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sigma(A^s)(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^s b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda}$$

であることが示される.

§2. A^s の核函数および固有値との関係

$K_s(x,y)$ を A^s の核函数とする;

i.e.
$$(A^s f)(x) = \int_M K_s(x,y) f(y)\, dy .$$

$K_s(x,y)$ について次が成り立つ([2]);

<u>命題 2.</u>

(i) 非負整数 k に対して, $s \longmapsto K_s$ は

$$\{s \in \mathbb{C} ;\ Re(ms) < -n-k\} \longrightarrow \mathcal{K}^k_{M\times M} \equiv \left\{\begin{array}{l} M\times M \text{ 上の } C^k\text{-函数} \\ \text{を成分とする行列} \end{array}\right\}$$

なる正則写像である.

(ii) C を $M \times M$ のコンパクト部分集合で, $^\forall(x,x) \notin C$ とする. $s \longmapsto K_s|_C$ (K_s の C への制限) は $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}^\infty_C$ なる正則写像である.

(iii) $^\forall x \in M$ に対して, $s \longmapsto K_s(x,x)$ は $\{s \in \mathbb{C} ;\ Re(ms) < -n\}$ 上の正則函数から $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析拡大できる. そのとき, 極は $s = (k-n)/m$ ($k = 0, 1, 2, \cdots$) で, その位数は 1, 留数は

$$(5)\qquad \boxed{\frac{1}{(2\pi)^{n+1} i m} \int_{|\xi|=1} \int_\Gamma \lambda^{(k-n)/m} \cdot b_{-m-k}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda\, d\xi}$$

で与えられる. ただし, $s = 0, 1, 2, \cdots$ で留数は 0 となる.

次に，核函数 $K_s(x,y)$ と $Sp(A)$ の関係を見よう．

今，A が可逆，すなわち，$0 \notin Sp(A)$ とする．ベクトル束E上になめらかなHermite内積が入っているとし，A^* をこの内積に関するAの共役作用素とする．

【a】Aが正規 i.e. $AA^* = A^*A$ であるとき，$Sp(A) = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対する固有函数系 $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ で，完備な正規直交系がとれる．そして，良く知られている様に，

$$(6) \qquad K_s(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^s \phi_i(x) \otimes \overline{\phi_i(y)}$$

が成り立つ．これから，直ちに，次の関係式が得られる；

$$(7) \qquad \boxed{\zeta(s) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^s = \mathrm{Trace} \int_M K_s(x,x)\,dx}$$

【b】A が正規でない場合，一般に $K_s(x,y)$ が (6) 式の様に簡単な形では表わせない．そして，「$\mathrm{Trace}\int_M K_s(x,x)\,dx$ が $Sp(A)$ のみに依存して決まる量である.」かどうか，わからない（と思う）．

【b′】A が常微分作用素の場合，A^* に対する固有値，固有函数を $\{\overline{\lambda}_i, \phi_i^*\}_{i=0}^{\infty}$ とする．$((\phi_i, \phi_i^*) = 1$ となる様に取る.$)$

もし，$A - \lambda I$ の Green函数 $G(x,\xi,\lambda)$ が λ の函数として1位の極のみを持てば，固有函数展開

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (f, \phi_i^*) \cdot \phi_i(x)$$

が成立する (e.g. [4])．従って，【a】の場合と同様に，

$$(6') \qquad K_s(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^s \, \phi_i(x) \otimes \overline{\phi_i^*(y)}$$

が成り立つ．故に，この場合にも，関係式(7)が成立する．

注意1．Aが自己共役のとき，Green函数 $G(x,\xi,\lambda)$ の極はすべて1位である．

注意2．Aが自己共役のとき，$a_m(x,\xi)$ が非負定値ならば，

$$\exp(-tA) = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma e^{-\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda$$

を考えると，その核函数 $H(t,x,y)$ は $t>0$ で C^∞ 函数となり，$H(t,x,x)$ は $t\to+0$ において，漸近展開(Minakshisundaram－展開)

$$(8) \qquad H(t,x,x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} B_{-m-j}(x)\, t^{(j-n)/m}$$

が成り立つ．又，Sp(A)とは

$$\eta(t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \mathrm{Trace}\int_M H(t,x,x)\,dx$$

なる関係がある．この様に，漸近展開(8)の係数 $B_{-m-j}(x)$ に対して，$\mathrm{Trace}\int_M B_{-m-j}(x)\,dx$ $(j=0,1,2,\cdots)$ はスペクトル不変量である．ところで，$K_s(x,y)$ と $H(t,x,y)$ は

$$\Gamma(s)\cdot K_{-s}(x,y) = \int_0^\infty t^{s-1}\cdot H(t,x,y)\,dt, \quad (\Gamma(s)\text{はガンマ函数})$$

という関係があることがわかり，従って，$B_{-m-j}(x)$ も，A^s に対する議論と同様に，Aのシンボルから計算できる．

§3. 非線形発展方程式の保存則

3-1. K-dV 方程式

K-dV 方程式

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

および，高次 K-dV 方程式は Hill 作用素

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

の等スペクトル変形の方程式である．A に対して $A^* = A$ で，§1 の条件◎が成り立つことは容易にわかる．（ほとんどすべて (generic) の $u(x)$ に対して $0 \notin Sp(A)$ である．）

(9) $\qquad \sigma(A)(x,\xi) = \xi^2 + u(x)$

であるから，(4) 式より，$b_{-2}, b_{-3}, \cdots$ を求めることができる；

$$b_{-2} = (\xi^2-\lambda)^{-1}, \qquad b_{-3} = 0, \qquad b_{-4} = -(\xi^2-\lambda)^{-2}u$$

$$b_{-5} = -2i(\xi^2-\lambda)^{-3}\xi u_x$$

$$b_{-6} = 4(\xi^2-\lambda)^{-4}\xi^2 u_{xx} - (\xi^2-\lambda)^{-3}(u_{xx} - u^2)$$

$$b_{-7} = 8i(\xi^2-\lambda)^{-5}\xi^3 u_{xxx} + i(\xi^2-\lambda)^{-4}\xi(6uu_x - 4u_{xxx})$$

$$b_{-8} = -16(\xi^2-\lambda)^{-6}\xi^4 u_{xxxx} + 4(\xi^2-\lambda)^{-5}\xi^2(3u_{xxxx} - 4uu_{xx} - 3u_x^2)$$
$$\qquad - (\xi^2-\lambda)^{-4}(u_{xxxx} - 3uu_{xx} + u^3 - 2u_x^2)$$

$$\vdots$$

これより，(5) 式によって，$s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots$ における留数を計算して，保存量 $I_1 = \int u\,dx$，$I_2 = \int u^2 dx$，$I_3 = \int (u^3 + \frac{1}{2}u_x^2)\,dx, \cdots$ が得られる．

注意. ここでの議論は $M=S^1$ としている. すなわち, 周期的境界条件の下での非線形発展方程式を考察している.

3-2. AKNS 方程式

自明な2次元ベクトル束上の線形作用素

$$A=\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial x} & -iq(x,t) \\ ir(x,t) & -i\frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}$$

に対する等スペクトル変形の方程式として, K-dV方程式, 変形K-dV方程式, sine-Gordon 方程式, および非線形Schrödinger方程式が得られる(Ablowitz, et al [5]). これらをまとめて, AKNS方程式と呼ぼう. すなわち,

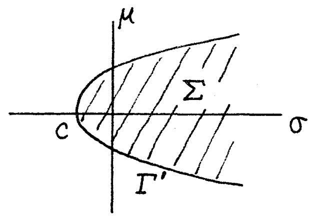
$$\begin{cases} r=1,\ q=u \text{ とおくと}, & u_t=6uu_x-u_{xxx} \quad (\text{K-dV}) \\ r=q=v \quad \text{〃}, & v_t=6v^2v_x-v_{xxx} \quad (\text{変形K-dV}) \\ r=-q=\frac{1}{2}\phi_x \quad \text{〃}, & \phi_{xt}=\sin\phi \quad (\text{sine-Gordon}) \\ r=-\sqrt{\frac{Q}{2}}\,\bar{u},\ q=\sqrt{\frac{Q}{2}}\,u,\ (Q>2) \quad \text{〃}, & iu_t=-u_{xx}-Q|u|^2u \quad (\text{非線形Schrödinger}). \end{cases}$$

§1, §2の議論を適用する為に,

$$A^2=\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} qr & q_x \\ r_x & qr\end{pmatrix}\equiv -I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U$$

を考えよう. すると, $Sp(A^2)=\{\lambda^2\in\mathbb{C};\ \lambda\in Sp(A)\}$ であるから, スペクトル不変量に関して, $\mathcal{I}_{A^2}\subset\mathcal{I}_A$ が成り立つ. A^2は2階(楕円型)作用素で, §1 の条件 が成り立つ. 特

に，$Sp(A^2)$ は λ 平面のある適当な放物線 Γ': $a(\sigma-c)+\mu^2=0$ $(a<0,\ \lambda=\sigma+i\mu)$ の内部 Σ にある (e.g.[6]).



また，A^2 は自己共役でないが，ほとんどすべて (generic) の U に対して，$0\notin Sp(A)$ で，かつ，Green 函数は1位の極のみをもつこともわかる．さて，

(10) $\sigma(A^2)(x,\xi) = \xi^2 I + U$

であるから，(4)によって，$b_{-2}, b_{-3}, \cdots$ を求めると，Hill 作用素に対して求めた $\{b_i\}$ について，$u\to U$ なる置き換えを行ったものに等しいことが容易にわかる．((9)と(10)を比べてみればよい．)この様に，留数を計算し，スペクトル不変量を求める過程は Hill 作用素と全く等しくなる．故に，

定理. $I_k = \int P_k(u, u_x, u_{xx}, \cdots)\,dx$ $(k=1,2,\cdots)$ が K-dV 方程式の保存量であれば，$\tilde{I}_k = \mathrm{Trace}\int P_k(U, U_x, U_{xx}, \cdots)\,dx$ は AKNS 方程式の保存量である．

U はそれぞれ，

(K-dV)	(変形K-dV)	(sine-Gordon)	(非線形Schrödinger)
$\begin{bmatrix} u & u_x \\ 0 & u \end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix} v^2 & v_x \\ v_x & v^2 \end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\phi_x^2 & -\frac{1}{2}\phi_{xx} \\ \frac{1}{2}\phi_{xx} & -\frac{1}{4}\phi_x^2 \end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix} -\frac{Q}{2}\lvert u\rvert^2 & \sqrt{\frac{Q}{2}}\,u_x \\ -\sqrt{\frac{Q}{2}}\,\bar{u}_x & -\frac{Q}{2}\lvert u\rvert^2 \end{bmatrix}$.

注意1. $U, U_x, U_{xx}, \cdots$ は互いに可換ではないが，トレースは積の順序に依らない．

注意2. 定理で述べた保存量 $\tilde{I}_k$ 以外にも，保存量は存在

する（特に，非線形Schrödinger方程式に対して）．それは，AのかわりにA^2を考えたことによる．

3-3．他の例

薩摩とKaup[7]によれば，（Lax型でない）5次K-dV方程式

(11) $$u_t + 180u^2u_x + 30(uu_{xxx} + u_xu_{xx}) + u_{xxxxx} = 0$$

は，逆散乱形式，

$$\begin{cases} \psi_{xxx} + 6u\psi_x = \lambda\psi \\ \psi_t = 9\psi_{xxxxx} + 90u\psi_{xxx} + 90u_x\psi_{xx} + 60(3u^2 + u_{xx})\psi_x \end{cases}$$

に書くことができる．

線形作用素

$$A = \frac{d^3}{dx^3} + 6u\frac{d}{dx}$$

を考察しよう．偶数階作用素

$$-A^2 = -\frac{d^6}{dx^6} - 12u\frac{d^4}{dx^4} - 18u_x\frac{d^3}{dx^3} - (18u_{xx} + 36u^2)\frac{d^2}{dx^2} - (6u_{xxx} + 36uu_x)\frac{d}{dx}$$

を考える．さらに，適当な定数cをとり，$0 \notin Sp(-A^2+c)$となる様にする．作用素$-A^2+c$に対して，§§1, 2の計算を行なってみよう．すると（かなり複雑な計算になる），

$$b_{-6} = (\xi^6 - \lambda)^{-1}, \quad b_{-7} = 0,$$

$$b_{-8} = 12u\xi^4(\xi^6 - \lambda)^{-2},$$

$$b_{-9} = -18iu_x\xi^3(\xi^6 - \lambda)^{-2} + 72iu_x\xi^9(\xi^6 - \lambda)^{-3}$$

$$b_{-10} = -18(u_{xx} + 2u^2)\xi^2(\xi^6 - \lambda)^{-2} + 144(2u_{xx} + u^2)\xi^8(\xi^6 - \lambda)^{-3}$$

$$-432\, u_{xx}\, \xi^{14}(\xi^6-\lambda)^{-4},$$

$$b_{-11}=\{(u^2)_x,\ u_{xxx},\ \xi^i,\ (\xi^6-\lambda)^{-i}\ \text{の多項式}\},$$

$$b_{-12}=\{u^3,\ u_x^2,\ (u^2)_{xx},\ u_{xxxx},\ \xi^i,\ (\xi^6-\lambda)^{-i}\ \text{の多項式}\},$$

$$\vdots$$

そして，(5)式の値を計算し，自明でない保存量として，

b_{-8} から $\displaystyle\int u\,dx$

b_{-12} から $\displaystyle\int\left(u^3-\frac{1}{2}u_x^2\right)dx$

が得られる．これらは，[7]で求められている保存量に一致する．

この手続きを続けて，方程式(11)の保存量が次々に得られることが期待される．(ただし，これ以降の保存量が[7]で得られているものに一致するかどうか確かめていない．)

注意．ここでは，$-A^2+C$ のスペクトルについて検討せず，形式的に(4),(5)式の値を計算した．この場合も，(11)の保存量がうまく求まる様である．講演の時，3階の作用素 A について計算し，求められた保存量が[7]のものと一致しない由を述べたが，後に，それが計算間違いであったことがわかった．おわびし，訂正する．実際，3階の作用素について(5)式の値は常に0になってしまう．

REFERENCES

[1] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. 21(1968), 467-490.

[2] R. T. Seeley, Complex powers of an elliptic operator, Proc. Symposium in Pure Math. Vol.10, Amer. Math. Soc. (1967), 288-307.

[3] L. Nirenberg, Pseudo-differential operators, Proc. Symposium in Pure Math. Vol.16, Amer. Math. Soc. (1970), 149-167.

[4] M. A. Neumark, Linear Differential Operators, I. Frederic Ungar Publ. Co., New York, 1968.

[5] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segar, Nonlinear-evolution equations of physical significance, Phys. Rev. Letters 31(1973), 125-127.

[6] 溝畑 茂, 偏微分方程式論, 岩波, 1965.

[7] J. Satsuma and D. J. Kaup, A Bäcklund transformation for a higher order Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan 43(1977), 692-697.