

多重ソリトン解の直接的構成法と、時空二次元の古奥場のモデルの場の方程式の準周期解の構成について

阪大 理 伊達悦朗

このノートでは、散乱の逆問題の方法 (Inverse Scattering Method) で解ける非線型方程式の多重ソリトン解を求めよへの直接的な方法と、時空二次元の古奥場のモデルの場の方程式の準周期解の構成について述べる。

初めに、この二つの話題の背景について述べる。

散乱の逆問題の方法で解ける非線型方程式の二つの典型的なクラスは、いわゆる Zakharov-Shabat 方程式 [18], つまり、二つの線型微分作用素 $L = \sum_{j=0}^m u_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}$, $M = \sum_{j=0}^n v_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}$ u_j, v_k : 2×2 行列 を用いて、

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M \right] = 0$$

の形に表わされた u_j, v_k に関する非線型方程式である。例として、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式, Boussinesq 方程式, 二次元 KdV (Kadomtsev-Petviashvili) 方程式等がこのクラスに含まれる。

Krichever [6,7,8] は、Riemann 面の理論を用いて Zakharov-Shabat 方程式の準周期解を構成した。その方法の概略は次のとおりである。まず、Riemann 面上の与えられた l 個 (行列の size に対応) の点で与えられた l 形 q essential singularity (作用素 L, M の order に対応) を持つ関数 θ を abel 積分の理論を用いて構成する。次に、その関数 θ が満たす二つの線型微分方程式

を決定する。これにより

Zakharov-Shabat 方程式の準周期解が得られ、同時にその解の θ 関数による表示が得られる。

一方、Novikov [14] による KdV 方程式の周期解に関する結果から、多重ソリトン解は、(準)周期解の、対応する Riemann 面の退化に伴う、極限と考えられ、実際に KdV 方程式の場合には、そのような計算も行われている。従って、特異点 (二重点) を持つ有理曲線上で、Krichever の方法による構成を行えば、多重ソリトン解の簡単な直接的構成が得られると期待される。その方向での結果としては、Krichever [8] による、定常版の Zakharov-Shabat 方程式の場合の “準周期解を背景とした多重ソリトン解” ($|x| \rightarrow \infty$ のとき準周期解と見ようとする) の代数幾何学的な構成、B. W. Manin [12] による、二重点を持つ有理曲線上の異なる種 g の vector

bundle (そのおけるべき性質は、Krichever の構成を代数的幾何学的に公理化したもので、その方向での最初の研究が Drinfeld [3] に依り存在したことから、Manin は Krichever-Drinfeld bimodule と呼んでいる) の構成がある。

Manin の構成は、Zakharov-Shabat 方程式の多重ソリトン解の構成に対応するものではあるが、そこで構成されているものが、既に散乱の問題の方法で構成されている多重ソリトン解と同一のものであることを示すには、その構成をより具体化する必要がある。この具体化がこの一トの目的の一つである。

Krichever-Manin の構成をより具体的に作る一つの方法は、一応は散乱の問題の枠組に、 λ をはいるもの、(つまり、その群作用素の commutativity として書かれていますもの、その係数にパラメータ λ の有理関数が含まれている) 散乱理論を構成することと複雑ななっている方程式の多重ソリトン解を求めた簡単な方法への足がかりとしてである。これらの方程式としては、例えば、Pohlmeyer, Lund-Regge のモデルの方程式、massive Thirring model の方程式等がある。

この一トの前半では、Zakharov-Shabat 方程式の多重ソリトン解を Krichever の方法に対応する形で初等的に構成し、

更に、Zakharov-Shabat 方程式の種組には λ の存在を考慮せよ。sine-Gordon 方程式は u の多重ソリトン解を持つ非線形偏微分方程式の典型である戸田格子の方程式に対しとも同様の方法で多重ソリトン解を構成する。そして得られた解が、散乱の逆問題の方法で得られている解と同一であることを示す。

続いて、後半を対象とする方程式は、 $A(z, \lambda)$, $B(z, \lambda) \in N \times N$ 行列とするとき、

$$\left[i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{A}{\lambda+1}, i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B}{\lambda-1} \right] = 0$$

の形に表わされるクラスがある。このクラスは、Zakharov-Mikhailov [17] に由来し、提議された $A, B \in \mathcal{O}(2, \mathbb{C})$ 又は $\mathcal{O}(2, \mathbb{R})$ と制限を課すことに由来し、Pohlmeyer-Lund-Regge のモデルの方程式、又は sine-Gordon 方程式が得られた。

Zakharov と Mikhailov は N -ソリトン解が与えられた時に、 $(N+1)$ -ソリトン解を構成する方法を与えている。

ここでは、 A, B に制限を課さない場合の、上の方程式の準周期解を構成する。構成は Krichever [7,8] の方法と類似の方法でできる。 A, B に制限を課した場合にも、ここで述べた方法を用いる。更に精密化する必要があるようである。

I. 多重ソリトン解の直接的構成法

1. 同時解の構成

Zakharov-Shabat 方程式, sine-Gordon 方程式, 戸田格子の方程式のいずれも, \Rightarrow の線型作用素が可換という形で表わされる.

i) Zakharov-Shabat 方程式 [18] (簡単のためスカラー作用素の場合を扱う, $l=1$).

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M \right] = 0$$

$$L = \sum_{j=0}^m u_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad M = \sum_{j=0}^n v_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad u_m, u_{m-1}, v_n, v_{n-1}: \text{定数}$$

ii) sine-Gordon 方程式 [1], [6]

$$u_{xx} + \sin u = 0$$

\Rightarrow の方程式は次の \Rightarrow の線型微分方程式の compatibility condition である.

$$L\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{i\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Phi - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} u_x & 0 \\ 0 & -u_x \end{bmatrix} \Phi = 0$$

$$M\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{i}{2\lambda} \begin{bmatrix} 0 & \exp(iu) \\ \exp(-iu) & 0 \end{bmatrix} \Phi = 0$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

iii) 戸田格子の方程式 [4], [11]

$$\frac{\partial Q_n}{\partial t} = P_n, \quad \frac{\partial P_n}{\partial t} = \exp(Q_{n+1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n-1}) \quad n \in \mathbb{Z}$$

ある a, b

$$a_n = \frac{1}{4} \exp\{(Q_{n+1} - Q_n)/4\}, \quad b_n = -\frac{1}{2} P_{n-1}$$

と仮定してよい。

$$\partial a_n / \partial t = 2a_n(b_{n+1} - b_n), \quad \partial b_n / \partial t = 2a_n(a_n - a_{n-1}).$$

この方程式は、次の二つの非線形微分方程式の compatibility condition である。

$$L\Phi = (\lambda + \lambda^{-1})\Phi, \quad M\Phi = \partial\Phi/\partial t \quad \Phi = \{\Phi(n)\}$$

$$(L\Phi)(n) = \Phi(n+1) + b_n\Phi(n) + a_{n-1}\Phi(n-1)$$

$$(M\Phi)(n) = \Phi(n+1) + b_n\Phi(n) - a_{n-1}\Phi(n-1).$$

これら二つの線形方程式の同時解となるべき関数係数係数は、 $x - y - \lambda$ の関数として、 N の簡単な特徴付けにより構成される。

N は任意の自然数、 $x_1, \dots, x_N, \beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{C}$ は互いに相異なる複素数、 c_1, \dots, c_N は任意の複素数とする。それぞれこの方程式に対応する。次の形の関数を考える。

$$(a.1) \quad \Phi(x, y, t, \lambda) = (\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j(x, y, t) \lambda^j) \exp(\lambda x + P(\lambda)y + Q(\lambda)t)$$

ここで $\lambda \neq 0$ ならば $x - y -$ 、 $P(\lambda) = \sum_{j=0}^m p_j \lambda^j$ 、 $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^n q_j \lambda^j$ は任意の定数係数の多項式。

$$(a.2) \quad \Phi_m(x, y, \lambda) = (\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{mj}(x, y) \lambda^j) \exp(\lambda x + \lambda^{-1}y) \quad m=1, 2$$

$$(a.3) \quad \Phi_n(t, \lambda) = \lambda^n (\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{nj}(t) \lambda^j) \exp\{t(\lambda - \lambda^{-1})\} \quad n \in \mathbb{Z}$$

この形の関数に於いて、次の条件を課す。この条件は、

Zakharov-Shabat 方程式の場合、二重点を有する有理曲線上での

構成に対応している。

$$(b.1) \quad \Phi(x, y, t, \alpha_j) = C_j \Phi(x, y, t, \beta_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

$$(b.2) \quad \Phi_m(\xi, \eta, \alpha_j) = (-1)^{m-1} C_j \Phi_m(\xi, \eta, \beta_j) \quad \beta_j = -\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N, \quad m=1, 2$$

$$(b.3) \quad \Phi_m(t, \alpha_j) = C_j \Phi_m(t, \beta_j) \quad \beta_j = \alpha_j^{-1}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1. 条件 (b.1) (resp. (b.2), (b.3)) に与えられた関数 $\Phi(x, y, t, \lambda)$ (resp. $\Phi_m(\xi, \eta, \lambda)$, $\Phi_m(t, \lambda)$) は一意的に決定される。

証明. 以下 n 個の場合と同様である。Zakharov-Shabat 方程式 n 個の場合について示す。

条件 (b.1) は未知数 $\phi_j(x, y, t)$ $0 \leq j \leq N-1$ に対して n 次 n 連立一次方程式と同値である。

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_j^k e(\alpha_j) - C_j \beta_j^k e(\beta_j)) \phi_k = -\alpha_j^N e(\alpha_j) + C_j \beta_j^N e(\beta_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

$$e(\lambda) = \exp(\lambda x + P(\lambda)y + Q(\lambda)t)$$

この連立一次方程式の係数行列は、 (x, t) の関数

$$f_j(x) = \exp(\alpha_j x + P(\alpha_j)y + Q(\alpha_j)t) - C_j \exp(\beta_j x + P(\beta_j)y + Q(\beta_j)t)$$

の wronski 行列である。関数 f_j は一次独立である。 x の解析関数であるから、この行列式、つまり、関数 f_j の wronskian は恒等的に非零と仮定する。従って ϕ_j が一意に決定され、 $\Phi(x, y, t, \lambda)$ も一意に定まる。 証明終。

Proposition 2. i) 関数 $\Phi(x, y, t, \lambda)$ は次の方程式を満たす

$$\sum_{j=0}^m u_j(x, y, t) \partial^j \Phi / \partial x^j = \partial \Phi / \partial y$$

$$\sum_{j=0}^n v_j(x, y, t) \partial^j \Phi / \partial x^j = \partial \Phi / \partial t$$

ここで、係数 u_j, v_j は ϕ_j, p_j, q_j によって一意に定まる。

ii) 関数 $\Phi(z, \eta, \lambda) = {}^t(\Phi_1(z, \eta, \lambda), \Phi_2(z, \eta, \lambda))$ は $u = -i \log(\phi_{1,0}/\phi_{2,0})$

を係数に持つ η の作用素 L, M の同時解である。

iii) $\Phi(t, \lambda) = \{\Phi_n(t, \lambda)\}$ は $a_n = \phi_{n+1,0}/\phi_{n,0}, b_n = \phi_{n,N-1} - \phi_{n+1,N-1}$

を係数に持つ λ の作用素 L, M に対して

$$L\Phi = (\lambda + \lambda^{-1})\Phi, \quad M\Phi = \partial \Phi / \partial t$$

を満たす。

証明. Zakharov-Shabat 方程式に Φ を代入する。 $u_j(x, y, t)$ を

$$\sum_{j=0}^m u_j \sum_{k=0}^j c_k \partial^{j-k} \phi_{N-k,t} / \partial x^{j-k} = \sum_{j=0}^m \phi_{N-j,t} p_j, \quad k=0, \dots, m$$

と建立した方程式が成り立つ。これは連立一次方程式の係数行列が対角成分が 1 の三角行列であるから、 u_j は一意に決定される。

$$F(x, y, t, \lambda) = \sum_{j=0}^m u_j \partial^j \Phi / \partial x^j - \partial \Phi / \partial y$$

とすれば、 F は

$$F(x, y, t, \lambda) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j(x, y, t) \lambda^j \right) \exp(\lambda x + P(\lambda)y + Q(\lambda)t)$$

の形があることがわかる。更に F は

$$F(x, y, t, \alpha_j) = c_j F(x, y, t, \beta_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

存在関係式をみたしていることより, Prop. 1 の証明と同様にして, 今度は $f_j = 0$ より $F \equiv 0$ が得られる。

従って, Σ 上の α に対して定義した u_j に対して

$$\sum_{j=0}^m u_j \partial^j \Phi / \partial x^j = \partial \Phi / \partial x$$

をみたす。もう一方の方程式についても同様。証明終

注意. $P(\alpha_j) = P(\beta_j)$ $1 \leq j \leq N$ 存在関係式が成立している場合, (*) より Φ_j は Σ に依存するということになる。従って $\Sigma = \alpha$ とし

u_j, v_j も Σ に依存する

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m u_j(x,t) \partial^j \tilde{\Phi} / \partial x^j &= P(\lambda) \tilde{\Phi} & \tilde{\Phi}(x,t,\lambda) &= \Phi(x,t,\lambda) e^{-\lambda P(\lambda)} \\ \sum_{j=0}^n v_j(x,t) \partial^j \tilde{\Phi} / \partial x^j &= \partial \tilde{\Phi} / \partial t \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上のことから, (λ はパラメータとして Σ に含まれている) \Rightarrow の非線形方程式の compatibility condition として

定理. 上の構成した $u_j(x,y,t), v_j(x,y,t), a_n(t), b_n(t)$ は与えられる。Zakharov-Shabat 方程式, sine-Gordon 方程式, 戸田格子の方程式の解である。

2. 解の表示

二次の KdV 方程式を例にとり、上で得た解が、別の方法の問題の方法で得られるという多重リットル解と同一であることを示す。

この場合、 $P(\lambda) = \lambda^2$, $Q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda$ $a \in \mathbb{C}$ と仮定して計算すれば、

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, y, t), \quad M = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{3}{2}u(x, y, t) + a\right)\frac{\partial}{\partial x} + v(x, y, t)$$

$$u = -2\partial\phi_{N-1}/\partial x, \quad v = -\partial^2\phi_{N-1}/\partial x^2 + 3\phi_{N-1}\partial\phi_{N-1}/\partial x - 3\partial\phi_{N-2}/\partial x$$

となり、非線形方程式は

$$3(u_y + u_{xx}) = 4vx$$

$$v_y - u_t = v_{xxx} - u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x - au_x$$

あるいは v を消去して

$$3u_{yy} - 4u_{xt} + u_{xxxx} + 6(uu_x)_x + 4au_{xx} = 0$$

となる。この方程式は二次の KdV 方程式である。

準一次方程式 (*) を解くことにする

$$\phi_{N-1} = -\frac{\det(f, f', \dots, f^{(N-2)}, f^{(N)})}{\det(f, f', \dots, f^{(N-1)})} = -\frac{\partial}{\partial x} \log \det(f, f', \dots, f^{(N-1)})$$

$$f = {}^t(f_1, \dots, f_N)$$

である。従って、

$$u = 2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \log \det(f, f', \dots, f^{(N-1)})$$

は二次の KdV 方程式の解である。この表示式は Wronskian

の対数微分という形である。一方、微分の逆問題の方法で得られる解は、Gram 行列式の対数微分という形で表わされている。以下でその変形をみる。

まず

$$\det(f, f', \dots, f^{(n-1)}) = \exp\left\{\sum_{k=1}^n (\alpha_k x + P(\alpha_k) y + Q(\alpha_k) t)\right\} \times \\ \times \det\left[\alpha_i^{k-1} - c_i \beta_i^{k-1} \exp\left\{(\beta_i - \alpha_i)x + (P(\beta_i) - P(\alpha_i))y + (Q(\beta_i) - Q(\alpha_i))t\right\}\right]$$

と変形する。ここで、行列 (α_i^{k-1}) の逆行列を δ_{ij} とし

$$= \exp\left\{ \dots \det(\alpha_i^{k-1}) \det\left((\alpha_i^{k-1})^{-1} (\alpha_i^{k-1} - c_i \beta_i^{k-1} \exp(\dots))\right) \right\} \\ = \exp\left\{ \dots \prod_{a>b} (\alpha_a - \alpha_b) \det\left(\delta_{ij} - c_i \frac{\prod_{k \neq i} (\beta_k - \alpha_k)}{\prod_{k \neq i} (\alpha_k - \alpha_k)} \exp(\dots)\right) \right\}$$

とすると、 $g(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \alpha_j)$ $g' = dg/d\lambda$ とすれば

$$= \exp\left\{ \dots \prod_{a>b} (\alpha_a - \alpha_b) \det\left(\delta_{ij} - \frac{c_i}{\beta_i - \alpha_i} \frac{g'(\beta_i)}{g'(\alpha_i)} \exp(\dots)\right) \right\}$$

とすると、対数を取ると、 $u = \log \det$ の形になる。

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \det\left(\delta_{ij} - \frac{c_i}{\beta_i - \alpha_i} \frac{g'(\beta_i)}{g'(\alpha_i)} \exp\left\{(\beta_i - \alpha_i)x + (\beta_i^2 - \alpha_i^2)y + (\beta_i^3 - \alpha_i^3)t + a(\beta_i - \alpha_i)t\right\}\right)$$

と表す。この式は Gram 行列式の形に直すと容易である。

II. 時空二次元の古典場のモデルの場の方程式の非同期解の構成.

1. Zakharov - Mikhailov の定式化

Zakharov - Mikhailov [17] は、時空二次元の古典場のモデルの場の方程式のクラスとして、次の形のものを提唱した。

$U(x, z, \lambda), V(x, z, \lambda) \in N \times N$ 行列で、その成分は、複素パラメータ λ の関数として有理関数で、その極は (3.2) に依るといえる。その時

$$[i\partial/\partial z - U, i\partial/\partial z - V] = 0 \quad (1)$$

の形に表わした方程式系を考える。このクラスには、既に知られていた時空二次元の古典場のモデルの方程式はすべて含まれる。(その例について後で触れる。)

この方程式系には次の不定性がある。 $U, V \in$ 方程式系 (1) の解とし、 $\Psi \in$ 線型方程式

$$i\partial\Psi/\partial z = U\Psi, \quad i\partial\Psi/\partial z = V\Psi$$

(= 元の線型方程式の compatibility condition が方程式系 (1) である。) の同時解とする。 $f(x, z) \in$ 任意の non-singular な行列とし、

$$\tilde{U} = fUf^{-1} + if_z f^{-1}, \quad \tilde{V} = fVf^{-1} + if_z f^{-1} \quad (2)$$

$$\tilde{\Psi} = f\Psi$$

とすれば、 \tilde{U}, \tilde{V} の極は U, V の極と一致し、更に $\tilde{\Psi}$ は線型

方程式

$$i\partial\tilde{\Psi}/\partial\bar{z} = \tilde{U}\tilde{\Psi}, \quad i\partial\tilde{\Psi}/\partial z = \tilde{V}\tilde{\Psi}$$

$\tilde{\Psi}$ がある。つまり \tilde{U}, \tilde{V} も方程式系 (1) の解である。従って、方程式系 (1) の解には、任意関数 α の不定性が残る。そこで、 $f \in$ 指定する α と $\tilde{\Psi}$ gauge $\tilde{\Psi}$ 指定する α といい、 f の種々の選び方に応じて得られる方程式系 $\tilde{\Psi}$ 互いに gauge equivalent であるといい、変換 (2) $\tilde{\Psi}$ gauge 変換と呼ぶ。

上の方程式系 (1) の例として、 U が $\lambda = -1$ に唯一つの α -位の極を持つ、 V が $\lambda = 1$ に唯一つの α -位の極を持つ場合を考える。

$$\therefore U = U_0 + \frac{U_1}{\lambda+1}, \quad V = V_0 + \frac{V_1}{\lambda-1}$$

$\lambda = \alpha$ の時、方程式系 (1) は

$$U_{02} - V_{03} - i[U_0, V_0] = 0 \tag{3}$$

$$U_{12} - i[U_1, V_0 - \frac{1}{2}V_1] = 0$$

$$V_{13} - i[V_1, U_0 + \frac{1}{2}U_1] = 0$$

と存在。 $f \in$

$$U_0 = -if^{-1}f_3, \quad V_0 = -if^{-1}f_2$$

存在するように選ぶ。(方程式 (3) が $\alpha = 0$ の線型方程式の

compatibility condition である)。この時、 f に f^{-1} の gauge 変換を行なえば、線型方程式

$$i\partial\Psi/\partial\bar{z} = \frac{A}{\lambda+1}\Psi, \quad i\partial\Psi/\partial z = -\frac{B}{\lambda-1}\Psi$$

$$A = fU_1f^{-1}, \quad B = -fV_1f^{-1}$$

と compatibility condition の非線型方程式

$$A_2 = \frac{i}{2} [A, B], \quad B_2 = -\frac{i}{2} [A, B] \quad (4)$$

が得られる。

方程式 (4) より、 A の Jordan 標準形 A_0 は z に依らず、 B の Jordan 標準形 B_0 は z に依らないことがわかる。行列 A を標準化する行列 g とすると、 $A_0 = A_0(z) = g A g^{-1}$

g は z の gauge 多様体 Σ 上の任意の非線型方程式

$$i \Psi_3 + C \Psi + \frac{z}{2} A_0 \Psi = 0 \quad C = -\frac{1}{2} A_0 - i g_3 g^{-1}$$

$$i \Psi_2 + S \Psi + \frac{1}{2z} \Gamma \Psi = 0 \quad S = -i g_2 g^{-1} - \frac{1}{2} g B g^{-1}, \quad \Gamma = g B g^{-1}$$

$$z = (\lambda - 1)/(\lambda + 1)$$

と compatibility condition の非線型方程式

$$-C_2 + S_2 - i [C, S] - \frac{i}{4} [A_0, \Gamma] = 0 \quad (5)$$

$$A_{02} + \frac{i}{2} [A_0, S] = 0 \quad (6)$$

$$\Gamma_2 + i [\Gamma, C] = 0$$

が得られる。

ここで、更に A_0 が対角行列で、対角成分が互いに相異なることがあれば、方程式 (6) より、 S も対角行列であることがわかる。この時 $C = C_{\perp} + C_{\parallel}$ C_{\parallel} : 対角行列 と表わし、方程式 (5) の対角成分を考えると

$$C_{\parallel 2} = S_2$$

とあることがわかる。従って

$$C_{11} = R_3, \quad S = R_2$$

存在する。右側行列 R が存在する。

e^{-iR} による gauge 変換を行えば、非線型方程式は

$$i\Phi_3 + Q_1\Phi + \frac{\sigma}{2}A_0\Phi = 0 \quad Q_1 = e^{-iR}C_1e^{iR}$$

$$i\Phi_2 + \frac{1}{2\sigma}Q_2\Phi = 0 \quad Q_2 = e^{-iR}C_2e^{iR}$$

となる。compatibility condition の非線型方程式は

$$Q_{12} = \frac{i}{4}[Q_2, A_0], \quad Q_{23} = i[Q_1, Q_2] \quad (7)$$

となる。この方程式系は Budagon-Takhtadzhian [2] が考察している。

この 1-1 対応を準周期解を考えたものは、方程式系 (4) 及び方程式系 (7) である。これは互いに gauge equivalent である。gauge equivalence が解の構成にどのように反映するかについて、次節で触れる。

2. 準周期解の構成

初めに、方程式系 (7) の準周期解の構成を考えた。

次の data $\{S, \lambda, \delta, a_j(z), b_j(z) \mid 1 \leq j \leq N\}$ が与えられたとする。ここで

S : 種数 $g > 0$ の compact Riemann 面

λ : S 上の order N の有理型関数 λ 。その極 P_1, \dots, P_N は互いに相異なる。零点 Q_1, \dots, Q_N は互いに相異なる。

$\delta = D_1 + \dots + D_{g+N-1}$: S 上 n 因子で、各 $j = 1, \dots, N$ に対し

$$z \dim \mathcal{O}(\delta - P_1 - \dots - P_j - \dots - P_N) = 1 \text{ 因子 } \in \mathfrak{a}.$$

$a_j(z), b_j(\tau)$: 適当な補うべき関数.

である.

この data $\{S, \lambda, \delta, a_j(z), b_j(\tau)\}$ からは、方程式系 (7) の準周期解を構成できることを示す.

点 P_j : a local parameter z に対して $(\lambda(P))^{-1}$, 点 Q_j : a local parameter z に対して $\lambda(P)$ を固定してかく.

次の性質を持つ、 n 関数 $\Psi_j(z, \tau, P)$ ($1 \leq j \leq N$, $(z, \tau) \in \mathbb{R}^g$, $P \in \mathcal{P}$) を構成するに考えよう.

i) Ψ_j は $S - \{P_1, \dots, P_N, Q_1, \dots, Q_N\}$ での一価有理型で、その極因子は δ に等しい.

ii) Ψ_j は P_j の近傍で

$$\Psi_j(z, \tau, P) = (\delta_{j\epsilon} + O(\lambda^{-1})) \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \int^3 a_\epsilon(\tau) d\tau\right)$$

と展開され、 Q_j の近傍で

$$\Psi_j(z, \tau, P) = (O(1)) \exp\left(\frac{L}{2\lambda} \int^2 b_\epsilon(\tau) d\tau\right)$$

と展開される.

このように性質を持つ関数 $\Psi_j(z, \tau, P)$ が存在したとすれば、

$d \log \Psi_j$ は S 上の Abel 微分となる. その極の様子には、

D_ϵ ($1 \leq \epsilon \leq g+N-1$) の留数 -1 の一位の極

$$P_e (1 \leq e \leq N) z = -\frac{i}{2z^2} \left(\int^3 a_e(\sigma) d\sigma \right) dz + \delta_{je} \frac{dz}{z} \quad z = \lambda^{-1}$$

$$Q_e (1 \leq e \leq N) z = -\frac{i}{2\lambda^2} \left(\int^2 b_e(\tau) d\tau \right) d\lambda$$

の形の極を持つ。abel 積分の留数の和は零であるから、更に
 3個の点 $P_{j\pi}(\sigma, \tau)$ ($\pi=1, \dots, g$) が留数1の一位の極を持つ。

$P_{j\pi}(\sigma, \tau)$ が N 上の Jacobi の逆問題の解と仮定すると、次のように表わされる。

α_j, β_j ($1 \leq j \leq N$) は N 上の canonical homology basis

ω_j ($1 \leq j \leq N$) は正規化第一種微分の基底

$\omega(P, Q)$ は点 P, Q が互いに異なる留数 $1, -1$ の一位の極を持つ。正規化第一種微分。

$\omega_{P_i, 2}$ は P_i のみを持つ一位の極を持つ正規化第一種微分。
 $\omega_{Q_j, 2}$ は Q_j のみを持つ一位の極を持つ正規化第一種微分。

とすれば、

$$d \log \Phi_j = -i \sum_{e=1}^N \left\{ \left(\int^3 a_e(\sigma) d\sigma \right) \omega_{P_e, 2} + \left(\int^2 b_e(\tau) d\tau \right) \omega_{Q_e, 2} \right\} + \sum_{e=1}^g \omega(P_{je}(\sigma, \tau), D_e) + \sum_{e=1}^N \omega(P_e, D_{3+e}) + \sum_{e=1}^g c_e \omega_e \quad (8)$$

$e \neq j (D_{3+e} = D_{3+j})$

と表わされる。

Φ_j が N 上の一価であることは

$$\int_{\alpha_e} d \log \Phi_j = 2\pi i m_{je}, \quad \int_{\beta_e} d \log \Phi_j = 2\pi i n_{je}, \quad m_{je}, n_{je} \in \mathbb{Z}$$

である。この関係式を具体的に書くことはより、 $P_{j\pi}(\sigma, \tau)$ は N 上の Jacobi の逆問題の解であることがわかった。

$$\left(\sum_{k=1}^2 \int_{D_k} P_{j_k}(z, \tau) \omega_k \right) \equiv \left(i \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\int_{D_k} a_k(z) dz \right) U_{kz} + \left(\int_{D_k} b_k(z) d\tau \right) V_{kz} \right\} - \sum_{k=1}^N \int_{D_{j_k}} \omega_k \right) \pmod{\Gamma}$$

$$= z, \quad U_{kz} = 2\pi i \int_{P_k} \omega_{P_k, z}, \quad V_{kz} = 2\pi i \int_{P_k} \omega_{Q_k, z} \quad z \in \Gamma \text{ 上 } \omega_j$$

に關する周期行列 A 列ベクトル z 生成した C^1 a lattice である。

逆に、 ω a Jacobi a 逆問題に解いた $P_{j_m}(z, \tau)$ 一定の、(8) a 石田の abel 級 χ_j 一定義すれば、関数 $\exp\left(\int_{P_k} \chi_j\right)$ ($P_k \in S$) は定数倍を除いて、上に準じた Ψ_j a 性質をみたす。

次に Ψ_j a 満たす微分方程式を求めよう。

$$\Psi_j(z, \tau, P) = \left(\delta_{jz} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^{jz}(z, \tau) \lambda^{-k} \right) \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \int_{D_k} a_k(z) dz\right) \text{ around } P_k$$

$$\Psi_j(z, \tau, P) = \left(\sum_{k=0}^n \beta_k^{jz}(z, \tau) \lambda^k \right) \exp\left(\frac{i}{2\lambda} \int_{D_k} b_k(z) d\tau\right) \text{ around } Q_k$$

とす。 $\alpha_k^{jz}, \beta_k^{jz}$ は S 上 a theta 関数を用いて表示できる。

関数

$$F_j = \partial \Psi_j / \partial z - \frac{i\lambda}{2} a_j \Psi_j - \frac{i}{2} \sum_{n=1}^N (a_n - a_j) \alpha_j^{jn} \Psi_n$$

は、上に準じた、 Ψ_j a 性質をみたす。更に $P_k, 1 \leq k \leq N$ 上 a 零と存す。従って関数 F_j / Ψ_j は $P_{j_m}(z, \tau), 1 \leq m \leq g$ に極を持つ S 上 a 有理型関数 ω_j a 零と存す。従って恒等式 a 零とある。つまり、 $\Psi = \Psi(\Psi_1, \dots, \Psi_N)$ とおけば、 Ψ は微分方程式

$$\partial \Psi + \frac{1}{2} [\alpha, A_0] + \frac{\lambda}{2} A_0 \Psi = 0$$

$$\alpha = (\alpha_j^{jz}) \quad A_0 = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$$

をみたす。

同様に Ψ_2 は

$$i\Psi_2 + \frac{1}{2\lambda} \beta B_0 \beta^{-1} \Psi = 0 \quad \beta_0 = (\beta_0^{j\bar{k}}), \quad B_0 = \text{diag}(b_1, \dots, b_N)$$

をみたす。

よって、方程式系 (7) の解を構成できる。

方程式系 (4) を解くには、data $\{\delta, \lambda, \delta, a_j(z), b_j(z) \}$ がある。 λ に関する条件は、

$$\lambda^{-1}(-1) = \{P'_1, \dots, P'_N\}, \quad \lambda^{-1}(1) = \{Q'_1, \dots, Q'_N\}, \quad \lambda^{-1}(\infty) = \{P_1, \dots, P_N\}$$

が互いに互いに相異なるという条件に置き換える。 P'_j の

local parameter とし $\lambda+1 \cong Q'_j$ の local parameter とし $\lambda-1 \cong P_j$ とする。

Ψ_j の性質として

$$i) \quad \delta - \{P_1, \dots, P_N, Q_1, \dots, Q_N\} \in \delta - \{P'_1, \dots, P'_N, Q'_1, \dots, Q'_N\} \text{ である。}$$

ii) Σ .

▽ ii) Ψ_j は P'_j の近傍で

$$\Psi_j(z, \lambda, P) = (\text{regular part}) \times \exp\left(-\frac{i}{\lambda+1} \int^z a_0(\zeta) d\zeta\right)$$

と展開する。 Q'_j の近傍で

$$\Psi_j(z, \lambda, P) = (\text{regular part}) \exp\left(\frac{i}{\lambda-1} \int^z b_0(\zeta) d\zeta\right)$$

と展開する。更に $\Psi_j(P_j) = \delta_{ij} \Delta$ となる。

構成は同様にできる。 Ψ は次の線型方程式をみたす。

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\gamma_0 A_0 \gamma_0^{-1}}{\lambda+1} \Psi, \quad i \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = -\frac{\epsilon_0 B_0 \epsilon_0^{-1}}{\lambda-1} \Psi$$

$\equiv z, \gamma_0, \epsilon_0 \text{ 等}$

$$\Psi_j(z, \bar{z}, z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l^{j\bar{k}} (\lambda+1)^l \right) \exp\left(-\frac{i}{\lambda+1} \int^z a_\epsilon(\zeta) d\zeta\right) \quad \text{around } P_\epsilon$$

$$\Psi_j(z, \bar{z}, z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \epsilon_l^{j\bar{k}} (\lambda-1)^l \right) \exp\left(\frac{i}{\lambda-1} \int^z b_\epsilon(\zeta) d\zeta\right) \quad \text{around } Q_\epsilon$$

$\text{と } \bar{z} \geq z,$

$$\gamma_0 = (\gamma_0^{j\bar{k}}), \quad \epsilon_0 = (\epsilon_0^{j\bar{k}})$$

z 定めた。

$\therefore z$ 方程式系 (4) の解を構成する。

3. 例

a) Pohlmeyer [15] $\text{R} = \text{次元 } 0(4)$ nonlinear σ -model の方程式

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + (\partial_\mu \phi, \partial^\mu \phi) \phi = 0 \quad \phi = \phi(x^0, x^1) \in \mathcal{S}^3$$

の方程式系

$$\alpha_3 \beta_2 - \beta_3 \beta_2 \sin \frac{\alpha}{2} / 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha = 0 \quad z = \frac{1}{2}(x^0 + x^1) \quad (9)$$

$$\beta_3 z + (\alpha_3 \beta_2 + \alpha_2 \beta_3) / \sin \alpha = 0 \quad \bar{z} = \frac{1}{2}(x^0 - x^1)$$

同様 $z \leq \bar{z}$ と示し、方程式系 (9) の解型方程式

$$i \varphi_3 - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & (\alpha_3 - i \beta_3 \tan \frac{\alpha}{2}) e^{-i\omega} \\ -(\alpha_3 + i \beta_3 \tan \frac{\alpha}{2}) e^{i\omega} & 0 \end{bmatrix} \varphi + \frac{\kappa}{2} \varphi = 0$$

$$i\varphi_2 + \frac{1}{2z} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\rho \sin\alpha e^{-i\omega} \\ -\rho \sin\alpha e^{i\omega} & -\cos\alpha \end{bmatrix} \varphi = 0$$

$$\omega_3 = \beta_3 \cos\alpha / 2\omega^2 \frac{\alpha}{z}, \quad \omega_2 = \beta_2 / 2\omega^2 \frac{\alpha}{z}$$

a compatibility condition τ あり $= \pm \pi$ 示した。

b) Lund-Regge [10] は四次元時空 z 静的な massless scalar fields \pm interaction z には homogeneous to relativistic string の方程式

$$X_{zz} - X_{\sigma\sigma} + 2X_z \times X_\sigma = 0 \quad X = X(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^3 \quad (10)$$

$$X_z^2 + X_\sigma^2 = 1 \quad X_z \cdot X_\sigma = 0$$

が (曲面 $\Lambda \equiv$ 次元 $1 - 2 \rightarrow 4$ 空間 Λ の理論 Λ の理論 Σ 用 u として \pm u) 方程式系

$$u_3 \tau + \rho \sin u \cos u + \nu_3 \nu_2 \cos u / \rho \sin^3 u = 0 \quad \tau = \frac{1}{2}(\tau + \sigma) \quad (11)$$

$$\nu_3 \tau - (u_3 \nu_2 + u_2 \nu_3) / \rho \sin u \cos u = 0 \quad \tau = \frac{1}{2}(\tau - \sigma)$$

と同値である $\pm \pi$ 示した。方程式系 (11) が、系型方程式

$$i f_3 + u_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} f + \frac{\nu_3}{2\rho \sin^2 u} \begin{bmatrix} 0 & e^{2iu} \\ e^{-2iu} & 0 \end{bmatrix} f + \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f = 0$$

$$i f_2 - \frac{\nu_2}{2\rho \sin^2 u} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f + \frac{1}{2\lambda} \begin{bmatrix} 0 & e^{2iu} \\ e^{-2iu} & 0 \end{bmatrix} f = 0$$

a compatibility condition τ あり $= \pm \pi$ 示した。

c) Getmanov [5] は時空 z 次元 Λ complex scalar field Λ の方程式

$$(1 - |\phi|^2) \phi_{3\eta} + \phi^* \phi_3 \phi_2 - \phi (1 - |\phi|^2)^2 = 0$$

を考へ、2-soliton解を求めた。(N=1トとも同様にして
 ると述べている。) の方程式は

$$\phi = \mu \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\phi}{2}}$$

と $k = \pm \frac{1}{2} \gamma$ 、方程式系 (9) に帰着する。(cf. Kulish [9],
 Neveu-Papanicolaou [13]).

d) Neveu-Papanicolaou [13] は scalar contact interaction
 を持つ 2 個の classical massless fermion の運動方程式

$$[i\gamma - (\sigma + i\pi\gamma^5)] \psi_j = 0 \quad j=1,2$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \psi_j^* \psi_j, \quad \pi = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^2 \psi_j^* \gamma^5 \psi_j$$

が方程式系 (9) に帰着することを示した。

方程式系 (9) と方程式系 (11) との対応は次で与えられる。

$$u = \frac{1}{2} \alpha, \quad v_x = \frac{1}{2} \beta_x \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \quad v_y = -\frac{1}{2} \beta_y \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{cf. Kulish [9]})$$

尚、 \mathbb{R}^3 と $\Delta U(2)$ との対応

$$(x^1, x^2, x^3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}$$

を用い、方程式 (10) は、 $iA, iB \in \Delta U(2)$ として \mathbb{R}^3 と $\Delta U(2)$ の方程式系 (9) とある。

2-soliton 解を構成する。 \mathcal{D} と \mathcal{L} は区間内曲線 $\mu^2 = \prod_{j=1}^{2N} (\lambda - \lambda_j)$

$$\lambda_j \neq 0 \quad (\text{or } \lambda_j \neq -1, 1) \quad \mathcal{E} \text{ と } \eta. \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と \mathcal{L} は、方程式系 (9) の α, β を結果として \mathcal{L} 上の解 (方程式 (10) の $x \in \mathbb{C}^3$ と \mathcal{L} 上の解) を構成される。

References

1. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur : Method for Solving the Sine-Gordon equation. *Phys. Rev. Lett.*, 30 (1973), 1262-1264
2. A. S. Budagov and L. A. Takhtadzian : A Non-linear One-dimensional Model of Classical Fields Theories with Internal Degrees of Freedom. *Soviet Phys. Dokl.* 22 (1977), 428-430
3. V. G. Drinfeld : Commutative Subring of Certain Noncommutative Rings. *Funct. Anal. and Its Appl.* 11 (1977), 9-12.
4. H. Flaschka : On the Toda Lattice II : *Prog. Theor. Phys.* 51 (1974), 703-716.
5. B. S. Getmanov : New Lorentz-Invariant System with Exact Multi-Soliton Solutions. *JETP. Lett.* 25 (2), (1977), 119-122.
6. I. M. Krichever : Algebraic-geometric Construction of the Zakharov-Shabat Equations and Their Periodic Solutions. *Soviet Math. Dokl.* 17 (1976) 394-397
7. — — : Algebraic Curves and Commuting Matricial Differential Operators. *Funct. Anal. and Its Appl.* 10 (1976), 144-146.
8. — — : Integration of Nonlinear Equations by the Method of Algebraic Geometry. *Funct. Anal. and Its Appl.* 11 (1977), 12-26.
9. P. P. Kulish : Conservation Laws for a String in a Static Field. *Theor. Math. Phys.* 33 (1977), 1016-1018.
10. F. Lund and T. Regge : Unified Approach to Strings and Vortices with Soliton Solutions. *Phys. Rev. D* 14 (1976). 1524-1535.

11. S. V. Manakov : Complete Integrability and Stochastization of Discrete Dynamical Systems. Soviet Phys. JETP. 40 (1974). 269-274.
12. Yu. I. Manin : Matrix Solitons and Bundles over Curves with Singularities, Funct. Anal. and Its Appl. 12 (4) (1978), 53-67. (Russian)
13. A. Neron and N. Papanicolaou : Integrability of the Classical $[\bar{\Psi}_i, \Psi_i]_2^2$ and $[\bar{\Psi}_i, \Psi_i]_2^2 - [\bar{\Psi}_i, \gamma \Psi_i]_2^2$ Interactions. Commun. math. Phys. 58(1978), 31-64.
14. S. P. Novikov : The Periodic Problem for the Korteweg-de Vries Equation. Funct. Anal. and Its Appl., 8 (1974), 236-246.
15. K. Pohlmeyer : Integrable Hamiltonian Systems and Interactions through Quadratic Constraints. Commun. math. Phys. 46(1976), 207-221.
16. V. E. Zakharov, L. A. Takhtadjan, and L. D. Faddeev : Complete Description of Solutions of the "Sine-Gordon" equation. Soviet Phys. Dokl., 19 (1975), 824-826.
17. V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov : Relativistically Invariant Two-Dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Problem Technique. Journ. Exp. and Theor. Phys. 74 (6) (1978), 1953-1973. (Russian)
18. V. E. Zakharov and A. B. Shabat : A Scheme for Integrating the Nonlinear Equations of Mathematical Physics by the Method of Inverse Scattering Problem. I. Funct. Anal. and Its Appl., 8 (1974), 226-235.