

Title	非可換Hardy空間における分解定理とその応用 (Hardy空間における線型作用素の研究)
Author(s)	斉藤, 吉助
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 350: 125-133
Issue Date	1979-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/104374
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

非可換 Hardy 空間における分解定理とその応用

新潟大理 斎藤 吉助

§1. 本講演では finite maximal subdiagonal 環における分解定理を示し、その応用として、非可換 Hardy 空間の性質や不変部分空間の構造を示すのが目的である。

記号や定義などはこの講究録の“非可換 Hardy 空間の最近の結果”を参照のこと。

§2. M を faithful normal normalized trace τ をもつ von Neumann 環とする。 $1 \leq p < \infty$ に対して、 $L^p(M, \tau)$ を定義する。 Φ を M から M の中への faithful normal expectation で $\tau \circ \Phi = \tau$ をみたすものとする。 H^∞ を Φ に関する M の finite maximal subdiagonal 環とする。 $H_0^\infty = \{x \in H^\infty : \Phi(x) = 0\}$ とおき、 $H^p = [H^\infty]_p$, $H_0^p = [H_0^\infty]_p$ とし、非可換 Hardy 空間を定義する。 また $D = H^\infty \cap H_0^{\infty*}$ とする。 $n \geq 1$ とし、

$$\text{Proposition 1 (1)} \quad L^2(M, \tau) = H^2 \oplus H_0^{2*} = H_0^2 \oplus H^{2*}$$

$$(2) H^{\infty} = \{x \in M : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^{\infty})\}.$$

証明. (1). $H^{\infty} + H^{\infty*} = H^{\infty} + H_0^{\infty*}$ は M の σ -弱稠密であることを示さなければならない。

(2). まず $x \in M$ とする。 $\tau(x) = 0$ とする。

$$\tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^{\infty}) \Leftrightarrow xH^2 \subset H^2$$

が示せる。 $\Sigma = \{x \in M : xH^2 \subset H^2\}$ とおくと、 Σ は M の σ -weakly closed subalgebra であり $H^{\infty} \subseteq \Sigma \subseteq M$ であることは明らか。 $\Sigma + \Sigma^*$ は M の σ -弱稠密故、至が Σ 上乗法的であることを示せば、 Σ は至に属する subdiagonal 環になるから、 H^{∞} の subdiagonal 環としての maximality から、 $\Sigma = H^{\infty}$ 。 従って、 $\Sigma_0 = \{x \in \Sigma : \Phi(x) = 0\}$ が Σ の 2-sided ideal であることを示せばよい。 $x \in \Sigma_0 \Leftrightarrow x \in M \mid xH^2 \subset H_0^2$ を示すことにより示される。 ■

§ 3. この節では分解定理について示す。

1967年に Arveson [1] は $\forall k \in M \cap M'$ ならば $k = ua$, $a^{-1} \in H^{\infty}$ を満たす M の unitary operator u と $a \in H^{\infty}$ が存在することを示した。 1977年、McAsey, Muhly and Saito [7] によれば、 $k \in M$, $k^{-1} \in L^2(M, \tau)$ ならば $k = ua$ を満たす M の unitary operator u と $a \in H^{\infty}$ が存在することを示した。 さらに、筆者 [2] が $a^{-1} \in H^2$ であることを証明した。

定理 1. $R \in M$, $R^{-1} \in L(M, \tau)$ ならば, $R = u a$, $a^{-1} \in H^2$ となる M の unitary operator u と $a \in H^2$ が存在する。

これを示すため $x, y \in M$, $y \in L(M, \tau)$ に対して,

$$L_x y = xy, \quad R_x y = yx.$$

とおく。 $\mathcal{L} = \{L_x \mid x \in M\}$, $\mathcal{R} = \{R_x \mid x \in M\}$ とすると, \mathcal{L} と \mathcal{R} は finite von Neumann 環で $\mathcal{L}' = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}' = \mathcal{L}$ となる。

定義 1. $\xi \in L(M, \tau)$ が "right-wandering" とは $\xi \perp [\xi H^2]_2$ であるときをいう。

Lemma 1. [1, Lemma 4. 2. 2]. $\xi \in L(M, \tau)$ が right-wandering とする。このとき $u \xi \in [D]_2$, $L u^* u = P_{[R \xi]_2}$ となる M の partial isometry u が存在する。但し, $P_{[R \xi]_2}$ は $L(M, \tau)$ から $[R \xi]_2$ の上への projection とする。

定理 1 の証明. まず $R^{-1} \in L(M, \tau)$ より, $R \notin [R H^2]_2$. $\xi = R^{-1}$, $P_{[R H^2]_2}$ は $L(M, \tau)$ より $[R H^2]_2$ の上への projection とする。
 $\eta = P_{[R H^2]_2} R$ とおく。 $\xi = R - \eta$ は right-wandering とあることを示す。
 さて, Lemma 1 から, $u \xi \in [D]_2$, $L u^* u = P_{[R \xi]_2}$ となる M の partial isometry u が存在する。このとき, u は M の unitary

で $ux = a$ とおくと $a \in H^0$, $a^{-1} \in H^2$ であることが, [1, Theorem 4.4.1] の証明を見直すことにより, 示される。 //

§ 4. この節では, H^p と H_0^p の基本的性質を調べる。まず Proposition 1 より, 次の Lemma が成り立つ。

Lemma 2. $H^1 \cap L^2(M, \tau) = H^2$. $H_0^1 \cap L^2(M, \tau) = H_0^2$.

Lemma 3. $H^1 = \{x \in L^2(M, \tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^{\infty})\}$.

証明. \subseteq は明らか. \supseteq として, $\forall y \in H_0^{\infty}$ に対して $\tau(xy) = 0$ を満たす $x \in L^2(M, \tau)$ をとる. $\neq 0$ とき, $x = |x^*|v$ を x の極分解とする. 但し $|x^*| = (xx^*)^{\frac{1}{2}}$ とする. $0 \leq t \leq 1$ とき $f(t) = 1$, $t > 1$ とき $f(t) = 1/t$ なる $[0, \infty)$ 上の連続実数 f をとる. 今 $k = f(|x^*|^{\frac{1}{2}})$ とおくと, $k \in M$ 且 $k^{-1} \in L^2(M, \tau)$ であることが示せる. \supseteq として, 定理 1 より, $k = ua$, $a^{-1} \in H^2$ を満たす M の unitary operator u と $a \in H^{\infty}$ が存在する. したがって, $|x^*|^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} \lambda d\epsilon_{\lambda}$ とすると $k|x^*|^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} f(\lambda) \lambda d\epsilon_{\lambda} \in M$ 故, $ax \in L^2(M, \tau)$ 且 $\forall y \in H_0^{\infty}$ に対して

$$(ax, y^*) = \tau(axy) = \tau(xya) = 0.$$

従って, Prop. 1 より, $ax \in H_0^2$. \supseteq として

$$x = a^{-1}ax \in H^2 H^2 \subset H^1.$$

∴ 此から, Lemma 3 が成り立つ。

$\forall x \in M$ に対し $\tau(\Phi(x)) = \tau(V|\Phi(x)|)$ ($V \in D$) であり,

$$\|\Phi(x)\|_1 = \tau(|\Phi(x)|) = \tau(V^*|\Phi(x)|) = \tau(V^*x) \leq \|x\|,$$

∴ 此から, Φ を $L^1(M, \tau)$ から $[D]$ の上への expectation に一意に拡張できる。従って, τ の延長, 次の Lemma が容易にわかる。

$$\begin{aligned} \text{Lemma 4. } H_0^1 &= \{x \in L^1(M, \tau) : \tau(xy) = 0 (\forall y \in H^0)\} \\ &= \{x \in H^1 : \Phi(x) = 0\}. \end{aligned}$$

定理 2. $1 \leq p \leq \infty$ とする。

$$(1) H^1 \cap L^p(M, \tau) = H^p, \quad H_0^1 \cap L^p(M, \tau) = H_0^p.$$

$$(2) H^p = \{x \in L^p(M, \tau) : \tau(xy) = 0 (\forall y \in H_0^0)\}.$$

$$(3) H_0^p = \{x \in L^p(M, \tau) : \tau(xy) = 0 (\forall y \in H^0)\}.$$

証明(1). Prop 1 と Lemma 2 より, $p = \infty$, 2 のときは

すでに示した。 $\Sigma = \mathbb{C}$, $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \frac{1}{p}$ とする。

∴ $H^p \subseteq H^1 \cap L^p(M, \tau)$ は自明, $\forall x \in H^1 \cap L^p(M, \tau)$ とする。

$x = |x^*|V = |x^*|^{\frac{p}{2}}|x^*|^{\frac{p}{2}}V$ とおくと, Lemma 3 における連続関数

f に対し $k = f(|x^*|^{\frac{p}{2}})$ とおくと, $k \in M$, $k^{-1} \in L^p(M, \tau)$.

$\Sigma = \mathbb{C}$, 定理 1 より, $k = ua$, $a^{-1} \in H^2$ とおくと M の unitary

operator u と $a \in H^0$ がある。 ∴ H^p とする。

$$ax = u * \mathcal{R} |x^*|^{\frac{p}{2}} |x^*|^{\frac{p}{2}} v \in L^p(M, \tau)$$

よ、又、

$$ax \in H^1 \cap L^p(M, \tau) \subset H^1 \cap L^2(M, \tau) = H^2 \subset H^p$$

$\Sigma = \Sigma'$

$$x = a^{-1} ax \in H^2 ax \subset [H^{\infty} ax]_p \subset H^p$$

従、 Σ , $1 < p < 2$ のとき, $H^1 \cap L^p(M, \tau) = H^p$

同様にして, $1 < p < 2$ のとき, $H_0^1 \cap L^p(M, \tau) = H_0^p$ が成り立ち、

次に $2 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。 $H^p \subset H^1 \cap L^p(M, \tau)$ は自明。 \Rightarrow のとき, $y \perp H^p \Rightarrow \tau(yx) = 0$ ($\forall x \in H^{\infty}$)

Lemma 4 により, $y \in H_0^1 \cap L^q(M, \tau) = H_0^q$ 。 \Rightarrow のから、

$y \perp H^1 \cap L^p(M, \tau)$ がわかる。 $\therefore \Sigma$, $H^p = H^1 \cap L^p(M, \tau)$ 。

(2) と (3) は (1) から自明。 ///

§ 5. \mathcal{M} を $L^p(M, \tau)$ の closed subspace とする。 \mathcal{M} が left-invariant とは、 $H^{\infty} \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ をみたすときをいう。 このとき, [7] で \mathcal{M} が left-invariant ならば $\mathcal{M} \cap M \neq \{0\}$ を示した。 分解定理の 1 の応用として, $[\mathcal{M} \cap M]_p = \mathcal{M}$ を示す。

定理 3. $1 \leq p < \infty$ とする。 \mathcal{M} を $L^p(M, \tau)$ の ^{任意の} left-invariant closed subspace とする。 $[\mathcal{M} \cap M]_p = \mathcal{M}$ 。

証明. (1) $2 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。 $[\mathcal{M} \cap M]_p \subseteq \mathcal{M}$ と

仮定する。今 Hahn-Banach の定理より, $\tau(\xi x) \neq 0$, $\tau(yx) = 0$ ($\forall y \in [\mathcal{M} \cap M]_p$) であるから $\exists \xi \in M$, $\exists x \in L^q(M, \tau)$ が存在する。 $\xi = |\xi^*|v$ とすると, $\xi \in L^p(M, \tau) \subset L^2(M, \tau)$ であり, Lemma 3 における f に対応して, $k = f(|\xi^*|)$ とおく。 $k \in M$ であり $k^{-1} \in L^p(M, \tau) \subset L^2(M, \tau)$ であり, 定理 1 から, $k = ua$, $a^{-1} \in H^2$ であるから M の unitary operator u と $a \in H^p$ がある。 $\xi = z$ (定理 2 より),

$$a^{-1} \in L^p(M, \tau) \cap H^2 = H^p, \quad a\xi (\neq 0) \in \mathcal{M} \cap M.$$

\mathcal{M} は left-invariant 故 $\forall b \in H^q$ に対して, $ba\xi \in \mathcal{M} \cap M$,

$\xi = z$, $\tau(cba\xi x) = 0$. (定理 2 より), $a\xi x \in H_0^q$. したがって,

$$\tau(\xi x) = \tau(a^{-1}a\xi x) = 0. \quad \text{これは矛盾.}$$

(2) $1 \leq p < 2$ とする。 $1/p + 1/q = 1$, $1/p + 1/2 = 1/p + q$, r は整数。 $a \in \mathcal{M}$, $\forall \xi \in [\mathcal{M} \cap M]_p \subseteq \mathcal{M}$ ならば, $\tau(\xi x) \neq 0$

$\forall y \in [\mathcal{M} \cap M]_p$ に対して, $\tau(yx) = 0$ であるから $\xi \in \mathcal{M}$, $x \in L^q(M, \tau)$ がある。 $a \in \mathcal{M}$, 定理 1 より, $a\xi \in L^p(M, \tau) \cap \mathcal{M} \subset$

$L^2(M, \tau) \cap \mathcal{M}$ であり $a^{-1} \in H^2$ であるから $a \in H^p$ がある。 $\xi \in \mathcal{M}$, u の

ようにして, $ba\xi (\neq 0) \in \mathcal{M} \cap M$ であり $b^{-1} \in H^r$ なる $b \in H^p$ がある。

$\xi = z$, $\forall c \in H^q$ に対して, $cba\xi \in \mathcal{M} \cap M$. したがって,

$$\tau(cba\xi x) = 0. \quad \text{定理 2 から, } ba\xi x \in H_0^q, \text{ かつ } (ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \in H^2 H^r \subset H^p \text{ であり}$$

$$\tau(\xi x) = \tau((ba)^{-1}ba\xi x) = 0$$

これは矛盾。 したがって定理が示す通り。

//

参考文献

- [1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.
- [2] W. B. Arveson, On groups of automorphisms of operator algebras, J. Funct. Anal., 15(1974), 217-243.
- [3] H. Helson, Analyticity on compact abelian groups, in "Algebras in analysis", Academic Press, New York, 1975.
- [4] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 29(1977), 73-90.
- [5] R. I. Loebel and P. S. Muhly, Analyticity and flows in operator algebras, J. Funct. Anal., 29(1978), 214-252.
- [6] M. McAsey, Invariant subspaces of non-self-adjoint crossed products, Doctor Thesis.
- [7] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Non-self-adjoint crossed products, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [8] P. S. Muhly and K. -S. Saito, Non-self-adjoint crossed products II, in preparation.
- [9] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 29(1977), 69-75.
- [10] K. -S. Saito, On non-commutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, Tohoku Math. J., 29(1977), 585-595.
- [11] 斎藤 吉助, crossed productにおける非可換 Hardy 空間について, 数理解析研究所講究録, 314, (作用素環の研究とその応用),

49-64 (1977年12月).

- [12] K. -S. Saito, A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [13] L. Zsido, Spectral and ergodic properties of the analytic generators, J. Approximation theory, 20(1977), 77-138.