数理解析研究所講究録
350巻 1979年 111-124

関数環と作用素環にわたる解析性の問題について

山形大、理　　河村新蔵

作用素環の研究の中で *non-selfadjoint algebra* の研究は Kadison-Singer の *triangular algebra* (1960)[6]の研究に始まる。*triangular algebra* は *diagonal* に極大な可換 von-neumann 環をもつ環で、可換な von-neumann 環の議論と密接に結びついていた。von neumann 環に離散型と連続型がある様に *triangular algebra* もその *diagonal* の型によって二つの型に分類される。

Arveson は *non-selfadjoint algebra* を *diagonal* とそれへの *conditional expectation* との関係でとらえ、有限次元 *triangular matrix algebra* と *function algebra* の性質の一般化 (*sub-diagonal algebra* [2]) を考察した。即ち、Hadamard の不等式、分解定理、Jensen の不等式、Szegö の定理について研究した。これらの問題は個々の例について調べ、一般的な形としては完成していない。

一方関数環の研究の中で *non-selfadjoint* な一般的な環の

研究として Arens-Singer によって *generalized analytic function algebra* が詳しく調べられている。Muhly は flow による解析環を考え、それがある条件の下で Dirichlet algebra になる事や flow に関して invariant な measure が representing measure になる事を示し、解析環の極大イデアルの研究を行った(1973) [12]。又 flow に関する analytic measure は quasi-invariant になるというのは一般化された F.M.Riesz の定理であるが、その時 distant future $=\{0\}$ という条件が大きな役割をする。逆に、distant future $=\{0\}$ の時その measure は analytic measure の絶対値 measure か？という Forelli の問題があるが、これは田中によって部分的に解決された (1978) [15]。

von Neumann 環上の flow、即ち一径数*弱連続同型群による $H^\infty(\alpha)$ の研究は関数環のそれに対応して始まった (1976) [7] [10]。しかし潜在的には竹崎の homogeneous state の研究 [14] (1973) の中にも flow による $H^\infty(\alpha)$ の構造を見る事ができる。富田－竹崎理論によれば、全ての von Neumann 環 $\mathcal{M}$ に対し faithful normal state が存在し、それによる modular automorphism group が存在する。この flow により、$\mathcal{M}$ の中に $H^\infty(\alpha)$ を作る事ができ、それが maximal subdiagonal となる。この $H^\infty(\alpha)$ に対して Jensen の不等式、Szegö の定理、

不変部分空間の問題等、どの様になっているか興味深いのであるが、それは今後の $H^\infty(\alpha)$ の研究の一つの課題である。

§1. *Triangular operator algebra.*　M_n を $n\times n$ 行列全体とする。M_n の上方三角行列全体 $\mathfrak{J}=\{(a_{ij})\in M_n;\ a_{ij}=0\ i>j\}$ を射影作用素 $\{F_k\}_{k=1}^{n}$（$F_k=(a_{ij})$；$a_{ii}=1\ 1\leq i\leq k$ その他の $a_{ij}=0$）で記述すると $\mathfrak{J}=\{T=(a_{ij})\in M_n;\ F_nTF_n=TF_n\}$ である。これを無限次元ユークリッド空間で考えてみよう。

例1. $\mathfrak{H}=\ell^2=\{x=(x_n);\ \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty\}$ $(e_n=(0,\cdots,0,\overset{n\text{番目}}{1},0\cdots))$

E_n を $\mathfrak{H}$ から $[e_n]$（$=e_n$ で張る一次元空間）への射影作用素、$F_n=E_1+E_2+\cdots+E_n$ とする。$B(\mathfrak{H})$ を $\mathfrak{H}$ 上の有界線型作用素全体とすれば、$B(\mathfrak{H})$ の無限次元上方三角行列は

$$\mathfrak{J}=\{T\in B(\mathfrak{H});\ F_nTF_n=TF_n\ \ \forall n\}$$

となり、この時 $\mathfrak{J}$ の *diagonal* は $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{J}^*=\{TF_n=F_nT\}=\{TE_n=E_nT\}=\{\sum a_nE_n;\ \sup|a_n|<+\infty\}\cong\ell^\infty(\mathbb{N})$ である。

例2. $\mathfrak{H}=L^2[0,1]$, $(F_\lambda f)(t)=\chi_{[0,\lambda]}(t)f(t)$ $(f\in\mathfrak{H})$.

$\chi_{[0,\lambda]}$ は $[0,\lambda]$ の定義関数。

$$\mathfrak{J}=\{T\in B(\mathfrak{H});\ F_\lambda TF_\lambda=TF_\lambda,\ \forall\lambda:\ 0\leq\lambda\leq 1\}.$$

とすればこれも一つの $B(\mathfrak{H})$ の中の上方三角行列環と考えられよう。Kadison は一般化された三角行列環を次の様に定義した。

定義 1. $\mathfrak{H}$ をヒルベルト空間、$\mathfrak{M}$ を $B(\mathfrak{H})$ の因子 von-Neumann 部分環とする。$\mathfrak{M}$ の部分環 $\mathfrak{T}$ が triangular であるとは $M = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}^*$ が $\mathfrak{M}$ の中の極大可換 von-Neumann 環である。

極大可換 von Neumann 環 M は atomic type（極小射影作用素より生成される）と continuous type（極小射影作用素が存在しない）の直和になるが、triangular algebra $\mathfrak{T}$ が、例 1 の様な極小射影作用素で決定される時、$\mathfrak{T}$ は atomic と言い、例 2 の様な極小でない射影作用素で決定されると、$\mathfrak{T}$ は continuous と言う。一般に $\mathfrak{T}$ は continuous か atomic のどちらかになるとは限らないが（次の例 3 参照）次の条件の下では分類は決定される。

定理 1（[6] Theorem 3.2.1 and 3.3.1）hull $\mathfrak{T} = \{E \in \mathfrak{T}\ ;\ E$ は $ETE = TE\ (\forall T \in \mathfrak{T})$ なる射影作用素$\}$ とし、hull $\mathfrak{T}$ が充分沢山ある時（core of $\mathfrak{T}$ = alg(hull $\mathfrak{T}$) $= \mathfrak{T}^* \cap \mathfrak{T}$）$\mathfrak{T}$ を hyperreducible と言い、$\mathfrak{T}$ が極大な triangular algebra であれば、$\mathfrak{T}$ は atomic type か continuous type である。

注. $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ を triangular algebra とする時、$\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$ ならば $\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_1^* \subset \mathfrak{T}_2 \cap \mathfrak{T}_2^*$ で diagonal の極大性より $\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_1^* = \mathfrak{T}_2 \cap \mathfrak{T}_2^*$ である。従って包含関係によってその

diagonal は変化しない。

例3. $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T})$, $\mathbb{T}$ はトーラス. $r \notin Q$ = 有理数全体。$Uf(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta+r)})$ $(f \in \mathfrak{H})$。U は $\mathfrak{H}$ 上のユニタリ作用素で $\mathcal{M}$ を $L^\infty(\mathbb{T})$ と $\{U^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ で生成する von-Neumann 環、$\mathfrak{J}$ を $L^\infty(\mathbb{T})$ と $\{U^n\}_{n=0}^{\infty}$ で生成ある弱*閉環とすれば、$\mathfrak{J}$ は $\mathcal{M}$ の中で triangular alg ($\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^* = L^\infty(\mathbb{T})$) であるが、hyper-reducible ではない。

§2. subdiagonal 環の定義. Arveson は関数環との比較研究も考慮し non-self adjoint 環の内、次の様な特徴を持つ環を subdiagonal 環とした。

定義2. $\mathcal{M}$ をヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann 環とする。$\mathcal{M}$ の部分環 $\mathfrak{A}$ が次の条件を満たす時、$\mathfrak{A}$ を sub-diagonal 環と言う。

(1) M を $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^*$ の*弱閉包とする時、M は von Neumann algebra.

(2) $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$ の*弱閉包は $\mathcal{M}$ である。

(3) $\mathcal{M}$ から M への conditional expectation (faithful normal positive linear idempotent map) Φ が存在し、Φ は $\mathfrak{A}$ 上で乗法的である。

Triangular algebra は subdiagonal であるかという事は $\mathfrak{M}$ から M への conditional expectation が存在するかという事と同じである。一般に極大可換環への conditional expectation は存在するとは限らないが、triangular algebra $\mathfrak{T}$ が atomic type の時や $\mathfrak{M}$ に faithful normal trace が存在する時は conditional expectation が存在する。

例4. $G=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&1\end{pmatrix};\ a_{11}, a_{12}\in\mathbb{Q}\ \ a_{11}>0\right\}$. G を離散乗法群と見なす。$e=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ は G の単位元である。$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&1\end{pmatrix}\leqq\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\0&1\end{pmatrix}$ を $a_{11}<b_{11}$ 又は $a_{11}=b_{11}, a_{12}<b_{12}$ で定義すると、G は線 型順序群となる。$x\in G$ に対し U_x を左正則表現 ($U_xf(y)=f(x^{-1}y)$ $f\in\ell^2(G)$) とする。$\mathfrak{M}$ を $\{U_x\}_{x\in G}$ で生成する von Neumann 環とする。$\mathfrak{M}$ は $\phi(\cdot)=(\cdot\ f_0, f_0)$ (f_0 は e の定義関数、$(\cdot,\cdot)$ は $\ell^2(G)$ の内積) を trace とする hyperfinite II_1-factor である。$\mathfrak{A}_0=\{\lambda_{x_1}U_{x_1}+\cdots+\lambda_{x_n}U_{x_n}\}_{x_i\geq e}$ とし $\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{A}_0=\{\lambda I\}$ で $\Phi(\sum\lambda_xU_x)=\lambda_eI$ は $\mathfrak{M}$ から $\{\lambda I\}$ への conditional expectation である。

例5 M_0 をヒルベルト空間(可分) $\mathfrak{H}$ 上の II_1-factor とする。G を可換な離散型可算群で順序が入っているとする。$x\in G$ と $T_0\in M_0$ に対し、$(W_xF)(y)=F(x^{-1}y)$ $(TF)(x)=T_0F(x)$ $(F\in\ell^2(G,\mathfrak{H}))$ と、W_x, T を定義すると W_x, T は $B(\ell^2(G,\mathfrak{H}))$ の元で $\mathfrak{M}$ を $\{W_x, T;\ x\in G\ \ T_0\in M_0\}$

で生成された von Neumann環とする。 $\mathfrak{A}_0 = \{T_{x_1}W_{x_1} + \cdots + T_{x_n}W_{x_n}\}_{x_i \geq e}$ とする。 $X \in \mathfrak{M}$ に対し $\Phi(X) = \sum_{x\in G} P_x T P_x$ （P_x は $l^2(G, \mathfrak{H})$ から $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}$ への自然な射影作用素）とすれば、Φ は $\mathfrak{M}$ から $M_0 = \overline{\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}_0^*} = \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}_0^*$ への conditional expectation で、$\mathfrak{A}$ は Φ に関して subdiagonal である。

§3. Flow と subdiagonal algebra. Muhly[12] はコンパクト空間上の flow に対し、一般化された解析環を考えそれが weak * Dirichlet環になる事を示した。subdiagonal 環は非可換 weak * Dirichlet環と考える立場から von Neumann 環 $\mathfrak{M}$ 上の一径数同型群によって決まる解析環が subdiagonal である事が示されている（[7][10]）。詳しい事は[8][9]に述べてあるのでここでは省略し定義と定理のみを述べる。$\{\alpha_t\}_{t\in R}$ を $\mathfrak{M}$ 上の一径数同型群で任意の $\varphi \in \mathfrak{M}_*$ に対し $t \longmapsto \varphi(\alpha_t(T))$ $(T \in \mathfrak{M})$ は連続であるとする。

定義3. $H^\infty(\alpha) = \{T \in \mathfrak{M} \mid$ 任意の $\varphi \in \mathfrak{M}_*$ に対し実軸上の関数 $t \longmapsto \varphi(\alpha_t(T))$ が複素上半平面に有界かつ解析的に拡大できる$\}$

定理2. （[7, Theorem 2.4][10, Theorem III.15) $\mathfrak{M}$ 上に $\mathfrak{M}_+ = \{T \in \mathfrak{M};\ T \geq 0\}$ の元を0から分離する程充分沢山の normal *state* が存在すれば $\mathfrak{M}$ から $H^\infty(\alpha)\cap H^\infty(\alpha)^* = \{T\in\mathfrak{M};\ \alpha_t(T)=T\ \forall t\in\mathbb{R}\}$ 上への *conditional expectation* Φ が存在し，$H^\infty(\alpha)$ はこの Φ に関して *subdiagonal* である。更にこの $H^\infty(\alpha)$ より大きな Φ に関する *subdiagonal* は存在しない。

triangular algebra の立場から見るならば，$H^\infty(\alpha)$ と次の *nest algebra* の関係は興味深い。$\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{M}$ の中の *subdiagonal* とする時，*hull* $\mathfrak{A}=\{E\in\mathfrak{M};\ ETE=TE$ なる射影作用素 $T\in\mathfrak{A}\}$ が，線型順序（$E_1E_2=E_2$ の時 $E_1\geqq E_2$）となっており sup と inf に閉じている時 *hull* $\mathfrak{A}$ は *complete nest* という。0，と I は *hull* $\mathfrak{A}$ に含まれている。$E\in$ *hull* $\mathfrak{A}$ に対して実数 t を $t=t(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}(Ee_i,e_i)$ （$\{e_i\}$ は $\mathfrak{H}$ の基底）で定義すれば，$0\leqq t\leqq 1$ であって $\Omega=\{t \mid t=t(E),\ E\in$ *hull* $\mathfrak{A}\}$ は $\mathfrak{A}$ が *complete nest* という事から $[0,1]$ の閉集合で，対応 $E\longleftrightarrow t=t(E)$ は全単射である。この時 $[0,1]$ 区間上に単位の分解 $\{F_t\}_{0\leq t\leq 1}$ が存在し $U_s=\int_0^1 e^{ist}dF_t$ とすれば $\alpha_t=U_t\cdot U_t^*$ は $\mathfrak{M}$ 上の内部自己同型群となり，$\mathfrak{A}=H^\infty(\alpha)$ である。この事から $*$ 連続な一径数同型群 β に対し，ノルム連続一径数同型群 α が存在して $H^\infty(\alpha)=H^\infty(\beta)$ となる。

§4. Jensen の不等式　本稿の主題であるJensen の不等式について述べる。最初にJensen の不等式と密接に関係ある分解定理について次の Arveson の定理をあげておく。

定理3 [2, Theorem 4.2.1] $(\mathfrak{A}, \Phi)$ を $\mathfrak{M}$ の sub-diagonal として $\mathfrak{M}$ 上に Φ-不変な faithful normal trace Tr が存在するならば次の分解が成り立つ（$\mathrm{Tr}(1)=1$ とする）。

$\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}^{-1}$ の任意の元 T に対し $\mathfrak{M}$ のユニタリ作用素 U と $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^{-1}$ の元 A が存在して $T=UA$ となる。この分解は $\mathfrak{A}$ のユニタリ作用素を無視して一意的である。

この分解定理より $\mathfrak{A}$ は logmodular 環である事が解る。実際 $T=T^*\in\mathfrak{M}$ に対し，$(\exp(2T))^{\frac{1}{2}}$ は $\mathfrak{M}$ の正値作用素で定理より $\mathfrak{M}$ のユニタリ作用素 U と $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^{-1}$ の元 A が存在して $\exp(2T)=(\exp(2T))^{\frac{1}{2}}(\exp(2T))^{\frac{1}{2}}=UA\cdot UA=A^*A$ となる。従って $T=(\log(A^*A)^{\frac{1}{2}}=\log|A|$ $(A\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^{-1})$。

Jensen の不等式を述べる前に Kadison-Fuglede [5] による determinant の定義を述べる。$\mathfrak{M}$ を II-factor とし $X\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}^{-1}$ に対し　$\Delta(X)=\exp\mathrm{Tr}(\log|X|)$ （Tr は $\mathfrak{M}$ 上の trace），一般の $X\in\mathfrak{M}$ に対し　$\Delta(X)=\inf\exp\mathrm{Tr}(\log(|X|+\varepsilon I))$。とする。[5] の目的の一つは generalized nilpotent operator $(\lim\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=0)$ の Trace value は 0 である事を示す事だっ

た。ここで $\Delta(X)$ について Generalized Hadamard inequality と言われる次の不等式について述べてみよう。

定理4　$H>0\ (H\in\mathcal{M})$ ならば $\Delta(H)\leqq\Delta(\Phi(H))$

([2, Cor. 4. 3. 4])

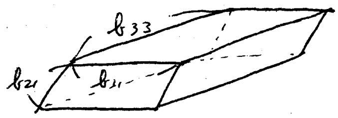
$\mathcal{M}$ を $n\times n$ 行列全体とすると $T=(a_{ij})\in\mathcal{M}$ に対し $\Delta(T)=(\det|T|)^{1/n}$ である。$T^*T=(b_{ij})$ と表わすと $b_{ii}^2=|a_{1i}|^2+|a_{2i}|^2+\cdots+|a_{ni}|^2$ で上の不等式は

$$(\det T)^2\leq b_{11}^2 b_{22}^2\cdots b_{nn}^2$$

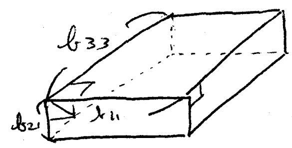
即ち

$$|\det T|\leq|b_{11}||b_{22}|\cdots|b_{nn}|$$

を示す。これは一辺の長さ $|b_{ii}|$ のベクトル $v_i=(a_{1i},a_{2i}\cdots,a_{ni})$ を n 個の辺とする立体と $\{v_i\}_{i=1}^n$ を直交化させたベクトルで作る直方体の体積の関係を意味している。



$\leqq$



ここで disk 環 H^∞ における Jensen の不等式を考えてみよう。$f\in H^\infty$ に対し $|z|<1$ なる z に対し

$$|f(z)|\leq\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P_z(\theta)d\theta$$

$$P_z(\theta)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}\right)$$

$$|f(0)|\leq\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta$$

この不等式を subdiagonal 環に平行移動すれば，

(α)　$T \in \mathfrak{A}$ ならば　$\Delta(\Phi(T)) \leqq \Delta(T)$

となる。これを作用素環の Jensen の不等式と言おう。$\mathfrak{M}$ を $n \times n$ 行列全体とした時、$T^*T \in \mathfrak{A}$ ならば $\det|\Phi(T^*T)| \leq \det T^*T$ となり、前頁の事と合せると、$|\det T| = |b_{11}| \cdots |b_{nn}|$ となる。$T^*T \in \mathfrak{A}$ はベクトル $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ が直交して~~い~~る事であり当然 $\{v_i\}$ より作られた立方体の体積 $|\det T|$ は $|b_{11}| \cdot |b_{22}| \cdots |b_{nn}|$ に等しい。

Jensen の不等式の証明には分解定理が大きな役割を果たすのだが、ここで Jensen の不等式と同値な条件をあげておこう。

(β)　$\Delta(\Phi(A)) = \Delta(A)$　$A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^{-1}$　(Jensen の等式)

(γ)　任意の *state* ρ に対し

$$\inf \rho(|D+T|^2) = \Delta(\rho)$$

$$\Delta(\rho) \equiv \inf\{\rho(T)\,;\, T \text{ は } \mathfrak{M} \text{ の regular positive operator } \exp \mathrm{Tr}(\log k) \geqq 1\}$$

$\Delta(\rho)$ は $\rho(X) = \mathrm{Tr}(HX)$　$H \geqq 0$ の時には $\Delta(\rho) = \Delta(H)$ となり、左辺は *diagonal* と $\mathfrak{A} \cap \mathrm{Ker}\,\Phi$ との *state* ρ に於るヒルベルト空間の中での距離を示しており、(γ) は一般化された Szegö's Theorem と言われる。

Jensen の不等式はどのような *subdiagonal* 環について成り立つか？　現在までの段階では次の様な条件の下で成り立

つ。

(1) $\mathfrak{M}$ は abelian

(2) $\mathfrak{A}$ は nest algebra

(注) hyperreducible maximal triangular subalgebra は nest algebra

(3) $\mathfrak{M} = L^\infty(\Gamma, M)$ M は hyperfinite II_1

(3)で M が I_n-type の時は Helson-Lowdenslager-Wiener の定理と言われる。M が non-hyperfinite の時はまだ解っていない。例5は $l^2(\Gamma \rtimes \mathfrak{s}) \cong l^2(G \rtimes \mathfrak{s})$ で(3)より Jensen の不等式が成り立つ。解析環 $H^\infty(\alpha)$ に関し、分解定理、Jensen の不等式が成り立つか？は今後の問題である。

［参考文献］

[1] R. Arens and I. Singer, Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 379-393

[2] W. Arveson, Analyticity in operator algebra, Amer. J. Math. 89 (1967) 578-642

[3] W. Arveson, Interpolation Problems in Nest Algebras, J. Functional Analysis 20 (1975) 208-233

[4] F. Forelli, What makes a positive measure the total variation

measure of an analytic measure? J. London Math. Soc.(2) (1970) 713-718.

[5] B. Fuglede and R.V. Kadison, Determinant theory in finite factors, Annales of Mathematical Society 55 (1952) 520-530.

[6] R.V. Kadison and I.M. Singer, Triangular Operator Algebras, American Journal of Math. 82(1960) 227-259.

[7] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan. 29 (1977) 73-90.

[8] 河村新蔵 Analyticity in operator algebras, 数理解析研究所講究録 278 (1975) 11-22

[9] 河村新蔵 解析関数環の作用素環への拡張, 実函数論函数解析学 合同シンポジュウム記録(1976) 57-65

[10] R.I. Loebl and P.S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann algebras, J. Funct. Anal. 29 (1978) 214-252

[11] M. McAsey, P.S. Muhly and K-S. Saito, Non-self-adjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality) to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[12] P.S. Muhly, Function algebras and flows I, Acta. Sci. Math., 35 (1973), 111-121

[13] J. Ringrose, On some algebras of operators, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965) 61-83.

[14] M. Takesaki, The structure of a von Neumann algebra with a homogeneous periodic state, Acta Math. 131 (1973) 79-121.

[15] J. Tanaka, A certain class of total variation measures of analytic measures, to appear.