

ある種の作用素半群について

東城大 教養 高野勝男

序.  $W^p$  ( $p > 1$ ) はルベーク可測関数で  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(v)|^p (v^2+1)^{-p/2} dv < \infty$  であるような関数の全体とする。  $W^p$  は  $[\int_{-\infty}^{\infty} |f(v)|^p (v^2+1)^{-p/2} dv]^{1/p} = \|f\|_{W^p}$  を norm とするとき Banach space となる。  $t$  が複素数かつ  $\text{Re } t > 0$  のとき  $P(t, v) = \frac{t}{\pi(v^2+t^2)}$  とする。このとき  $f \in W^p$  に対して  $R(t)f = f$ ,  $(R(t)f)(v) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t, v-u) f(u) du$  とする。こゝの目的は  $\{R(t) : 0 \leq t < \infty\}$  が  $W^p$  から  $W^p$  上への  $(C_0)$  半群であること、また  $t = r - i\delta$  ( $r > 0$ ) で、  $r \rightarrow +0$  とするとき、  $W^p$  から  $W^p$  への  $(C_0)$  群  $\{R(-i\delta) : -\infty < \delta < \infty\}$  が存在することと示すことである。以下において  $p > 1$  とし  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  とする。

§ 1.  $W^p$  上の  $(C_0)$  半群

Lemma 1.1.  $\text{Re } t > 0$  とする。  $R(t)$  は  $W^p$  上の有界線形作用素である。  $\alpha > 0$  かつ  $\alpha \neq \text{Re } t$  であるならば

$$\|R(t)\| \leq \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha+it} \right| + \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha-it} \right| \right)$$

$$\times \frac{1+M_p}{2} + \frac{|t|}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (v^2+1)^{-p/2} dv \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |v-i\alpha-it|^{-p'} dv \right]^{1/p'} \\ \times \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i\alpha+it} \right| \right), \quad (1.1)$$

ただし  $M_p$  は  $p$  のみに関係した定数.

Proof  $\alpha > 0$  かつ  $\alpha \neq \operatorname{Re} t$  のとき

$$P(t, v-u) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ -\frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} + \frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)} \right. \\ \left. + \frac{2it}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)} \right\}. \quad (1.2)$$

これより

$$(P(t)f)(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} + \frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)} \right. \\ \left. + \frac{2it}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)} \right\} f(u) du. \quad (1.3)$$

簡単のため、 $f(u; \alpha, t) = \frac{f(u)}{u-i\alpha+it}$  とおく。[6. Proof of Theorem 101] より

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| -\frac{1}{2\pi i} \frac{v-i\alpha}{v-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} du \right|^p dv \right]^{1/p} \\ \leq \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(u; \alpha, t) \frac{1}{u-v+it} du \right|^p du \right]^{1/p} \\ \leq \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \frac{1+M_p}{2} \|f(\cdot; \alpha, t)\|_p. \quad (1.4)$$

また次のことがいえる。

$$\|f(\cdot; \alpha, t)\|_p = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(u)}{u-i} \frac{u-i}{u-i\alpha+it} \right|^p du \right]^{1/p} \\ \leq \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{u-i}{u-i\alpha+it} \right| \right) \|f\|_{wcp}. \quad (1.5)$$

(1.4), (1.5) から

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| -\frac{1}{2\pi i} \frac{v-i\alpha}{v-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} du \right|^p dv \right]^{1/p} \\ \leq \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha+it} \right| \right) \frac{1+M_p}{2} \|f\|_{wcp}. \quad (1.6)$$

(1.6) を得た方法と同様にして、次のことがわかる。

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \frac{v-i\alpha}{v-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)} du \right|^p dv \right]^{1/p} \\ & \leq \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha-it} \right| \right) \frac{1+M\epsilon}{2} \|f\|_{W^p}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

ヘルダールの不等式と(1.5)によつて次がわかる。

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} 2it \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)} du \right|^p (v^2+1)^{-\frac{p}{2}} dv \right]^{1/p} \\ & \leq \frac{|t|}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)} du \right| \left( \int_{-\infty}^{\infty} (v^2+1)^{-\frac{p}{2}} dv \right)^{1/p} \\ & \leq \frac{|t|}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (v^2+1)^{-\frac{p}{2}} dv \right)^{1/p} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |u-i\alpha-it|^{-p'} du \right)^{1/p'} \left( \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha+it} \right| \right) \\ & \quad \times \|f\|_{W^p}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

(1.6), (1.7), (1.8) より,  $P(t)f \in W^p$  であり,  $P(t)$  は  $W^p$  より  $W^p$  への有界線形作用素であることがわかった。更に, (1.1) も得られた。 <終>

以下において

$$(Uf)(u) = \lim_{a \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^a \exp(-i\omega u) f(\omega) d\omega$$

ただし,  $f \in L^2(\mathbb{R})$  とし,  $\lim$  は二乗平均収束の意味とする。このとき, [1, Theorem 2], p. 974] より次の結果を得る。

Lemma 1.2.  $\operatorname{Re} t > 0$  とする。  $f \in L^2(\mathbb{R})$  とし,

$$(P(t)f)(v) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega v - t|\omega|) (Uf)(\omega) d\omega.$$

$f \in L^p(\mathbb{R})$  のとき,  $f$  の Hilbert transform を  $Cf$  で表す。すなわち

$$(Cf)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} du. \quad (1.9)$$

また、 $D = \frac{d}{dx}$  とおく。  $\lambda = r - i\theta$  ( $r > 0$ ) かつ  $t > 0$  のとき、 $(T(\lambda t)f)(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda t, v-u) f(u) du$ ,  $(T(0)f)(v) = f(v)$  ただし  $f \in L^p(\mathbb{R})$  とすると、[3]の結果より次のことがわかる。

Lemma 1.3,  $\{T(\lambda t) : 0 \leq t < \infty\}$  は  $L^p(\mathbb{R})$  上の  $(C_0)$  半群である。その infinitesimal generator  $A_\lambda$  と domain  $D(A_\lambda)$  は次のようになる。

$$D(A_\lambda) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : (Cf)(x) \text{ is absolutely continuous and } DCf \in L^p(\mathbb{R})\},$$

$$f \in D(A_\lambda) \text{ のとき, } (A_\lambda f)(x) = \lambda (DCf)(x). \quad (1.10)$$

以下において簡単のため、 $f \in W^p$  のとき  $n(u) = \frac{f(u)}{u-i}$ ,  $g(u) = \frac{f(u)}{(u-i)^2}$  とおくことにする。

Theorem 1,  $\lambda = r - i\theta$  ( $r > 0$ ) とする。  $\{P(\lambda t) : 0 \leq t < \infty\}$  は  $W^p$  上の  $(C_0)$  半群である。その infinitesimal generator  $G_\lambda$  と domain  $D(G_\lambda)$  は次のようになる。

$$D(G_\lambda) = \{f \in W^p : (Cn)(x) \text{ is absolutely continuous and } DCn \in L^p(\mathbb{R})\},$$

$$f \in D(G_\lambda) \text{ とし,}$$

$$(G_\lambda f)(x) = \lambda(x-i)(DCn)(x) + \lambda(x-i)(Cg)(x) + \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du.$$

Proof I.  $P(\lambda t)P(\lambda s) = P(\lambda(t+s)) : 0 < t, s < \infty$  とする。無限回微分可能, 急減少関数の全体を  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  とする。

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  のとき,  $P(\lambda s)f \in L^2(\mathbb{R})$  であり

$$\begin{aligned} P(\lambda t)P(\lambda s)f &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iuv - \lambda t|u|) U(P(\lambda s)f)(u) du \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iuv - \lambda t|u|) \exp(-\lambda s|u|) (Uf)(u) du \\ &= (P(\lambda(t+s))f)(v). \end{aligned}$$

$f \in W^p$  ときは,  $f_n \rightarrow f$  as  $n \rightarrow \infty$  であるような  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  をとることによって

$$\begin{aligned} &\|P(\lambda t)P(\lambda s)f - P(\lambda(t+s))f\|_{W^p} \\ &\leq \|P(\lambda t)P(\lambda s)f - P(\lambda t)P(\lambda s)f_n\|_{W^p} + \|P(\lambda(t+s))f_n - P(\lambda(t+s))f\|_{W^p} \\ &\rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

従って, すべての  $f \in W^p$  について  $P(\lambda t)P(\lambda s)f = P(\lambda(t+s))f$  である。

II.  $P(\lambda s) \mapsto P(\lambda t) (s \mapsto t) : [5, \text{Lemma 1.3}]$  によつて,  $f \in L^p(\mathbb{R})$  のとき  $L^p$ -norm の意味で  $P(\lambda t)f \mapsto f$  as  $t \mapsto +0$  が成り立つ。Lemma 1.1 から,  $\|P(t)\|$  は  $t = 0$  の近傍で一様に有界である。従つてすべての  $f \in W^p$  について,  $\|P(\lambda t)f - f\|_{W^p} \mapsto 0$  as  $t \mapsto +0$  が成り立つ。

III. Infinitesimal generator  $G_\lambda$  and its domain  $D(G_\lambda)$ : (1.3) より次のことがわかる。

$$t^{-1}(P(\lambda t)f - f)(v) = (v-i)t^{-1} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i+it\lambda)(u-v+it\lambda)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-it\lambda)(u-v-it\lambda)} - \frac{f(v)}{v-i} \Big\} + \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-it\lambda)(u-i+it\lambda)} \\
= & (v-i)t^{-1} \Big\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(u)}{u-v+it\lambda} du + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(u)}{u-v-it\lambda} du - n(v) \Big\} \\
& + (v-i)t^{-1} \Big\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left( \frac{1}{u-i} - \frac{1}{u-i+it\lambda} \right) \frac{du}{u-v+it\lambda} \\
& \quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left( \frac{1}{u-i-it\lambda} - \frac{1}{u-i} \right) \frac{du}{u-v-it\lambda} \Big\} \\
& + \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-it\lambda)(u-i+it\lambda)} \\
= & (v-i)t^{-1} \Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda t, v-u) n(u) du - n(v) \Big\} \\
& + (v-i) \frac{i\lambda}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(u)}{u-i+it\lambda} \frac{du}{u-v+it\lambda} + (v-i) \frac{i\lambda}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(u)}{u-i-it\lambda} \frac{du}{u-v-it\lambda} \\
& + \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-it\lambda)(u-i+it\lambda)} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

次の  $\alpha = \varepsilon$  を決める。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-it\lambda)(u-i+it\lambda)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \quad \text{as } t \rightarrow +0. \quad (1.12)$$

$$g(t, u) = \frac{n(u)}{u-i+it\lambda} \quad \text{と } \alpha < \cdot \quad [6. \text{ Proof of Theorem 101}]$$

より 次の  $\alpha = \varepsilon$  を決める。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, u) \frac{du}{u-v+it\lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(-t, u) \frac{du}{u-v-it\lambda} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{du}{u-v+it\lambda} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{du}{u-v-it\lambda} \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
& \leq \frac{1+M_p}{2} \left\{ \|g(t, \cdot) - g\|_p + \|g(-t, \cdot) - g\|_p \right\} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \\
& \rightarrow +0. \quad (1.13)
\end{aligned}$$

一方、次の  $\alpha = \varepsilon$  を決める。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{du}{u-v+it\lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{du}{u-v-it\lambda} + i(Cg)(v) \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
= & \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(y-tq) \frac{dy}{y-v+it\lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(y+q) \frac{dy}{y-v-it\lambda} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + i(Cg)(v) \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
& \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{y-v}{(y-v)^2 + (t\lambda)^2} dy + i(Cg)(v) \right|^p dv \right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (g(y-tq) - g(y)) \frac{dy}{y-v+i\tau} \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
& + \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (g(y+ tq) - g(y)) \frac{dy}{y-v-i\tau} \right|^p dv \right\}^{1/p}. \quad (1.14)
\end{aligned}$$

[6. Proof of Theorem 101] および [7. Example 19, p. 397]

によつて次のことわかる。

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{y-v}{(y-v)^2 + (\tau)^2} + i(Cg)(v) \right|^p dv \right\}^{1/p} \rightarrow 0$$

as  $t \rightarrow +0$ , (1.15)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (g(y-tq) - g(y)) \frac{dy}{y-v+i\tau} \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
& \leq \frac{1+M_p}{2} \|g(\cdot - tq) - g\|_p \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow +0. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (g(y+ tq) - g(y)) \frac{dy}{y-v-i\tau} \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
& \leq \frac{1+M_p}{2} \|g(\cdot + tq) - g\|_p \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow +0. \quad (1.17)
\end{aligned}$$

故に、(1.13) - (1.17) より次がえられる。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, u) \frac{du}{u-v+i\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(-t, u) \frac{du}{u-v-i\tau} \rightarrow -i(Cg)(v)$$

as  $t \rightarrow +0$ . (1.18)

従つて、(1.11), (1.12), (1.18) として Lemma 1.3 より、

定理の主張がえられる。

<終>

## § 2. $W^p$ 上の $(C_0)$ 群

Lemma 1.1 より次の Lemma がえられる。

Lemma 2.1.  $R(t)$  は複素右半平面上で、強連続かつ正則な作用素関数である。  $t = \xi + i\lambda$ , ( $-\infty < \lambda < \infty$ ,  $\xi > 0$ ) とおくとき、 $0 < \xi \leq 1$  かつ  $|\lambda| \leq 1$  であれば  $\|R(t)\| \leq M$

がいえる。ただし  $M$  は定数。

次に  $F$  について、(1.2) における  $\lambda$  の値を 1 とする = とする。  
 次の Lemma が得られる。

Lemma 2.2.  $-\infty < \rho < \infty$  とするとき

$$(R(\rho)f)(v) = \left\{ f(v-\rho) + i(v-i) \left( C \frac{f}{\cdot - i + \rho} \right) (v-\rho) \right\} \frac{1}{2} \\ + \left\{ f(v+\rho) - i(v-i) \left( C \frac{f}{\cdot - i - \rho} \right) (v+\rho) \right\} \frac{1}{2} + \frac{i\rho}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i+\rho)(u-i-\rho)}$$

なる  $W^p$  上から  $W^p$  への作用素  $R(\rho)$  を定義する。このとき  
 すべての  $f \in W^p$  について、norm 収束の意味で

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} R(\rho + i\rho)f = R(i\rho)f$$

が成立する。

Theorem 1, Lemma 2.1, Lemma 2.2 を用いて  
 [2, Theorem 17.9.2] によって次の定理がえられる。

Theorem 2.  $\{R(i\rho) : -\infty < \rho < \infty\}$  は  $W^p$  上の  $(C_0)$   
 群である。その infinitesimal generator  $G_i$  と domain  
 $D(G_i)$  は次のようなものである。

$$D(G_i) = \left\{ f \in W^p : (Cn)(x) \text{ is absolutely continuous and } DCn \in L^p(\mathbb{R}) \right\},$$

$f \in D(G_i)$  のとき

$$(G_i f)(x) = i(x-i)(DCn)(x) + i(x-i)(Cg)(x) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du.$$



## References

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators, Part II: Spectral theory*, Interscience, New York 1963.
2. E. Hille and E. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, A. M. S. Colloq. Publ, vol. 31 (1957).
3. ———, *On the generation of semigroups and the theory of conjugate functions*, Proc. R. Physogr. Soc. Lund, 21:14 (1951), 130-142.
4. S. Koizumi, *On the singular integrals. V*, Proc. Japan Acad., 35 (1959), 1-6.
5. K. Takano, *An analogous method to Cameron and Storvick's function space integral and evolution systems*, J. London Math. Soc. 16 (1977), 83-95.
6. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of the Fourier integrals*, Oxford Univ. Press, Second Edition, 1948.
7. ———, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, Second Edition, 1939.