

Hardy 空間の Fourier multiplier

東大 理 宮地晶彦

実関数論的に定義される Hardy 空間 $H^p(\mathbb{R}^n)$ または $H^p(\mathbb{T})$ での Fourier 掛算作用素 $f \mapsto T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi) \mathcal{F}f(\xi))$ と考える。ただし \mathcal{F} は Fourier 変換, $m(\xi)$ は $\mathbb{R}^n = \widehat{\mathbb{R}^n}$ または $\mathbb{Z} = \widehat{\mathbb{T}}$ 上の関数である。 T_m が H^p で有界作用素となる m の全体を $\mathcal{M}(H^p)$ と書くことにする。以下 I で, ここで扱う Hardy 空間について知られている事実をまとめておく。II で Fourier 掛算作用素についての結果を述べる。

I. $H^p(\mathbb{R}^n)$ と $H^p(\mathbb{T})$ の基本的な事実.

(1) $H^p(\mathbb{R}^n)$ の定義. まず, $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, x_0 = t > 0\}$ 上の複素数値調和関数の $(n+1)^k$ 個 ($k=1, 2, \dots$) の系 $\{u_{j_1, \dots, j_k}(x, t)\}$ ($j_i = 0, 1, \dots, n; \dots; j_k = 0, 1, \dots, n$) が k 階の gradient であることとは, \mathbb{R}_+^{n+1} 上の (x, t) についての調和関数 $h(x, t)$ があり, $u_{j_1, \dots, j_k} = \partial^k h / \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}$ と書かれることである, と

定義する。このことは次の方程式系を満たす v と同値である:

$$\textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{j_1 \dots j_k} = u_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(k)}} \quad \forall j_i, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k (= k \text{文字の置換群}) \\ v_{j_1 \dots j_k j_{k+1}} = \partial u_{j_1 \dots j_k} / \partial x_{j_{k+1}} \quad \text{とおくとき} \\ v_{j_1 \dots j_k j_{k+1}} = v_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(k)} j_{\sigma(k+1)}} \quad \forall j_i, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{k+1} \\ \sum_{j=0}^n u_{j j_3 \dots j_k} = 0 \quad \forall j_3 \dots j_k, \end{array} \right.$$

$k=1$ のときは,

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i, j = 0, 1, \dots, n \\ \sum_{j=0}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \end{array} \right.$$

\mathbb{R}_+^{n+1} 上の調和関数の $\mathbb{R}^n = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ での境界値を考えるための
補題 ([7] p.174). \mathbb{R}_+^{n+1} 上の調和関数 $u(x, t)$ と $p > 0$ に対し

$$\sup_{0 < t < \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx \right)^{1/p} = A < \infty$$

ならば, $f = \lim_{t \downarrow 0} u(x, t)$ が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で存在し, f の Fourier 変換は関数で $|\mathcal{F}f(\xi)| \leq C_p A |\xi|^{n/p-n}$, かつ $u(x, t)$ は f の Poisson 積分に等しい:

$$\textcircled{3} \quad u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-2\pi t|\xi|} \mathcal{F}f(\xi) \right) (x).$$

さて, k 階の gradient 系 $\{u_{j_1 \dots j_k}(x, t)\}$ であって,

$$\sup_{0 < t < \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j_1=0}^n \cdots \sum_{j_k=0}^n |u_{j_1, \dots, j_k}(x, t)|^2 \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p}$$

が有限であるもの全体を、仮りに X_R^p とし、上の値を $\{u_{j_1, \dots, j_k}\}$ のノルム $\|\{u_{j_1, \dots, j_k}\}\|_{X_R^p}$ とする。上の補題により $\{u_{j_1, \dots, j_k}\} \in X_R^p$ に対しては $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の境界値 $\lim_{t \rightarrow 0} u_{j_1, \dots, j_k}(x, t) = f_{j_1, \dots, j_k}$ があるわけだが、方程式 ① または ② を満たすことか、 $\{u_{j_1, \dots, j_k}\}$ は $f_{0, \dots, 0}$ だけから決定してしまう。 u_{j_1, \dots, j_k} は f_{j_1, \dots, j_k} から ③ によって復元され、 f_{j_1, \dots, j_k} は $f_{0, \dots, 0}$ から次の式で決定される：

$$\textcircled{4} \quad f_{j_1, \dots, j_k} = R_{j_1, \dots, j_k} f_{0, \dots, 0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1} \left(\left(-i \frac{\xi_{j_1}}{|\xi|} \right) \cdots \left(-i \frac{\xi_{j_k}}{|\xi|} \right) \mathcal{F} f_{0, \dots, 0}(\xi) \right),$$

ただし $j = 0$ のときは項 $(-i \xi_j / |\xi|)$ は 1 でかきかえる。そこで $H^p(\mathbb{R}^n)$ を次のように定義する： $(n-1)/(n-1+k) = p_R$ とし、

$$p_{R-1} \geq p > p_R \quad \left\{ \begin{array}{l} H^p(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid f = \lim_{t \rightarrow 0} u_{0, \dots, 0}(x, t), \{u_{j_1, \dots, j_k}\} \in X_R^p \right\} \\ \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\{u_{j_1, \dots, j_k}\}\|_{X_R^p} \end{array} \right.$$

([7] pp. 167 ~ 168.)。これで $1 \geq p > 0$ によって $H^p(\mathbb{R}^n)$ が定義された。 $\infty > p > 1$ の場合には $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ とする。

$H^p(\mathbb{R}^n)$ をこのように定義すると、これは $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ から定まる距離によって完備な線型位相空間で $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に連続に埋め込まれ、 $H^p(\mathbb{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $H^p(\mathbb{R}^n)$ の稠密である。($0 < p < 1$ の場合には $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ が三角不等式を満たす。)

(注) (i) $H^p(\mathbb{R}^n)$ の定義で、異なる k を使うのは、 $p > p_k$ のとき k 階の gradient 系 $\{u_{j_1, \dots, j_k}\}$ に対して

$$\left(\sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_k=0}^n |u_{j_1, \dots, j_k}(x, t)|^2 \right)^{1/2}$$

が (x, t) につき寄調和関数になる、という事実 ([2]) に基

がいていす。(ii) $H^p(\mathbb{R})$ を定義するのに、上半空間 $\mathbb{R}_+^2 \subset \mathbb{C}$

上の正則関数のある族の境界値とする方法がある。この場合

には、その境界値が正則関数の性質を継承していすか(例え

ば Fourier 変換の台が半直線上にある等)、上で与えた $H^p(\mathbb{R}^n)$

の定義では、 $\{u_{j_1, \dots, j_k}\}$ のうち $u_{0, \dots, 0}$ 以外の境界値をもち H^p

を定義したので、 $H^p(\mathbb{R}^n)$ の元自身は正則関数的な性格を誇っ

ていす。($p=1$ の場合については [4] 参照。)

(2) $H^p(\mathbb{R}^n)$ の特徴づけ.

定理^A ([7] pp. 183-184). $0 < p < \infty$ とする。 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して以

下の3つの条件は同値である:

(i) $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\int \varphi(x) dx \neq 0$ なるある $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$f^+(x) = \sup_{0 < t < \infty} |\varphi_t * f(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n);$$

(iii) $f^*(x) = \sup_{\psi \in \mathcal{A}} \sup_{|y-x| < t} |\psi_t * f(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n).$

ただし $\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(x/t)$, $\varphi * f(x) = \langle \varphi(x-\cdot), f \rangle$, \mathcal{A} は

$$\mathcal{A} = \left\{ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} \left| \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \leq 1 \right\}.$$

N は p と n のみによって決まる整数である。更に

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \approx \|f^+\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

次の $H^p(\mathbb{R}^n)$ の特徴づけは、本質的には $H^p(\mathbb{R}^n)$ の元の定義と同等である。

定理 B. (Riesz 変換による特徴づけ) $p > (n-1)/(n-1+k)$ とする。

R_{j_1, \dots, j_k} ($j_1 = 0, 1, \dots, n; \dots; j_k = 0, 1, \dots, n$) は \otimes で与えられる作用素とするとき、

$$f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n) \iff R_{j_1, \dots, j_k} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall (j_1, \dots, j_k).$$

しかも $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \approx \sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_k=0}^n \|R_{j_1, \dots, j_k} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

もうひとつの特徴づけを述べるため、 p -atom と呼ぶものを次のように定義する; $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が " p -atom" であるとは、

$$\text{support } f \subset B, \quad \|f\|_{L^\infty} \leq |B|^{-1/p},$$

$$\int_B f(x) x^\alpha dx = 0 \quad \text{whenever } |\alpha| \leq \left[\frac{n}{p} - n \right]$$

と満たす球 $B \subset \mathbb{R}^n$ があること。次の定理は、 $n=1$ の場合に [5] で得られ、最近 [9] で $n \geq 2$ まで拡張されたものである。

定理 C (atom 分解による特徴づけ) $0 < p \leq 1$ とする. 任意の $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ に対し, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ と p -atom g_j ($j=1, 2, \dots$) があつて,

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j, \quad \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|_{H^p}$$

とあらわされる. 逆に $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ が $\sum |\lambda_j|^p < \infty$ なる数列で g_j が p -atom ならば, 級数 $\sum \lambda_j g_j$ は $H^p(\mathbb{R}^n)$ で収束し,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j \in H^p(\mathbb{R}^n), \quad \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j \right\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C' \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ここで C と C' は p と n のみに依存する定数である.

(3) $H^p(\mathbb{R}^n)$ の dual space.

$\alpha \geq 0$ と $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ に対し, 次のように定義する:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{\alpha, k}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 < r < \infty \\ g \in \mathbb{R}^n}} \inf_{\substack{P \in \mathcal{P}_k \\ |x-y| < r}} \left\{ r^{-\alpha-k} \int |f(x) - P(x)| dx \right\},$$

($\mathcal{P}_k = k$ 次以下の多項式全体.)

$$\mathcal{L}_{\alpha, k} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{\mathcal{L}_{\alpha, k}} < \infty \right\}.$$

特に $\mathcal{L}_{0,0} = \text{BMO}$ (= the space of functions of bounded mean oscillation).

次のことは, 定理 C からただちに導かれる:

$$\text{114 の 同値性} \quad \begin{cases} (H^1)' = \text{BMO}, \\ (H^p)' = \mathcal{L}_{\alpha, k}, \quad 0 < p < 1, \quad \alpha = \frac{n}{p} - n, \quad k = \lceil \frac{n}{p} - n \rceil. \end{cases}$$

対応 $u \in (H^p)'$ \longleftrightarrow $f \in L_{q, \mathbb{R}} \approx BMO$ は,

$${}_{H^p} \langle g, u \rangle_{(H^p)'} = \int g(x) f(x) dx, \quad \forall g \in H^p \cap C_0^\infty$$

で与えられる。差が次数以下の多項式である f は同一視する。

(cf. [9])

(4) 補間定理. ([3], [6].)

$\{T_z\}$ は 単円数族上で定義された線型作用素の族で, 任意の単円数 f と g に對して,

$$z \longmapsto \int (T_z f(x)) g(x) dx$$

が $0 < \operatorname{Re} z < 1$ で正則 $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ で連続であり, 更に, ある定数 $C = C_f$ と $\theta = \theta_f < \pi$ とがある。

$$\log \|T_z f\|_L \leq C e^{\theta |\operatorname{Im} z|}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1,$$

が成り立つとする。 $0 < p_0 < 1 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ の z の評価

$$\|T_{iy} f\|_{p_0} \leq A_0(y) \|f\|_{H^{p_0}}, \quad f \in H^{p_0} \cap \{\text{単円数}\}$$

$$\|T_{1+iy} f\|_{p_1} \leq A_1(y) \|f\|_{H^{p_1}}, \quad f \in H^{p_1} \cap \{\text{単円数}\}$$

$$\log A_0(y) \leq C_0 e^{\theta_0 |y|}, \quad \log A_1(y) \leq C_1 e^{\theta_1 |y|}$$

$$\theta_0 < \pi, \quad \theta_1 < \pi$$

が成り立つことは, $0 \leq \theta \leq 1$ なる θ により, T_θ は次の評価を持つ:

$$\|T_\theta f\|_{L^{p_0}} \leq C \|f\|_{H^{p_0}}, \quad f \in H^{p_0} \cap \{\text{単項級}\},$$

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

(5) $H^p(\mathbb{T})$ について, $0 < p \leq 1$ とする.

$$X^p = \left\{ f \mid \begin{array}{l} f(z) \text{ は } |z| < 1 \text{ で正則, } f(0) \in \mathbb{R} \\ \|f\|_{X^p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} < \infty \end{array} \right\}$$

とし, $\text{Re} H^p(\mathbb{T}) \in \mathbb{T}$ 上の distribution の部分集合として

$$\text{Re} H^p(\mathbb{T}) = \left\{ g \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \mid g = \lim_{r \uparrow 1} \text{Re} f(re^{ix}), f \in X^p \right\}$$

で定義する.

$$g = \lim_{r \uparrow 1} \text{Re} f(re^{ix}) \text{ のとき } \|g\|_{H^p(\mathbb{T})} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{X^p}$$

とする. $H^p(\mathbb{T})$ は次のように定義する:

$$H^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \mid \text{Re} f \in \text{Re} H^p(\mathbb{T}), \text{Im} f \in \text{Re} H^p(\mathbb{T}) \right\},$$

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{T})} = \left(\|\text{Re} f\|_{H^p(\mathbb{T})}^p + \|\text{Im} f\|_{H^p(\mathbb{T})}^p \right)^{1/p}.$$

このように定義した $H^p(\mathbb{T})$ ($0 < p \leq 1$) に対して, $H^p(\mathbb{R}^n)$ に対すると同様のことが成り立つ. 定理 A 2" は, (ii), (iii) を

それぞれ (ii)', (iii)' と置きかえればよい:

(ii)' $\int \varphi(x) dx \neq 0$ なるある $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$f^+(x) = \sup_{0 < t < \infty} |\tilde{\varphi}_t * f(x)| \in L^p(\mathbb{T});$$

$$(iii)' \quad f^*(x) = \sup_{0 < \delta < 1} \sup_{\phi \in \mathcal{A}_\delta} \sup_{|y-x| < \delta} |f * \phi(y)| \in L^p(\mathbb{T}).$$

ただし, (ii)' の $\tilde{\varphi}_t$ と書いたのは,

$$\tilde{\varphi}_t(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{x+2k\pi}{t}\right)$$

で定義される \mathbb{T} 上の関数 (\mathbb{R} 上の周期 2π の関数), (iii)' の \mathcal{A}_δ は次で定義される関数の集合である:

$$\mathcal{A}_\delta = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{T}) \mid \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{|x|}{\delta}\right)^N \sum_{\ell=0}^N \delta^\ell \left| \frac{d^\ell \phi(x)}{dx^\ell} \right| dx \leq 1 \right\}.$$

上の N は p のみに依存して決まる整数である. 定理 B では, Riesz 変換 $R_{j_1, \dots, j_r} f$ を共役関数 \tilde{f} でおきかえて, 主張と,

$$f \in L^2(\mathbb{T}) \cap H^p(\mathbb{T}) \iff f \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T}) \text{ かつ} \\ \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T}),$$

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{T})} \approx \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

とすればよい. \tilde{f} は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad a < \pm \quad \tilde{f}(x) = \sum_{n \neq 0} c_n (-i \operatorname{sign} n) e^{inx}$$

で定義されるものである. 定理 C では, 球 $B \subset \mathbb{R}^n$ と \mathbb{T} 上の区間でおきかえて p -atom を定義しておけば, $f \in H^p(\mathbb{T})$ が

$$f = g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j$$

$$\lambda_j \in \mathbb{C}, \quad g_j: p\text{-atom}, \quad g_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$$

$$\|g_0\|_{L^\infty} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{1/p} \leq C \|f\|_{H^p(\mathbb{T})}$$

のように分解される, という形で定理が成り立つ。($H^p(\mathbb{T})$ に対する p -atom を定義するには, 多項式と三角多項式をおまかえしてもよいが, おまかえなくてもよい。) $H^p(\mathbb{T})$ ($0 < p \leq 1$) の双対空間は,

$$\mathcal{L}_\alpha = \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \|f\|_{\mathcal{L}_\alpha} < \infty \right\}, \quad \alpha = \frac{1}{p} - 1$$

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\alpha} = \sup_{\substack{a \leq b \\ b-a < 2\pi}} \inf_{\substack{P: \text{多項式} \\ \deg P \leq [\alpha]}} \left\{ (b-a)^{-\alpha-1} \int_a^b |f(e^{ix}) - P(x)| dx \right\}$$

に等しい。($H^p(\mathbb{T}) \rangle \ni u \longleftrightarrow f \in \mathcal{L}_{1/p-1}$ の対応は,

$$\langle g, u \rangle_{(H^p)', H^p} = \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{ix}) f(e^{ix}) dx, \quad \forall g \in C^\infty(\mathbb{T}),$$

$$\|u\|_{(H^p)'} \approx \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + \|f\|_{\mathcal{L}_{1/p-1}}$$

が得られる。 $H^p(\mathbb{T})$ と $L^p(\mathbb{T})$ においても補向定理が成り立つ。

II. Fourier 掛算作用素について.

定理 1. (i) $a \geq 0, b \geq 0, 0 < p_0 < 2, na(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}) = b, k = \max\{[n(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2})] + 1, [\frac{n}{2}] + 1\}$ とする. $t \in \mathbb{R}, m \in C^k(\mathbb{R}^n)$ が,

$$m(\xi) = 0 \quad \text{if } |\xi| \leq 1$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha m(\xi) \right| \leq |\xi|^{-b + (a-1)|\alpha|}, \quad |\alpha| \leq k$$

を満足するならば, $2 \geq p \geq p_0$ なる p について $m \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))$.

(ii) $c \geq 0, d \geq 0, 0 < p_0 < 2, nd(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}) = c, k = \max\{[n(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2})] + 1, [\frac{n}{2}] + 1\}$ とする. $t \in \mathbb{R}, m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ が,

$$m(\xi) = 0 \quad \text{if } |\xi| \geq 1$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha m(\xi) \right| \leq |\xi|^{c - (1+d)|\alpha|}, \quad |\alpha| \leq k$$

を満足するならば, $2 \geq p \geq p_0$ なる p について $m \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))$.

証明の概略. $p = p_0 < 1$ のときは「証明」を示す. 定理 B と

定理 C によれば,

$$\|R_{j_1 \dots j_k} T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C, \quad f: p\text{-atom}$$

が示されるからよい. 上の評価は, $m(\xi)$ を

$$m(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} m(\xi) \psi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} m_j(\xi),$$

$$\left(\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \text{support } \psi \subset \left\{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\right\}, \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \equiv 1\right)$$

のように分割して, $T_m f$ を評価する ε によ
って得られる. $p = p_0 < 1$ の場合には定理が示されるから,

$$m_\varepsilon(z) = |z|^{-\varepsilon + \varepsilon(1+\varepsilon)z} m\left(\frac{z}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

なる族 $\{m_\varepsilon \mid z \in \mathbb{C}, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ を考え, ^{(4)の}補内定理を利用す
れば, $p_0 \geq 1$ のときにも $p = p_0$ について定理が示される. 最
後に $m_\varepsilon(z) \equiv m(z)$ について $p = p_0$ と $p = 2$ の間で補内定理
を使えば $m \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n))$ が $2 \geq p \geq p_0$ について言える. \square

この定理は, 次の例が示すように, sharp である. $\Phi(z) \in$

$$\Phi(z) = 0 \text{ if } |z| \leq 1, \quad \Phi(z) = 1 \text{ if } |z| \geq 2$$

なるものを \mathbb{R}^n 上の関数とする.

$$\left\{ \begin{array}{l} m(z) = \Phi(z) |z|^{-\alpha} e^{i|z|^a} \text{ は定理 (i) の仮定を満たすか, } \alpha \geq 0, \\ \alpha > 0, \alpha \neq 1 \text{ のときには } 0 < p < p_0 \text{ なる } p \text{ について} \\ m \notin \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n)); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m(z) = (1 - \Phi(z)) |z|^c e^{i|z|^{-d}} \text{ は定理 (ii) の仮定を満たすか,} \\ c \geq 0, d > 0 \text{ のとき } 0 < p < p_0 \text{ なる } p \text{ について} \\ m \notin \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^n)). \end{array} \right.$$

([8], [10], [11])

定理¹の応用として, 次のことが言える:

$$\| (1+|\xi|^2)^{-\ell/2} e^{it|\xi|^2} \|_{\mathcal{L}(H^p(\mathbb{R}^n))} \leq C(1+|t|)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})},$$

$$0 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \leq \frac{\ell}{2n}.$$

このことは, Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解 $u = u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2} \mathcal{F}f(\xi))$ に對して,

$$\| u(\cdot, t) \|_{W^{p,s}(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+|t|)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \| f \|_{W^{p,s+\ell}(\mathbb{R}^n)}$$

$$0 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \leq \frac{\ell}{2n}$$

$$\| f \|_{W^{p,s}(\mathbb{R}^n)} = \| \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{\ell/2} \mathcal{F}f(\xi)) \|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$$

なる評価が成り立つことを示して置く。(cf. [1], [8])

$(H^1)' = \text{BMO}$, $(H^p)' = \mathcal{L}_{\alpha, p-n}$ なる関係を用えば, 定理¹の仮定を満たす Fourier 掛算作用素の BMO - \mathcal{L}_α , $\mathcal{L}_{\alpha-1}$ に因る評価が得られる。

次に $H^p(\mathbb{R})$ の Fourier 掛算作用素について述べる。 $H^p(\mathbb{R})$ の atom 分解を用えば, 次の命題が示される:

命題 1. ϕ を \mathbb{R} 上の関数とするとき,

$$\|\phi f\|_{H^1(\mathbb{T})} \leq C (\|\phi\|_{L^\infty} + \|\phi\|_*) \|f\|_{H^1(\mathbb{T})},$$

$$\|\phi f\|_{H^p(\mathbb{T})} \leq C_p (\|\phi\|_{L^\infty} + \|\phi\|_{*,p}) \|f\|_{H^p(\mathbb{T})}, \quad 0 < p < 1,$$

$$\|\phi\|_* = \sup_I \left\{ |I|^{-1} \log |I|^{-1} \inf_{c \in \mathbb{C}} \int_I |\phi(x) - c| dx \right\},$$

$$\|\phi\|_{*,p} = \sup_I \left\{ |I|^{-1/p} \inf_{\substack{\deg P \leq [1/p - 1] \\ P: \text{多項式}}} \int_I |\phi(x) - P(x)| dx \right\}.$$

ただし I は区間, $|I|$ は区間の長さである。

この命題を用いて, 次の評価が得られる:

命題 2. $\|e^{-inx} \cdot \|_{H^1(\mathbb{T}) \rightarrow H^1(\mathbb{T})} \approx \log |n| \quad (|n| \rightarrow \infty)$

$$\|e^{-inx} \cdot \|_{H^p(\mathbb{T}) \rightarrow H^p(\mathbb{T})} \approx |n|^{1/p - 1} \quad (|n| \rightarrow \infty), \quad 0 < p < 1.$$

ただし $e^{-inx} \cdot$ は掛算作用素 $f \mapsto e^{-inx} f(x)$ である。

共役関数をとる変換 (Hilbert 変換) $f \mapsto \tilde{f} \in H^2$ である。

と,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sign}(k-n) \hat{f}(k) e^{ikx} = e^{inx} H(e^{-inx} f(x))$$

の関係があるから, H から $H^p(\mathbb{T})$ ($0 < p \leq 1$) へ有界作用素がある。

と,

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{T})} \approx \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|Hf\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

ある関係を使えば、^{命題2から} 次の評価が得られる：

$$\text{命題3. } \| -i \operatorname{sign}(\cdot - n) \|_{\mathcal{M}(H^p(\mathbb{T}))} \approx \begin{cases} \log |n| & p=1 \\ |n|^{\frac{1}{p}-1} & 0 < p < 1. \end{cases}$$

\$|n| \to \infty\$ のとき,

この評価から、

$$\chi_{[n, \infty)}(k) = \begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & k < n \end{cases}$$

ある Fourier multiplier に取れば、同じく

$$\| \chi_{[n, \infty)} \|_{\mathcal{M}(H^p(\mathbb{T}))} \approx \begin{cases} \log |n| & p=1 \\ |n|^{\frac{1}{p}-1} & 0 < p < 1 \end{cases} \quad (|n| \rightarrow \infty)$$

という評価が得られる。一般の \$\mathbb{Z}\$ 上の関数 \$m(n)\$ を、

$$\begin{aligned} m(n) &= \sum_{k=-\infty}^n (m(k) - m(k-1)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (m(k) - m(k-1)) \chi_{[k, \infty)}(n) \end{aligned}$$

とあらわせば、次の定理が得られる：

定理2. $\sum_n |m(n) - m(n-1)| \log |n| < \infty \Rightarrow m \in \mathcal{M}(H^1(\mathbb{T})).$

$0 < p < 1$ のとき、 $\sum_n |m(n) - m(n-1)|^p |n|^{1-p} < \infty \Rightarrow m \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{T})).$

References

- [1] Brenner, P., The Cauchy problem for systems in L_p and $L_{p,\alpha}$, Ark. Mat. 2, no.1 (1973), 75-101.
- [2] Calderón, A. P., and Zygmund, A., On higher gradients of harmonic functions, Studia Math. 24 (1964), 211-226.
- [3] Calderón, A. P., and Torchinsky, A., Parabolic maximal functions associated with a distribution, II, Advances in Math. 24 (1977), 101-171.
- [4] Carleson, L., Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math. 22 (1976), 269-277.
- [5] Coifman, R. R., A real variable characterization of H^p , Studia Math. 51 (1974), 269-274.
- [6] Coifman, R. R., and Weiss, G., Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-645.
- [7] Fefferman, C., and Stein, E. M., H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137-193.
- [8] Ishii, H., On some Fourier multipliers and partial differential equations, Mathematica Japonicae 19 (1974), 139-163.
- [9] Latter, R. H., A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms, Studia Math. 62 (1978), 93-101.
- [10] Sjöstrand, S., On the Riesz means of the solutions of the Schrödinger equation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 24 (1970), 331-348.
- [11] Wainger, S., Special trigonometric series in k -dimensions, Mem. Amer. Math. Soc. no. 59, 1965.