

On the confluence of regular and irregular singularities

九大 理

吉田正章

§ 0 序 以下の微分方程式を考えよう。

$$(0.1) \quad x^{2(m+2)} y'' + x^{m+2} q(x) y' + p(x) y = 0$$

ここで, $q(x)$ 及び $p(x)$ は $x=0$ で正則とする. $x=0$ での特性方程式は相異なる根をもつと仮定する. それぞれの根に対応する最後の特性指数を λ, λ' とする.

方程式 (0.1) は以下の2つの方程式の極限と考えられる.

$$(0.2) \quad \prod_{j=0}^{m+1} (x - \varepsilon_j)^2 y'' + \prod_{j=0}^{m+1} (x - \varepsilon_j) q(x) y' + p(x) y = 0,$$

$$(0.3) \quad (x - \varepsilon_0)^{2(\nu+1)} (x - \varepsilon_1)^{2(m-\nu+1)} y'' + (x - \varepsilon_0)^{\nu+1} (x - \varepsilon_1)^{m-\nu+1} q(x) y' + p(x) y = 0$$

方程式 (0.2) は $x = \varepsilon_j$ ($j=0, 1, \dots, m+1$) で確定特異点をもつ. そこでの決定方程式の根を s_j, s_j' とする. 一方 (0.3) は, $x = \varepsilon_k$ ($k=0, 1$) に確定あるいは不確定特異点をもつ. もし不確定ならそこでの特性方程式は相異なる根をもつと仮定する. そこでの最後の特性指数を (確定なら決定方程式の根) λ_k, λ_k' とする.

我々は, p_j, p'_j ; λ_k, λ'_k と, λ, λ' との間に成り立つ関係を調べたい. 方程式 (0.2) において,

$$\varepsilon_j = \zeta^j a, \quad \zeta = \exp \frac{2\pi i}{m+1}$$

ならば, (0.2) の決定方程式の“和”は (0.1) の最後の特性指数の“和”に収束する. 即ち

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{m+1} (p_j + p'_j) = \lambda + \lambda'$$

なることは, Fuchs - 福原 の関係式として知られている.

このノートでは, “和”の代に “差” を問題とする.

§1. 結果 方程式 (0.3) の2つの特異点の合流に関して, 定理 1

$$\lim_{\substack{\varepsilon_0 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_1 \rightarrow 0}} \frac{\{(\lambda_0 - \lambda'_0)^2 - (\lambda_1 - \lambda'_1)^2\}^2}{2\{(\lambda_0 - \lambda'_0)^2 + (\lambda_1 - \lambda'_1)^2\}} = (\lambda - \lambda')^2$$

次に, (0.2) の $m+2$ 個の確定特異点の合流を考えよう. 順々に2つづつ合流して最終的に, 階数が $m+1$ の不確定特異点をただ一つもつ (0.1) に達する. 合流する仕方はいろいろあるが, 各段階で定理1を適用すると, その仕方に依じて, $(p_j - p'_j)^2$ と $(\lambda - \lambda')^2$ との間の関係を得る. 例えば,

定理 2

$$y_{0,1,\dots,l} := \lim_{\varepsilon_l \rightarrow 0} \frac{(y_{0,1,\dots,l-1} - y_l^{(0,1,\dots,l-1)})^2}{2(y_{0,1,\dots,l-1} + y_l^{(0,1,\dots,l-1)})},$$

$$y_{\ell}^{(0,1,\dots,\ell-1)} := \lim_{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{\ell-1} \rightarrow 0} y_{\ell}$$

とあくと

$$y_{0,1,\dots,m+1} = (\lambda - \lambda')^2.$$

とくに, $m=0, 1$ のときは, 定理2における $\lim$ を1つに出来る.

定理 3 $\Delta_j := \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_m \leq m+1} y_{j_1} \dots y_{j_m}$ とあくと,

$$m=0 \text{ のときは, } \lim_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_1^2 - 4\Delta_2}{2\Delta_1} = (\lambda - \lambda')^2$$

$$m=1 \text{ のときは, } \lim_{\substack{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \\ \rightarrow 0}} \frac{(\Delta_1^2 - 4\Delta_2)^2}{4^3 \Delta_3} = (\lambda - \lambda')^2.$$

§2 定理の証明 計算のみ故略.

References

- [1] Hukuhara : Sur la relation de Fuchs relative à l'équation diff. linéaire. Proc. Jap. Ac. Vol 34 (1958) 102 - 106.
- [2] M. Yoshida : On the confluence of regular and irregular singularities (to appear).