数理解析研究所講究録
351巻 1979年 14-21

1位の極をもつ線形全微分方程式

神大 理　髙野 恭一

§1. 序

2変数超幾何微分方程式といわれるものが14知られているが、その中で Appell の F_1, F_2, F_3 と Horn の G_2, H_2 はいづれも次の形の完全積分可能な線形全微分方程式にかける:

$$du = \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\, dh_i/h_i\right)u,$$

ここで u は複素ベクトル, h_i は $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ における斉次多項式, A_i は定数行列である。

この方程式は $\{h_i=0\}_i$ 上に1位の極をもつから、$\{h_i=0\}_i$ は確定特異点である。特異曲線 $\{h_i=0\}_i$ 上の各点の近傍で解の局所的ふるまいを調べることを問題とする。特異曲線が正規交叉であるような点の近傍においては一般解を構成する方法がわかっている([4])ので、正規交叉でない点の近傍で考える。そのような場合の reduction theorem を得るのがこの小文の目的である。

§.2、結果の説明.

局所理論であるので考える方程式は$\mathbb{C}^2$の原点で定義された次の形のものとする：

$$du = \Omega u\,,\quad \Omega = \sum_{\mu=1}^{m} A_\mu(x)\, dh_\mu / h_\mu + H\,,$$

ここで $A_\mu(x)$ は各成分が原点の近傍Uで正則な行列，H は各成分がUで正則な1-formである行列，$h_\mu(x)$ は $h_\mu(0)=0$, $dh_\mu(0)\neq 0$ なるUで正則な関数とする。

$$S = \bigcup_{\mu=1}^{m} S_\mu\,,\qquad S_\mu = \{\, x\in U \mid h_\mu(0)=0 \,\}$$

とおく。 $S_\mu \cap S_\nu = \{0\}$ ($\mu\neq\nu$) と仮定してよい。

このような Ω に対して各 S_μ における residue が

$$\mathrm{Res}_{S_\mu}\Omega = A_\mu(x)\big|_{S_\mu}$$

と定義できる。これは S_μ 上で正則である。(residue が正則なものだけを考えている訳で、斎藤恭司氏の理論からみると問題がある。しかし序で述べた具体的な方程式には適用できるということ、また以下の話では'固有値条件'がつきまとい、固有値条件のもとではこのようなものに限ってよいのでここでは一応これで満足したことにしておく。)

さて何回か blow up して $\{S_\mu\}_{\mu=1}^{m}$ が正規交叉になるようにする。blow up の合成を σ とかこう。$\sigma^{-1}(S)$ を既約成

分に分解して

$$\sigma^{-1}(S) = S' = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} S'_\mu,$$

$\sigma(S'_\mu) = S_\mu$, $1 \le \mu \le m$, とかく。 $S'_\mu, m+1 \le \mu \le m+n$ を例外曲線とよぶ。

$\sigma^*\Omega$ に対しても各 S'_μ における residue $\mathrm{Res}_{S'_\mu}\sigma^*\Omega$ が定義できる。これも S'_μ 上正則である。例外曲線はコンパクトだから

$$\mathrm{Res}_{S'_\mu}\sigma^*\Omega \quad , \; m+1 \le \mu \le m+n,$$

は定数行列である。すぐにわかるようにこれは $A_1(0), \cdots,$ $A_m(0)$ の非負整数係数の1次結合になっている。

定数行列 A のどの固有値の差も0以外の整数に等しくないとき、Aは'固有値条件'をみたすということにすると、主要定理は次のように述べることができる。

<u>定理</u>　完全積分可能な2つの線形全微分方程式

(1)　$du = \Omega u$, $\Omega = \sum_{\mu=1}^m A_\mu(x)\,dh_\mu/h_\mu + \textcircled{H}$,

(2)　$dv = \hat{\Omega} v$, $\hat{\Omega} = \sum_{\mu=1}^m \hat{A}_\mu(x)\,dh_\mu/h_\mu + \hat{\textcircled{H}}$

が与えられたとする。ここで $A_\mu(x)$, $\hat{A}_\mu(x)$ は Uで正則な行列, $\textcircled{H}$, $\hat{\textcircled{H}}$ は各成分が Uで正則な 1-forms である行列とし、さらに

(i)　$A_\mu(0) = \hat{A}_\mu(0)$　　, $1 \le \mu \le m$

(ii)　$A_\mu(0)\,(= \hat{A}_\mu(0))$, $1 \le \mu \le m$, $\mathrm{Res}_{S'_\mu}\sigma^*\Omega\,(= \mathrm{Res}_{S'_\mu}\sigma^*\hat{\Omega})$,

$m+1 \le \mu \le m+n$, はいずれも'固有値条件'をみたすとする。このとき U において正則, 可逆な $P(0)=I$ なる行列 $P(x)$ が存在して

$$u = P(x)v$$

により (1) は (2) に変換される。さらにこのような $P(x)$ は一意的である。

<u>注意1.</u> $S = \cup S_\mu$ が次のような性質をもっているとする。i.e.

$du = (\sum A_\mu(x) dh_\mu / h_\mu + H)$: 完全積分可能

$\Rightarrow$ $du = (\sum A_\mu(0) dh_\mu / h_\mu) u$: 完全積分可能。

このような S に対しては上の定理はただちに reduction theorem にかきかえられる。このような S の例はいくらでもあるが例えば

$$S = \{xy(y-x^2) = 0\}$$

もそうである。S が超平面(ここでは直線)の族のときもそうであるので [3] の定理は上の定理の系となる。それをかくと、

<u>系</u> (1) において $h_\mu(x)$, $1 \le \mu \le m$, は x の斉1次式とする。$A_\mu(0)$, $1 \le \mu \le m$, $\sum_{\mu=1}^{m} A_\mu(0)$ が'固有値条件'をみたすならば、U で正則, 可逆, $P(0)=I$ なる $P(x)$ が存在して

$$u = P(x)v$$

により (1) は

$$dv = \left(\sum_{\mu=1}^{m} A_\mu(0)\, dh_\mu / h_\mu\right) v$$

に変換される。

注意2. [3] においては S が超平面の族であることを用いているので仮定は少し弱く、$A_\mu(0)$, $1 \le \mu \le m$, についての'固有値条件'はいらなかった。

§3. 補題.

定理の証明に用いる補題を述べておく。[4] の計算を忠実に追えばえられる。

補題. $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍 U で定義された完全積分可能な方程式

(3) $$du = \left(\sum_{j=1}^{2} A_j(x)\, dx_j / x_j\right) u$$

(4) $$dv = \left(\sum_{j=1}^{2} \hat{A}_j(x)\, dx_j / x_j\right) v$$

が与えられたとする。ここで $A_j(x)$, $\hat{A}_j(x)$ は U で正則な行列で、

$$A_1(0, x_2) = \hat{A}_1(0, x_2) = \text{定数行列}.$$
$$A_2(0, x_2) = \hat{A}_2(0, x_2)$$

かつ $A_1(0, x_2)$ $(= \hat{A}_1(0, x_2) = A_1(0, 0) = \hat{A}_1(0, 0))$, $A_2(0, 0)$ $(= \hat{A}_2(0, 0))$ は'固有値条件'をみたすとする。とすると U で正則, 可逆, $P(0) = I$ なる行列 $P(x)$ が存在して

$$u = P(x) v$$

により(3)は(4)に変換される。しかもこのような$P(x)$は一意的にきまる。

§4. 定理の証明の概略

$$V = \sigma^{-1}(U)$$

とおく。Vの開被覆 $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$ を次のようにとる：
(i) V_α は単連結，(ii) V_α は高々２つの特異曲線と交わり少なくとも１つの例外曲線と交わる。さらにV_αの局所座標 $y^\alpha = (y_1^\alpha, y_2^\alpha)$ をV_αと交わる特異曲線が座標軸と一致するようにとる。

容易にわかるように $\sigma^*\Omega$, $\sigma^*\hat{\Omega}$ はV_αにおいて

$$\sigma^*\Omega = \sum_{j=1}^{2} B_j^\alpha(y^\alpha)\, dy_j^\alpha / y_j^\alpha,$$
$$\sigma^*\hat{\Omega} = \sum_{j=1}^{2} \hat{B}_j^\alpha(y^\alpha)\, dy_j^\alpha / y_j^\alpha,$$

$B_j^\alpha(y^\alpha)$, $\hat{B}_j^\alpha(y^\alpha)$ はV_αで正則，とかける。さらに次のことも確められる。$\{y_j^\alpha = 0\}$ = 例外曲線 $S'_{m+\nu_\alpha}$ ならば、

$$B_j^\alpha(y^\alpha)\Big|_{y_j^\alpha=0} = \hat{B}_j^\alpha(y^\alpha)\Big|_{y_j^\alpha=0} = \mathrm{Res}_{S'_{m+\nu_\alpha}} \sigma^*\Omega = \mathrm{Res}_{S'_{m+\nu_\alpha}} \sigma^*\hat{\Omega},$$

$\{y_j^\alpha = 0\} = S'_{\mu_\alpha}$, $1 \le \mu_\alpha \le m$, ならば

$$B_j^\alpha(y^\alpha)\Big|_{y_j^\alpha=0} = \hat{B}_j^\alpha(y^\alpha)\Big|_{y_j^\alpha=0}, \quad B_j^\alpha(0) = \hat{B}_j^\alpha(0) = A_{\mu_\alpha}(0).$$

開被覆 $V=\bigcup_{\alpha} V_\alpha$ のとり方より，$\{y^\alpha_{d\alpha}=0\}$ が例外曲線であるとすると，上の考察より§3の補題が適用できて，V_α で正則，可逆，$P_\alpha(y^\alpha)\Big|_{y^\alpha_{d\alpha}=0} = I$ なる行列 $P_\alpha(y^\alpha)$ が存在して

$$u = P_\alpha(y^\alpha)v$$

は $\sigma^*\Omega$ を $\sigma^*\hat{\Omega}$ に変換する。従って $V_\alpha \cap V_\beta\ (\neq \phi)$ において

$$P_\alpha(y^\alpha) = P_\beta(y^\beta)$$

がいえれば定理の証明は完了することになる。それには，$V_\alpha \cap V_\beta$ と交わる例外曲線を $S'_{m+\nu_{\alpha\beta}}$ とおいて，$V_\alpha \cap V_\beta$ において $\sigma^*\Omega$，$\sigma^*\hat{\Omega}$ がどのような形でかけるかを見て，$P_\alpha(y^\alpha)\Big|_{S'_{m+\nu_{\alpha\beta}}} = P_\beta(y^\alpha)\Big|_{S'_{m+\nu_{\alpha\beta}}} = I$ に注意すると

補題の一意性から $P_\alpha(y^\alpha) = P_\beta(y^\alpha)$ をいえばよい。

References

[1] Gérard, R., Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe, J. Math. Pures Appl., 47 (1968), 321-404.

[2] Gérard, R. et A.H.M. Levelt, Sur les connexions a singularités régulières dans le cas de

plusieurs variables, Funkcial. Ekvac. 19 (1976), 149 – 173.

[3] Takano, K., Reduction theorem for a linear Pfaffian system with regular singular points (to appear).

[4] Yoshida, M. and K. Takano, On a linear system of Pfaffian equations with regular singular points, Funkcial. Ekvac. 19 (1976), 175 – 189.