数理解析研究所講究録
352巻 1979年 136-147

Lefschetz formula and local invariants

東大 理　　井上 尚夫

MをコンパクトC^∞級多様体，fをMのC^∞級self-mapとする。このときfのLefschetz数$L(f)$が

$$L(f)=\sum(-1)^p \operatorname{tr} H^pf.$$

H^pf：Mのp-th de Rhamコホモロジー群$H^p(M)$にfの導入するmap.

で定義される。fの不動点集合$Fix(f)$の連結成分の数が有限個であるとすると、良く知られているように、各成分Nに対し、実数$I(f:N)$が対応し、$L(f)$は$I(f:N)$の和として表わされる。ここでは、Kotake [4]によるLefschetz数の解析的表現を用いて、$I(f:N)$を具体的に決定する事を考える。

§1. 準備

[1] 仮定.　$Fix(f)$に対して次の仮定をおく。

1) $Fix(f)$の各連結成分Nは、コンパクト部分多様体で、次の1つを満たす。

(C-1)　$N \cap \partial M = \phi$　　$\partial N = \phi$

(C-2)　$N \cap \partial M = \partial N$，交わりは transversal

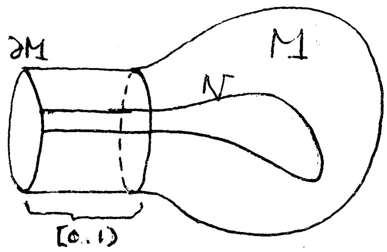
(C-3)　$N \subset \partial M$　　$\partial N = \phi$

2)　Nの normal bundle $TN^{\perp}$に dfによって導かれる線形写像を$df^{\perp}$としたとき、$I-df^{\perp}$は non-singular.

2)の条件により $\mathrm{Im}(I-df_x) = V_x$　$(x \in N)$　とおくと、V_xはT_xNの　df-不変な補空間となる。この事からMのリーマン計量Gで次の条件を満たすものがとれる。

1)　$V_x \oplus T_xN = T_xM$　直交直和

2)　$\partial M \times [0,1)$が等長的に埋め込まれる。((C-2)の時は $\partial N \times [0,1)$も同じように埋め込まれる)



以下Gとしては、このようなものだけを考える。

[2]. 解析的表現，　ξを∂Mの内向き単位法線ベクトル，νをその双対1-形式とする。　$\Lambda^*M = \{M$上 C^∞-級 forms$\}$の境界作用素 $N : \Lambda^*M \longrightarrow \Lambda^*M|_{\partial M}$を次で定義する。

$N(\omega) = \nu \wedge i_\xi \omega$.

$\forall p$-form. φ_0に対して 次の放物型初期値境界値問題を考えよう。但し $\Delta_p = d\delta + \delta d : \Lambda^pM \longrightarrow \Lambda^pM$, とする。

$$(*)\begin{cases} (\Delta_p + \frac{d}{dt})\,\varphi(x, t) = 0 & \text{on } M\times(0,\infty) \\ N(\varphi(\cdot\ t)) = N(d\varphi(\cdot\ t)) = 0 & \\ \lim_{t\to 0} \varphi(\cdot\ t) = \varphi_0 & \end{cases}$$

$(*)$は Greiner [3] の意味で p-elliptic であり、基本解 $e^p(t;x,y)$ の存在及び一意性が成立する。また $h_p = \{\omega \in \Lambda^p M,\ \Delta_p\omega = 0\ N(\omega)=0\ N(d\omega)=0\}$ とおくと、h_pは de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ と同型になる。以上の事から、Hodge 分解により次の補題が成立する。

補題（Kotake [4]）

$\Phi_p(x) = f^* : \Lambda^p T^*_{f(x)}M \longrightarrow \Lambda^p T^*_x M$. とおく。この時

$$L(f) = \int \Sigma(-1)^p \operatorname{tr} \Phi_p(x)\, e^p(t; f(x), x)\, dvol_M.$$

[3] $e^p(t;x,y)$ を次の二つの項に分ける。

$$e^p(t;x,y) = E^p(t;x,y) + C^p(t;x,y)$$

$E^p(t;x,y) :=$ M の double における $\Delta_p + \frac{d}{dt}$ の基本解.

$C^p(t;x,y) :=$ 補正項 .

$Fix(f)$ の各連結成分の tubular neighbourhood を互いに交わらないようにとり、disk に分割する；

$$(Tub(N) = \bigcup_{x\in N} D_x, \qquad T_x D_x = V_x.$$

▨ $N\times(0,\infty)$ 上の関数 P を次で定義する。

$$P(x;t) \overset{\text{def}}{=} \int_{D_x} \Sigma(-1)^p \operatorname{tr} \Phi_p(x)\, E^p(t; f(x), x)\, dv_{D_x}.$$

◎ Nが(C-3)をみたすとき. $N \times (0,\infty)$ 上の関数Qを.

$$Q(x;t) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \int_{D_x} \sum (-1)^{p+r} \Phi_p(x)\, C^p(t; f(x), x)\, dv_{D_x}..$$

で定める。

P, Qに関して次が成立する。

定理.
$$P(x;t) = \begin{cases} \mathrm{sign}(\det(I - df^{\perp}))\, E_n + O(t^{\frac{1}{2}}) & N.\ (C\text{-}1), (C\text{-}2)\ \text{のとき}, \\ \frac{1}{2}\mathrm{sign}(\det(I - df^{\perp}))\, E_n + O(t^{\frac{1}{2}}) & N:\ (C\text{-}3)\ \text{のとき}. \end{cases}$$

$$Q(x;t) = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(\det(I - d\tilde{f}^{\perp}))\, E_n + O(t^{\frac{1}{2}})$$

ここで $df^{\perp}$ は $N \subset \partial M$ の normal bundle に導入される線形写像をあらわす。また. E_n は. Euler多項式で次により定義される。

$$E_n = \begin{cases} 0 & n:\ \text{odd}. \\ *\,(-1)^{k-1} \dfrac{1}{2^n \pi^k k!} \displaystyle\sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)\, \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)} & n = 2k. \end{cases}$$

//

この定理と. E^p, C^p についての良く知られた評価式,

$$|E^p(t; x, y)| \leq C t^{-\frac{m}{2}} e^{-\delta \rho(x,y)^2/t} \qquad \rho(x,y) = \text{distance between } x \,\&\, y.$$

$$|C^p(t; x, y)| < C t^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\delta\left(\rho(x, \partial M)^2 + \rho(y, \partial M)^2 + \rho(x,y)^2\right)/t\right)$$

により. $I(f;N)$ は次のように表わせる。

(C-1) $\displaystyle I(f;N) = \int_N \mathrm{sign}(\det(I - df^{\perp}))\, E_n\, dvol_N = \mathrm{sign}(\det(I - df^{\perp}))\chi(N)$

(C-2) $\displaystyle I(f;N) = \int_N P(x;t)\, dvol_N + \int_{\partial N} Q(x;t)\, dvol_{\partial N} + O(t^{\frac{1}{2}})$

$$= \mathrm{sign}(\det(I - df^{\perp}))\tfrac{1}{2}\left(\chi(\text{double of } N) + \chi(\partial N)\right)$$

$$= \mathrm{sign}(\det(I - df^{\perp}))\, \chi(N)$$

$$
\begin{aligned}
\text{(C-3)}\quad I(f:N) &= \int_N P(x;t)\,dvol + \int_N Q(x;t)\,dvol + O(t^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{sign}(\det(I-df^{\perp})) + \mathrm{sign}(\det(I-d\tilde{f}^{\perp}))\right)\chi(N) \\
&= \begin{cases} \mathrm{sign}(\det(I-df^{\perp}))\,\chi(N) & \text{if } \nu(f_*^{\perp}\xi)<1 \\ 0 & \text{if } \nu(f_*\xi)>1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

§2 証明

以下、(C-1) の場合のみ考える。他の場合にも、ほとんど同様な議論が使える。

[1] local invariants.

index について次の約束をしておく。

$$
\begin{cases}
1\leq a,b\leq m. \quad 1\leq i,j\leq n. \quad n+1\leq u,v\leq m(=n+d) \\
\alpha,\beta\cdots \ 1\sim m \text{ までの multi index},\ \mu,\nu\cdots\ n+1\sim m \text{ までの multi-index}.
\end{cases}
$$

$\mathcal{P}^{n,d}$ を次の様な形式的変数と、relation を持った、多項式環とする。

1) $g_{ab/\alpha}$ $\qquad g_{ab/\alpha}=g_{ba/\alpha} \quad g_{iu}=0$

2) $f^a_{b/\mu}$ $\qquad f^i_j=\delta_{ij} \quad f^i_{j/u}=f^u_i=f^i_u=0 \quad f^a_{u/\mu}=f^a_{v/\nu}$ if. $(u,\mu)=(v,\nu)$.

3) $g,\ g^{-1},\ g_0,\ g_0^{-1}$ $\qquad g^2=\det(g_{ab}) \quad g_0^2=\det(g_{ij})$

4) J $\qquad J^2(\det(I-f^u_v))^2=1$

$\mathcal{P}^{n,d}$ の次数を $\mathrm{ord}(g_{ab/\alpha})=|\alpha|$ $\mathrm{ord}(f^a_{b/\mu})=|\mu|$ で定義する。

局所座標系 $(U,\ X=(x^1,\cdots,x^m))$ で

$N\cap U=\{x^{n+1}=\cdots=x^m=0\}$

$D_x \cap U = \{x^1, \cdots, x^n \ 一定\} \quad {}^\forall x \in N \cap U$

となるものをとろう。$\mathcal{S}^{nd}$ の元 P に対して実数値 $P(G, f, X)(x)$ が自然に定まる。任意の G, f (§1 [1]の仮定をみたす) に対して、この値が X のとり方に依らない時、P を不変多項式と呼ぶ。不変多項式の次数については、次の特徴づけができる。

補題　不変多項式 P が、次数 k 斉次多項式である為の必要十分条件は、$P(\alpha^2 G, f) = \alpha^{-k} P(G, f)$ が成立する事である。

[2] 漸近展開式

命題　$P(x; t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(G, f)(x)\, t^{\frac{k-n}{2}} + O(t^{\frac{1}{2}})$

P_k は、次数 k 斉次不変多項式である。

証明 (outline)

Step 1.　Parametrix を、Δ_p の symbol から構成する。

Step 2.　$\tau w^u = x^u - f^u(x)$ なる変数変換を行い、Taylor 展開が可能な事を確かめる。

Step 3.　§2 [1] での補題を使って斉次多項式である事を導く。

注)　漸近展開式の係数は、D_x の大きさには依存しない。従って、D_x を十分小さくとる事により、局所的に構成した parametrix で、基本解を近似できる。

[3] 補題を2つ準備する。

補題，$(M_i\ f_i\ N_i)_{i=1,2}$，を §1 [1] の仮定をみたす多様体、

写像、不動点集合の連結成分達とする。このとき、$M_1 \times M_2$ に product 計量を入れると、$^\forall x_1 \in N_1$ $^\forall x_2 \in N_2$ に対して次が成り立つ。

$$P((x_1, x_2); t) = P(x_1; t)\, P(x_2; t)$$

証明; $e^p_{M_1 \times M_2}(t; (x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sum_{q+r=p} e^q_{M_1}(t; x_1, y_1) \otimes e^r_{M_2}(t; x_2, y_2)$
より、$P(x; t)$ の被積分関数が、積の形になる。 □

補題、$x \in N$ の近傍が、$(U^{m-1} \times I, G_0 \times 1)$ と等長的で、f も $(f_0 \times id)$: $(f_0 : U^{m-1} \longrightarrow U^{m-1})$ と表わされたとすると、

$$P_k(G, f)(x) = P_k(G_0 \times 1, (f_0 \times id)) = 0.$$

証明 前の補題と、$e^0_I(t; x, x) - e^1_I(t; x, x) = 0$ より明らか。 □

(但し上で 1 は 区間 I 上の flat metric を表わす。)

(N-D) 座標 X に関して、G の成分が $x \in N$ において次の様に表わされるとしよう。

$$g_{ij/a}(x) = 0 \quad g_{uv/a}(x) = 0 \quad g_{iu/j}(x) = 0 \quad g_{ab}(x) = \delta_{ab}.$$

このような座標は、実際 N の normal coordinate と $TN^\perp$ の parallel frame によって実現できる。以下このような座標のみ考え、P_k を次の様な変数の多項式とみなす。

$$\{ g_{ab/\alpha} \ |\alpha| \geq 2,\ g_{iu/v} \quad f^a_{b/\mu} \ |\mu| \geq 2 \quad f^i_{u/v}\ f^u_{i/v}\ f^u_{v/w}\ f^u_v,\ J \}$$

このような変数の単項式 A に対して

$$\deg_i(A) = \{ A \text{に現われる index } i \text{ の数} \}$$

とおく。その時、P_k の任意の単項式 A に対して次の主張が

成り立つ。

主張 1)　$deg_i(A)$ は偶数

証明：座標変換　$X=(x^1,\cdots\cdots x^m) \longrightarrow X_i=(x^1,\cdots,-x^i,\cdots x^m)$
を行うと　$A(G,f,X)(x)$ は $(-1)^{deg_i(A)}A(G,f,X_i)(x)$ に変換される。P_k の座標変換による不変性から $deg_i(A)$ が奇数となる項は含まれない。□

主張 2)　$deg_i(A)\geqq 1$　for　$1\leqq {}^\forall i\leqq n$

証明　$deg_1(A)\geqq 1$ をいう。P_k を次のように2つの多項式に分ける。

$$P_k = P_k' + P_k'' \qquad P_k' = \{deg_1(A)\geqq 1 \text{ となる項の和}\}$$
$$P_k'' = \{deg_1(A)=0 \text{ となる項の和}\}$$

$P_k''=0$ が言えればよい。計量と写像として、補題で考えたもの、$G_0\times 1$, $f_0\times id$ をとろう。また座標系として　x^1 が I の座標 $x^2\cdots\cdots x^m$ が U の座標となるようにとる。明らかに

$$0 = P_k(G_0\times 1,\ f_0\times id) = P_k''(G_0,\ f_0)$$

が成立する。但し、ここで P_k'' を $\mathcal{P}^{n+1,d}$ の元とみている。relation の入れ方から、$P_k''=0$ となり、主張が成立する。□

Aは一般に次のような形にあらわされる。

$$A = J^h \underbrace{f^i_{j/\mu}\cdots}_{P_1\text{コ}} \underbrace{f^i_{u/\mu}\cdots}_{P_2\text{コ}} \underbrace{f^u_{i/\mu}\cdots}_{P_3\text{コ}} \underbrace{f^u_{v/\mu}\cdots}_{P_4\text{コ}} \underbrace{g_{ij/\alpha}\cdots}_{P_5\text{コ}} \underbrace{g_{iu/\beta}\cdots}_{P_6\text{コ}} \underbrace{g_{uv/\gamma}\cdots}_{P_7\text{コ}}$$

前の2つの主張から

$$2n \leqq \sum_{i=1}^{n} \deg_i(A) \leqq 2P_1 + P_2 + P_3 + 2P_5 + P_6 + \Sigma|\alpha| + \Sigma|\beta| + \Sigma|\gamma|$$
$$\leqq \mathrm{ord}(A) + 2P_5 + P_6 \leqq n + 2P_5 + P_6 .$$

を得る。ゆえに、

$$n \leqq 2P_5 + P_6 \leqq \mathrm{ord}(A) \leqq n.$$

$P_k \equiv 0$ $(k<n)$ が証明された。$k=n$の場合、上で全て等号が成立する事から、

$$A = J^{k} f^{u}_{v} \cdots\cdots g_{ij/kl} \cdots \cdots$$

という形になる。$T=df_x$ とおき、$N\times D$ ($D=d$次元 flat disk) の上の写像 $\mathrm{id}\times\tilde{T} : N\times D \longrightarrow N\times D$ を考える。Aの形をみれば

$$P_n(G, f)(x) = P_n(G_0\times 1, \mathrm{id}\times T)(x) \qquad (G_0\times 1,\ N\times D\text{の計量})$$

となる。Pについての積公式と、$k<n$ で P_k が消える事から、右辺は、$P_m(G_0, \mathrm{id})(x)\, P_0(1, T)(0)$ と一致する。このそれぞれの値に関しては、Patodi [5], Atiyah-Bott [1] によって計算できる。(証明終)

§3 注意、

[1] 境界の補正項について、

計量を∂Mの近傍で直積の形にした事から、Mにおける、§1の境界値問題と、$\partial M\times[0,\infty)$ の対応する境界値問題とのそれぞれの補正項は、∂Mの近傍では、十分近い値をとる。漸近

展開の係数は D_x の大きさにはよらないので，我々は，後者の補正項を $C^p(t;x,y)$ の近似として用いる事ができる。§1[2]の境界値問題は，0-form に対しては，Neumann問題，top-form に対しては，Dirichlet問題になる。ゆえに，$C^p(t;x,y)$ の近似として

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-(x^m+y^m)^2/4t\right) e^p_{\partial M}(t;x_0,y_0) \oplus \{-e^{p-1}_{\partial M}(t;x_0,y_0)\}$$

$$x=(x_0,x^m) \qquad y=(y_0,y^m)$$

を用いる事ができる。§2[2]の命題は，以下ほとんど同様にして証明できる。[3]の議論も同様である。

結局，次の場合だけを考えれば十分になる。

$f=id$ の場合，

$$\sum(-1)^p \operatorname{tr} e^p(t;x,x) = \sum(-1)^p \operatorname{tr} C^p(t;x,x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x^m)^2/t} \sum(-1)^p \operatorname{tr} e^p_{\partial M}(t;x_0,x_0) + O(e^{-c/t})$$

$\sum(-1)^p \operatorname{tr} e^p_{\partial M}(t;x_0,x_0) = E_n(x_0)$ であるから，

$$Q_k(G,id) = \begin{cases} 0 & k<n \\ \frac{1}{2}E_n(x_0) & k=n \end{cases}$$

G : $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x^{n+1} \geq 0\}$ の flat metric，$f: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$，原点 0 を fixed pt としてもつとする。さらに

$d\tilde{f}_0 = \{f^a_b\}$ $1 \leq a,b \leq n$，が 1 を固有値として持たない時

$$Q_0(G,f)(0) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\det(I-d\tilde{f}_0)),$$

df_0 が 1 を固有値として持たないとき，

$$P_0(G,f)(0) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\det(I-df_0))$$

[2] 他の楕円型複体の場合

◦Signature complex : Donnely-Patodi [2] が我々と同様な方法で解析的に G-signature theorem の証明を与えている。この場合 f が isometry であるので D_x として f で不変なものがとれ、f の高階の微分を消す事ができる。

◦Dolbeault complex : Toledo-Tong [6] が N:複素部分多様体, $I-df^{\perp}$ 非特異という条件で、$I(f:N)$ を決定している。しかし、彼らは、熱方程式を用いていない。この場合に不変式の立場から解析的な証明を与える事は一つの問題であると思われる。

文　献

[1] M.F. Atiyah and R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, I, Ann. of Math. 86 (1967), 374-407.

[2] H. Donnely and V.K. Patodi, Spectrum and the fixed point sets of isometry, II, Topology 16 (1977), 1-11.

[3] P. Greiner, An asymptotic expansion for the heat equation, Arch. Rational Mech. Anal. 41 (1971), 163-218.

[4] T. Kotake, The fixed point theorem of Atiyah-Bott via parabolic operators, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), 789-806.

[5] V.K. Patodi, Curvature and eigenforms of the Laplace operator, J. Differential Geometry 5 (1971), 233-249.

[6] D. Toledo and Y. L. Tong, Duality and intersection theory in complex manifolds, II, Ann. of Math. 108 (1978), 519-538.

[7] H. Inoue, Lefschetz formula for higher dimensional fixed point sets. 修士論文. 東大. 1979年.