

Title	(M,g)のLaplacianの固有値について (幾何学と大域解析学)
Author(s)	丹野, 修吉
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 352: 51-61
Issue Date	1979-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/104399
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

(M, g) の Laplacian の固有値について

東北大 理 丹野 修吉

膜の振動 $F(x, t)$ は本来双曲型の方程式で与られるが、pure tone については $F(x, t) = u(x) e^{i\omega t}$ であって、 u は Laplacian Δ の固有関数である。従って Riemann 多形体 (M, g) 又はその領域 D について (境界条件 $u=0$)、 Δ の固有値、固有関数についての研究は "音" と "形" という Bers-Kac による興味ある表現の下に進展があり、"固有値" と " M 又は D の幾何的構造" との関係についての分野には現在幾多の知識が蓄積されつつある。

歴史的には物理学者 Lorentz による予想 " E^2 の領域 D の λ 以下の Δ の固有値の数 $N(\lambda)$ と λ の比の $\lambda \rightarrow \infty$ のときの極限值は D の面積によって決まる。" そして Weyl によるその肯定的証明が第一歩とされている。つまり音としての $\text{Spec}(D)$ から形としての面積が読みとれたわけである。

$N(\lambda)$ と λ についての比の $\lambda \rightarrow \infty$ での動きは Tauberian 定理

~~~~ Abel型定理により、 $\{\lambda_k\} = \text{Spec}(M)$  or  $\text{Spec}(D)$  に対し、 $Z(t) = \sum e^{-\lambda_k t}$  の  $t \downarrow 0$  での動きに反映される。McKean-Singerの一定理の特別な場合として“ $E^3$ の有向曲面  $M$ の領域  $D$ が  $r$ 個の穴をもち境界  $\partial D$ は滑らかとするとき

$$Z(t) \sim |D|/4\pi t - |\partial D|/4\sqrt{4\pi t} + (1/16\pi) \int_D S + (1-r)/12 \quad t \downarrow 0$$

が成立つ。”このことは  $M$ が特に  $E^2$ なら、 $\text{Spec}(D)$ から、面積、周長、穴の数が読みとれることを示している。

次に  $M$ がコンパクトの場合 “ $\text{Spec}(M) = \text{Spec}(S^m(1))$ , 定曲率1) なら  $(M, g) = (S^m(1))$  か?” は  $m \leq 6$  なら正しいが、 $m \geq 7$  については現在不明で私にとっては最も基本的な問題である。 $\text{Spec}(S^m(1))$ の特性をどこに求めるかはいろんな理由で複雑らしく、例えば  $S^m(1)$ の第一固有値の重複度は  $m+1$ で十分多いのだが、重複度が  $m+1$ より大なる例もある。

Herschの定理は  $S^2$ の任意の計量  $h$  に対し  $(S^2, h)$ の第一固有値  $\lambda_1(h)$  と体積の積について  $\lambda_1(h) \text{Vol}(S^2, h) \leq 8\pi$  (等号成立  $\Leftrightarrow h$ : 定曲率) を示し、この  $m$ 次元化 (一般化)  $\lambda_1(h) \text{Vol}(M, h)^{2/m} \leq k(M)$  ( $= M$ から定まる定数) が問題となったが、あるコンパクト Lie 群での蒲川による反例により一般には不成立となった。 $M = S^{2n+1}$ に限ってもそのような  $k(M)$  は存在しない。この状況について具体的に説明したい。

### §1. 命題 A.

$(S^m, g_0)$  を定曲率計量  $g_0$  をもつ  $m$  次元球面とする。

問題 (\*).  $(M, g)$  をコンパクト Riemann 多様体とするとき、

$\text{Spec}(M, g) = \text{Spec}(S^m, g_0)$  なら  $(M, g)$  は  $(S^m, g_0)$  に等長的であるか?

Spectrum の数学としての重要性は明らかとして、微分幾何学 proper としての重要性に関して、一つのバロメータ的意味をこの問題はもっている。

今までの部分的解答は次の通りである。

- (i)  $(M, g)$  が Einstein なら (\*) は正しい。 (Obata, Sakai)
- (ii)  $m \leq 6$  なら (\*) は正しい。 (Berger,  $m=2,3$ , Tanno,  $m=4,5,6$ )
- (iii)  $(M, g)$  が共形的平坦かつスカラー曲率  $S$  が一定なら、(\*) は正しい。

今回の話の中心は次の命題の証明のメカニックを簡単に説明することである。  $S$ -foliated 多様体は §2 で定義するが、これは奇数次元球面を含むある Riemann 多様体の class に属するものである。

命題 A.  $(M, g)$  をコンパクトな  $S$ -foliated 多様体とする。もし次元  $m \leq 13$  なら (\*) は正しい。

## § 2. S-foliated 多様体.

$T$  を  $(M, g)$  での curvature-like テンソルとする、つまり  $T$  は (1.3) 型で、曲率テンソル  $R$  のみならず基本関係式 (カー Bianchi の式を含む) と同じ形の式のみならずものである。基本的な例は、 $k$  を実数として

$$Z = Z_k : Z(X, Y)W = R(X, Y)W - k(g(Y, W)X - g(X, W)Y)$$

なるものである。nullity 理論は  $T$  についての理論であるが、ここでは  $T = Z_k$  についてのみ話をする。

$(M, g)$  のベクトル場  $W$  が  $k$ -nullity ベクトル場とは

$$Z_k(X, Y)W = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

をみたすことである。幾何学的には、 $W$  から見て  $(M, g)$  は定曲率  $k$  の空間のように見えることを意味している。

$$N_p = \{ Y \in M_p ; Z_k(X, Y) = 0, \forall X \in M_p \}$$

は  $M$  の点  $p$  での接空間  $M_p$  の線形部分空間であり、 $p \rightarrow N_p$  は  $k$ -nullity 分布と呼ばれる  $\langle \text{Chern-Kuiper-Otsuki} \rangle$ 。

$p \rightarrow \dim N_p = \nu(p)$  は上半連続で

$$G = \{ p \in M ; \nu(p) = \min \nu \}$$

は open in  $M$  で nullity 理論上重要な役割をもっている。

定義.  $(M, g)$  が S-foliated 多様体とは  $(M, g)$  に一次元の foliation があつて

(i) 十分小なる各開集合  $U$  に対し、foliation に接する単

位ベクトル場  $W_U$  on  $U$  が Killing ベクトル場なること。

(ii) その  $W_U$  は 1-nullity ベクトル場であること。

奇数次元球面  $(S^{2m+1}, g_0)$  は Hopf fibration から決まる foliation について  $S$ -foliated 多様体である。

一般に佐々木多様体はすべて  $S$ -foliated 多様体である。特に、すべての leaf が同じ長さをもち、商空間  $M/(\text{leaf})$  が可符号なら、 $M$  は Hodge 多様体上の自然な  $S^1$ -主バンドルである。

尚、 $S$ -foliated 多様体は常に奇数次元である。

### §3. 証明の outline

$\text{Spec}(M, g) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\}$  に対する Minakshisundaram-Pleijel の漸近展開式

$$\sum e^{-\lambda_j t} \sim (4\pi t)^{-m/2} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots) \quad t \downarrow 0$$

において、 $m \leq 11$  なら  $a_2$  まで、 $m = 13$  のときは  $a_3$  まで必要である：

$$a_0 = \text{Vol}(M, g),$$

$$a_1 = (1/6) \int S,$$

$$a_2 = (1/6!) \int [2|R|^2 - |\text{Ric}|^2 + 5S^2].$$

ここに、 $\text{Ric}$  は Ricci テンソルを表し、 $|R|^2 = R_{ijkl} R^{ijkl}$ 。

要点は  $g, R, \text{Ric}, S$  を用いて  $M$  上の関数  $B, G$  を非負：

$$B = B(g, R, Ric, S) \geq 0,$$

$$G = G(g, R, Ric, S) \geq 0$$

なるように定義し、 $B, G$  は  $(M, g) = (S^{2n+1}, g_0)$  のとき、特別な値、例えば 0、をとり、かつ、 $a_2$  の  $\int$  の中が  $B, G, S$  で表わしきれないようにすることである。結局

$$B = |R|^2 - (8/(n+2))|Ric|^2 + (2/(n+1)(n+2))(S+2n)^2 + 16(S+2n) - 28n^2 - 28n,$$

$$G = |Ric|^2 - (1/2n)(S+2n)^2 + 4(S+2n) - 4n^2 - 8n$$

と定めればよいことがわかる。これらの式は  $M$  の局所的な fibering から定められる意味で自然なものである。

つまり、 $a_2(M) = a_2(S^{2n+1})$  は

$$\int_M \left[ 2B + \frac{2(6-n)}{n+2} G + (S \text{ の 2 次式}) \right] = \int_{S^{2n+1}} [S_0 \text{ の 2 次式}]$$

となる。これは、 $(S^{2n+1}, g_0)$  のとき  $B_0 = G_0 = 0$  なるからである。同じ体積をもつこと ( $a_0(M) = a_0(S^{2n+1})$ ) と  $\int S = \int S_0$ 、更に、Schwarz の不等式から  $B = G = 0$  on  $M$  が  $6 < n$  のとき示され、従って  $m \leq 11$  のとき  $(M, g)$  は定曲率 1 なることがわかる。

$n = 6$  のときは  $B = 0$  のみわかり、更に  $a_3$  についての処理が必要である。

また  $m \geq 15$  では  $6 - n < 0$  のため  $G$  の係数が負で  $a_2$  の  $\int$  の  $\text{deta}$  は無力である。

#### §4. $(S^{2n+1}, g_0)$ の D-相合変形

$(S^{2n+1}, g_0, \text{定曲率} 1)$  の自然な接触構造を  $\gamma$  とする。  $t$  を助変数として

$$g(t) = t^{-1} g_0 + (t^{m-1} - t^{-1}) \gamma \otimes \gamma, \quad m = 2n+1.$$

なる  $g_0 = g(1)$  の変形を考えると §3 の証明法は同じ形で

命題 B.  $2n+1 \leq 13$  のとき、S-foliated 多様体の class の中で  $(S^{2n+1}, g(t))$ ,  $t \neq \frac{2}{17}$ , は Spectrum によって特徴づけられる。

が示される。

尚、 $g(t)$  は  $\text{Vol}(S^{2n+1}, g(t)) = \text{一定} = \text{Vol}(S^{2n+1}, g_0)$  なるように補正してある。

命題 B については、 $\text{Spec}(S^m g(t))$  がわからなければ、命題としての意味はあまりない。それで、その Spec の構造を §5 で示しておく。

#### §5. $\text{Spec}(S^{2n+1}, g(t))$

$\text{Spec}(S^m g_0) = \{ \text{ここでは } 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \}$  とし、 $\lambda_i$  に対する固有空間を  $V(\lambda_i)$  とするとき、 $V(\lambda_i)$  は次のように分解する：

$$V(\lambda_1) = V_1(\lambda_1),$$

$$V(\lambda_2) = V_2(\lambda_2) + V_0(\lambda_2),$$

$$V(\lambda_3) = V_3(\lambda_3) + V_1(\lambda_3),$$



$$V(\lambda_4) = V_4(\lambda_4) + V_2(\lambda_4) + V_0(\lambda_4),$$

.....

ここに、例えば  $V(\lambda_4)$  は  $E^{2n+2}$  での 4 次の奇次調和多項式の  $S^m$  への制限でできているものであるが、 $V_2(\lambda_4)$  とはそのうち、 $S^{2n+1}$  の Hopf fibration での各 leaf 上で 2 次のように変化するもの、 $V_0(\lambda_4)$  とは各 leaf 上で 0 次、つまり定数のように見えるものである。従って  $V_0(\lambda_2)$ ,  $V_0(\lambda_4)$  は複素射影空間  $CP^n$  の第 1, 第 2 固有値に対する固有空間とそれぞれ同一視できるものである。

$V_1(\lambda_1)$  での固有値は

$$\begin{array}{ll} (m-1)t + t^{1-m} & (\text{重複度 } m+1) \\ V_2(\lambda_2) \quad " \quad 2(m-1)t + t^{1-m} & ( \quad \binom{m+2}{2} - (n+1)^2 ) \\ V_0(\lambda_2) \quad " \quad 2(m+1)t & ( \quad \binom{m+1}{1}^2 - 1 ) \end{array}$$

.....

$t$  と固有値との関係を表わすグラフは次頁のようになっている。特に  $(S^{2n+1}, g(t))$  の第 1 固有値  $\lambda_1(t)$  は

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} (2n + t^{-m})t & t^{-m} \leq m+3 \\ 4(n+1)t & t^{-m} \geq m+3 \end{cases}$$

であり、従って

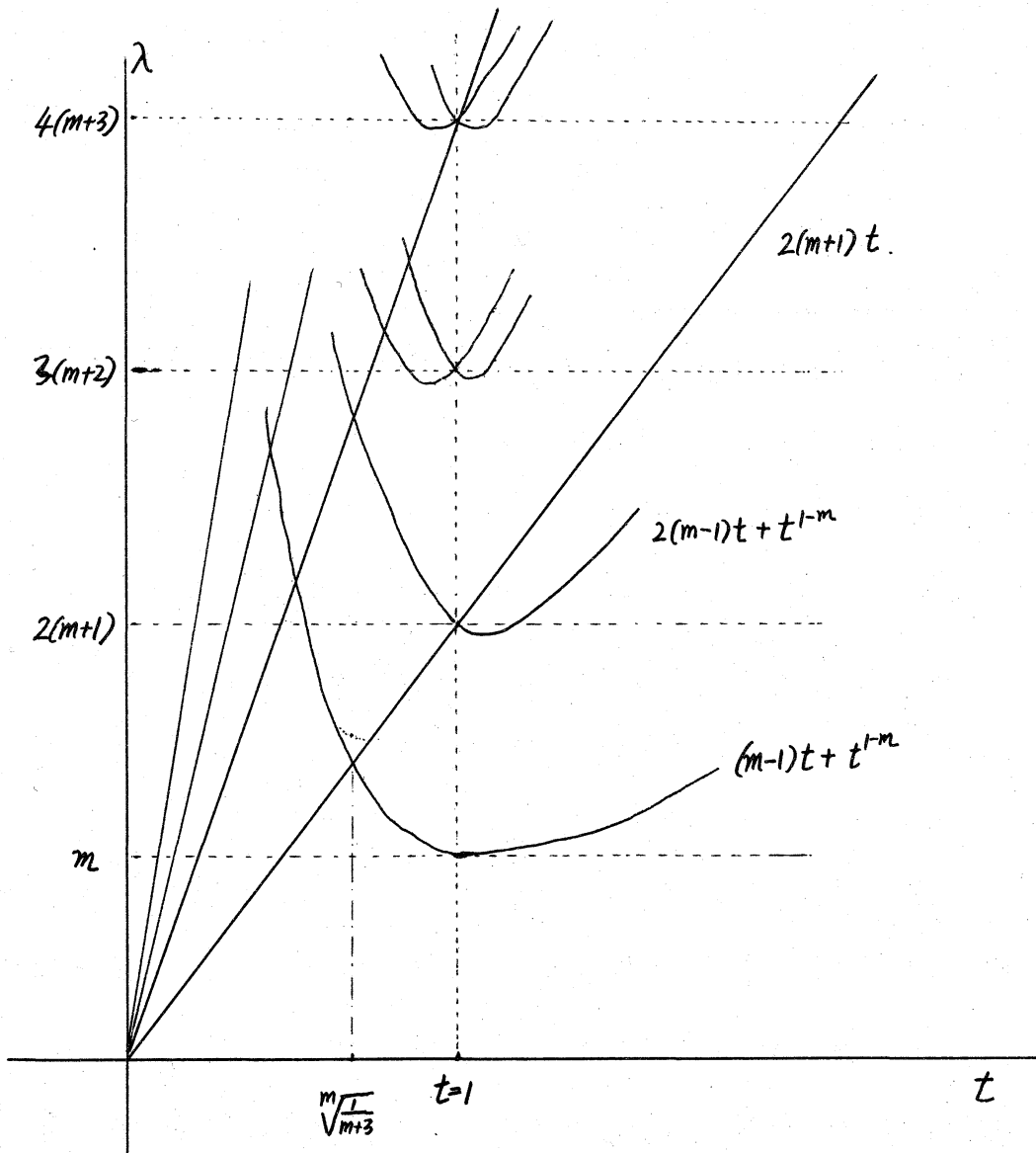
$$\begin{array}{ll} \lambda_1(t) \rightarrow 0 & \text{as } t \rightarrow 0 \\ \lambda_1(t) \rightarrow \infty & \text{as } t \rightarrow \infty \end{array}$$

が成立す。このことは Hirsch 型の定理が  $S^{2m+1}$  については成立たないことを示している。

また、 $\lambda=1$  固有値の重複度は  $t^{-m} = m+3$  のとき

$$(m^2 + 6m + 1) / 4$$

で、これは  $t=1$  のときの  $m+1$  よりずっと大きい。



実射影空間  $(\mathbb{R}P^{2n+1}, g(t))$  の Laplacian の固有空間は、  
 $(S^{2n+1}, g(t))$  の  $V(\lambda_i)$  のうち偶関数なるものだから

$$V_2(\lambda_2), V_0(\lambda_2), V_4(\lambda_4), V_2(\lambda_4), V_0(\lambda_4), \dots$$

であって、 $m$ -固有値  $\lambda_1(t)$  は

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} 2(m-1)t + 4t^{1-m} & 1 \leq t \\ 2(m+1)t & 1 \geq t \end{cases}$$

となり、 $\lambda_1(t) \rightarrow 0$  (as  $t \rightarrow 0$ ),  $\lambda_1(t) \rightarrow \infty$  (as  $t \rightarrow \infty$ ) である。

### §6. $(S^m, g_0)$ の固有関数

$(S^m, g_0)$  の  $\lambda_k$  に対する固有関数を  $f$  とするとき、各  
 $k=1, 2, 3$  に対し、 $(S^m, g_0)$  上

$$\langle 1 \rangle \quad f_{ij} = -f g_{ij},$$

$$\langle 2 \rangle \quad f_{ijk} = -(2f_k g_{ij} + f_i g_{jk} + f_j g_{ik}),$$

$$\begin{aligned} \langle 3 \rangle \quad f_{ijkl} = & -(3f_{kl} g_{ij} + 2f_{jk} g_{ik} + 2f_{ie} g_{jk} \\ & + f_{ij} g_{kl} + f_{jk} g_{il} + f_{ik} g_{je}) \\ & - 3f (g_{ij} g_{kl} + g_{ie} g_{jk} + g_{je} g_{ik}) \end{aligned}$$

なる微分方程式をみたす。ここに  $f_{ijk}$  とは  $\nabla_k \nabla_j \nabla_i f$  を表わす。

同じタイプの微分方程式を一般の  $(M, g)$  上で考えることに  
 して、non-trivial な解  $f$  があるとするれば

(1).  $\langle 1 \rangle$  の場合、 $F = \text{grad } f$  は  $(M, g)$  上で無限小共形変換であり、

(2). <2> の場合,  $F$  は無限小射影変換である。

(3). <3> の場合,  $F$  は  $L_F Z_1 = 0$  をみたす, ここに  $L_F$  は  $F$  による Lie 微分を表わす。  $(M, g)$  上もし  $f$  が critical point をもてば,  $F$  は 1-nullity ベクトル場になる。

このように  $(S^m, g_0)$  の  $\Delta$  の固有関数のみたす微分方程式を一般の Riemann 多様体  $(M, g)$  で考えると, それをみたす関数は幾何学的に面白い性質をもっている。

ここでの話は主に

[1], Tanno: The first eigenvalue of the Laplacian on spheres (to appear),

[2] Tanno:  $S$ -foliated manifolds with the same spectrum as unit spheres ( $X \in$ ).

によるものである。