

Title	Calabi予想の解決(S.T. Yau)とその応用 (幾何学と大域解析学)
Author(s)	満洲, 俊樹
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 352: 16-26
Issue Date	1979-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/104401">http://hdl.handle.net/2433/104401</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Calabi 予想の解決 (S. T. Yau) とその応用

版大 教養部 満洲 俊樹

最近、S. T. Yau [3] によって Calabi 予想が解かれたが、その骨子になっているのは T. Aubin の労作 [1] である。ある意味で、Yau は Aubin の仕事を簡易化し、正しく理解することによって Calabi 予想の解決にこぎつけたと言える。それ故我々は Yau による簡易化された Aubin の仕事を通して、Calabi 予想解決の軌跡を追ってみようと思う。ここでは特に色々ある Calabi 予想の中で次の予想に焦点をあててみる。

予想:  $M$  を compact complex manifold で  $c_1(M) < 0$  とする。このとき  $M$  上に Einstein Kähler metric が unique (up to constant multiple) に存在する。

但し、ここで  $c_1(M) < 0$  とは  $c_1(M)$  の Dolbeault cohomology class が  $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} (-g_{\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$  ( $(g_{\alpha\bar{\beta}})$  は positive definite Hermitian

matrix) の形に represent されるということの意味している。  
さて、この予想は次のことを示すのに reduce される。

Reduction:  $\lambda \in \mathbb{R}$  を正の定数とする。Compact complex manifold  $M$  上に Kähler metric  $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$  と  $C^\infty$  real valued function  $f \in C^\infty(M)$  が与えられているとする。このとき  
方程式

$$(1) \quad \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi + f)$$

が " $\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right)$  is positive definite everywhere on  $M$ " を満たすような unique solution  $\varphi \in C^\infty(M)$  をもつ。(但しここで  $C^\infty(M)$  とは  $M$  上の  $C^\infty$  real valued function 全体のことを表すこととする。)

まず、如何にしてこの(1)の方程式がとければ上の予想が導き出されるか、それをここに述べよう。そこで、 $M$  上の予想に於ける  $M$  とする。このとき上でも述べたように、 $C_1(M)$  の代表元は  $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} (-g_{\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$  の形のものかとれるが、一方、 $M$  の上で Kähler metric  $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$  を考えていくと Ricci form  $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(-\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}))$  も  $C_1(M)$  を represent している。  
i.e.,  $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} (-g_{\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \sim_{\text{cohomologous}} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(-\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}))$ .  
 $\therefore \exists f \in C^\infty(M)$  s.t.  $\partial\bar{\partial}(\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}})) + \partial\bar{\partial}f = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ .

こうして定められた  $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$ ,  $f$ , そして  $\lambda=1$  に対して上の方程式(1)を解く。そして  $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$  が positive definite になるような unique solution  $\varphi \in C^\infty(M)$  を考える。このとき

$$\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) - \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) = \varphi + f$$

$$\begin{aligned} \therefore \partial\bar{\partial}(\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})) &= \partial\bar{\partial}(\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}})) + \partial\bar{\partial}f + \partial\bar{\partial}\varphi \\ &= \sum_{\alpha, \beta} (g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \end{aligned}$$

即ち、これは  $M$  の上の Kähler metric  $\{g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\}$  が Einstein Kähler metric であることを示している。故に  $M$  の上に Einstein Kähler metric が存在するか、その一意性 (up to constant multiple) も (1) の方程式における  $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$  が positive definite になるような solution  $\varphi$  の uniqueness から困難なく導き出せる。

そこで問題の焦点は上の(1)の方程式を解くことに向つるのであるが、(1)の方程式で  $\lambda=0$  のときの solution をみつけることが “良く知られた Calabi 予想” を解くことと同値である。しかし、それは  $\lambda > 0$  のときに(1)を解くよりもはるかに難しい。(S.T. Yau の 仕事は  $\lambda=0$  のときも含めて(1)の方程式を解いたことである。)しかし、 $\lambda > 0$  のときを扱うことによつて、実際  $\lambda=0$  のときにはどうやればよいかは、かなりはっきりした image ができると思われるので、ここでは  $\lambda > 0$  のときだけを述べておく。(更に  $\lambda < 0$  の場合、方程

式(1)が解ける事はかなり疑わしい。

(1)の  $C^2$ -solution の uniqueness:  $\varphi, \psi \in C^2(M)$  を (1) の方程式の解で、しかも  $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ ,  $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$  がともに positive definite everywhere on  $M$  となつてゐたとする。Then

$$\det \left( g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \cdot \det (g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi + f)$$

$$\det \left( g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \cdot \det (g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \psi + f)$$

$$\therefore \frac{\det \left( g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)}{\det \left( g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) + \left( \frac{\partial^2 (\varphi - \psi)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)} = \exp\{\lambda(\varphi - \psi)\}.$$

今  $\varphi - \psi$  が点  $p_0 \in M$  で maximum をとつたとすると  $\left( \frac{\partial^2 (\varphi - \psi)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)$  は positive semi-definite matrix になるから

$$1 \geq \text{上式左辺} = \text{上式右辺} = \exp \lambda (\varphi(p_0) - \psi(p_0))$$

よつて  $\lambda > 0$  の条件がきいてきて、  $0 \geq \varphi(p_0) - \psi(p_0)$ .

よつて  $\varphi \geq \psi$  everywhere on  $M$ .

今とまゝ、全く同じ議論をくり返して、  $\psi \geq \varphi$  everywhere on  $M$ .

結局  $\varphi = \psi$  everywhere on  $M$  を得る。

(1)の  $C^\infty$ -solution の existence:

Step 1:  $0 < \alpha < 1$  なる定数  $\alpha$  (例えは  $\alpha = \frac{1}{2}$  とせよ) を  $\alpha$  と定める。また、 $M$  を open set  $U_\lambda; \lambda \in \Lambda$  で覆う。但し、

$U_\lambda$  は  $U_\lambda = \{ (z_1^{(\lambda)}, z_2^{(\lambda)}, \dots, z_m^{(\lambda)}) \in \mathbb{C}^m; |z_i^{(\lambda)}| < 1, i=1, 2, \dots, m \}$  とい

う形に書け、しかも local coordinate system  $(z_1^{(\lambda)}, \dots, z_m^{(\lambda)})$  は  $U_\lambda$  の  $M$  に於ける closure をちよつとこえた外の所でも定義されているとする。このとき任意の整数  $k \geq 0$  なるものに対して次のような 2 つの norm を定義する。即ち  $g \in C^k(M)$  に対して

$$\|g\|_k \stackrel{\text{defn}}{=} \max_{\lambda \in \Lambda} \max_{p \in U_\lambda} \max_{\substack{I=(i_1, \dots, i_m, i'_1, \dots, i'_m) \text{ is such} \\ \text{that } |I| (= i_1 + \dots + i_m + i'_1 + \dots + i'_m) \leq k}} \left\{ \frac{\partial^{|I|} g(p)}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \dots \partial z_n^{i_n} \partial \bar{z}_1^{i'_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i'_m}} \right\}$$

$$\|g\|_{k, \alpha} \stackrel{\text{defn}}{=} \max \left( \|g\|_k, \max_{\lambda \in \Lambda} \max_{\substack{p, p' \in U_\lambda \\ I=(i_1, \dots, i_m) \text{ with } |I|=k}} \left\{ \# \right\} \right)$$

$$\text{但し、} \# = \left( \frac{\partial^{|I|} f}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_m^{i_m}}(p) - \frac{\partial^{|I|} f}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_m^{i_m}}(p') \right) / |p - p'|^\alpha$$

ここで  $p = (p_1, \dots, p_m), p' = (p'_1, \dots, p'_m) \in U_\lambda$  に対して

$$|p - p'| = \sqrt{\sum_{j=1}^m |p_j - p'_j|^2} \quad \text{とおいた。}$$

さて、 $C^{k, \alpha}(M) = \{ g \in C^k(M); \|g\|_{k, \alpha} < +\infty \}$  とおくと、この  $C^{k, \alpha}(M)$  が Banach space になることは見やすい。

こうして notation を fix したところで次のことを考える。即ち、 $k \geq 2$  なる任意の整数  $k$  に対し、方程式 (1) の  $C^{k, \alpha}$ -solution  $g_{(k)}$  (もちろん  $(g_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 g_{(k)}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta})$  が positive definite な matrix になるような) が存在したと仮定すれば、それらはすべて等しい  $M$  上の関数を定めているであろうか？ 答は Yes である。これはすぐ上で証明した (1) の  $C^2$ -solution の一意性から即座に従う。

よって  $\varphi_{(2)} = \varphi_{(3)} = \varphi_{(4)} = \dots$ . 即ち  $\varphi_{(2)}$  がはじめから方程式 (1) の  $C^\infty$ -solution であることを示している。だから (1) の  $C^\infty$ -solution の存在をいうには (1) の  $C^{k,\alpha}$ -solution の存在を各  $k = 2, 3, 4, \dots$  に対して示すことに帰着される。

### Step 2: (A priori estimate)

(1) の方程式をみたす  $\varphi \in C^{k,\alpha}(M)$  (もちろん  $(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})$  が positive definite on  $M$  となるような) ( $k \geq 4$ ) とする。このときこの  $\varphi$  は自動的に  $\exists B = B(\dots, \|f\|_{k+4}) \in \mathbb{R}$  (即ち  $\varphi$  に depend せず、 $M$  や  $M$  の上の Kähler metric  $\{g_{i\bar{j}}\}$  や  $f \in C^\infty(M)$  の  $C^{k+4}$ -norm  $\|f\|_{k+4}$  だけに depend する定数  $B \in \mathbb{R}_+$ ) が存在して  $\|\varphi\|_{k,\alpha} \leq B$  と上からおさえられることをいうのがこの step の目的であるが、これが最も困難な部分である。詳しくは Yau の論文を見ればよい (cf. [3])。その mood だけがわかるように  $\|\varphi\|_0$  を estimate してみよう。(その評価を  $\|\varphi\|_{k,\alpha}$  にまであげていくのに Schauder estimate, interior Schauder estimate などを使う)。  $\|\varphi\|_0 = \max_{p \in M} |\varphi(p)|$  に注意する。例えば  $\varphi(p_0) = \varphi_{\max}$  (resp.  $\varphi_{\min}$ ) とすると  $(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})(p_0)$  は negative <sup>semi</sup> definite (resp. positive semi-definite) だから、  

$$1 \geq \det(g_{i\bar{j}}(p_0) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}(p_0)) \cdot \det(g_{i\bar{j}}(p_0))^{-1} = \exp(\lambda \varphi(p_0) + f(p_0))$$
 (resp.  $1 \leq \det(\dots) \cdot \det(\dots)^{-1} = \exp(\lambda \varphi(p_0) + f(p_0))$ )

$\therefore \lambda \varphi(p_0) + f(p_0) \leq 0 \quad \therefore \varphi_{\max} = \varphi(p_0) \leq \frac{|f|_{\max}}{\lambda}$   
 (resp.  $\lambda \varphi(p_0) + f(p_0) \geq 0 \quad \therefore \varphi_{\min} = \varphi(p_0) \geq -\frac{|f|_{\max}}{\lambda}$ )  
 故に  $\varphi$  は上から (resp. 下から) おさえられる。(実際、我々は  $\|\varphi\|_0 \leq \frac{|f|_{\max}}{\lambda} (= \frac{\|f\|_0}{\lambda})$  を示したわけである。)

Step 2: さていよいよ方程式 (1) の  $C^{k, \alpha}$ -solution が存在することを continuity method を使うことにより示そう。そこで次のよう  $\varphi$  continuous map を定義する。

$$\begin{aligned}
 G: C^{k, \alpha}(M) &\rightarrow C^{k-2, \alpha}(M) \\
 \varphi &\longmapsto G(\varphi) = \det\left(g_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}\right) \cdot (\det g_{\alpha\beta})^{-1} \cdot \exp(-\lambda \varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma: I = [0, 1] &\rightarrow C^{k-2, \alpha}(M) \\
 t &\longmapsto \gamma(t) = \exp(t f)
 \end{aligned}$$

$$\text{また } \mathcal{H} = \left\{ \varphi \in C^{k, \alpha}(M); \left(g_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}\right) \text{ is positive definite everywhere on } M \right\}$$

とおくと、もちろん  $\mathcal{H}$  は  $C^{k, \alpha}(M)$  の open subset である。今

$$T = \left\{ t \in [0, 1]; \det\left(g_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}\right) \cdot (\det g_{\alpha\beta})^{-1} = \exp(\lambda \varphi + t f) \text{ has a solution in } \mathcal{H} \right\}$$

とおくとき、方程式 (1) が  $C^{k, \alpha}$ -solution をもつということを示すには  $T \ni 1$  を示せばよい。これを次のようにして示す。

① まず  $T \ni 0$  に気をつける。(☺)  $t=0$  のときは方程式は  $\det\left(g_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}\right) \cdot (\det g_{\alpha\beta})^{-1} = \exp(\lambda \varphi)$  となり  $\varphi=0$  の解である。  
 -17-



ⓑ 次に  $T$  が  $[0, 1]$  の open subset であることを示す。そのために inverse function theorem を使う。そこで任意の  $\varphi_0 \in \textcircled{H}$  を fix し、 $G(\varphi_0 + \varepsilon\psi)$  を  $\varepsilon$  に関して Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} G(\varphi_0 + \varepsilon\psi) &= \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2(\varphi_0 + \varepsilon\psi)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} \cdot \exp(-\lambda(\varphi_0 + \varepsilon\psi)) \\ &= G(\varphi_0) + \varepsilon \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} \cdot \exp(-\lambda\varphi_0) \cdot (\Delta_{\varphi_0} \psi - \lambda\psi) \\ &\quad + \varepsilon^2(\dots) + \dots \end{aligned}$$

但し、 $\Delta_{\varphi_0} = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$  ;  $(\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}})$  は  $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$  の inverse matrix. よって mapping  $G: C^{k, \alpha}(M) \rightarrow C^{k-2, \alpha}(M)$  の  $\varphi_0$  における differential  $G_*$  は次のように書ける。

$$\begin{aligned} G_*: C^{k, \alpha}(M) &\rightarrow C^{k-2, \alpha}(M) \\ \psi &\longmapsto \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} \cdot \exp(-\lambda\varphi_0) \cdot (\Delta_{\varphi_0} \psi - \lambda\psi) \end{aligned}$$

ここで  $\lambda > 0$  がきいてきて、 $\Delta_{\varphi_0}$  has only non-positive eigen values に注意すると  $G_*$  は one-to-one onto 即ち linear homeomorphism となっている。  $\varphi_0 \in \textcircled{H}$  は任意なので inverse mapping theorem により、 $G|_{\textcircled{H}}$  は open mapping. きて、

$$\begin{aligned} T &= \{t \in I = [0, 1]; G(\varphi) = \gamma(t) \text{ has a solution } \varphi \text{ in } \textcircled{H}\} \\ &= \{t \in I; \gamma(t) \in G(\textcircled{H})\} = \gamma^{-1}(G(\textcircled{H})) \\ &= \text{open subset in } [0, 1]. \end{aligned}$$

ⓒ  $T \ni 1$  を示すには、 $[0, 1]$  の connectedness により  $T$ : closed subset in  $[0, 1]$  を示せばよい。そこで  $t_n \in T$ ;  $n=1, 2, 3, \dots$  であつ、 $t_n \rightarrow t \in [0, 1]$  (as  $n \rightarrow \infty$ ) としたとき  $t \in T$  を示せ

ばよい。  $t_n \in T$ ;  $n=1, 2, \dots$  であるから  $\exists \varphi_n \in \mathcal{H}$  s.t.

$$\det \left( g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \cdot \det (g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi_n + t_n f).$$

ここで  $|t_n| \leq 1$  だから  $\|t_n f\|_{k+4} \leq \|f\|_{k+4}$ . よって Step 2 の A priori estimate により、どんな  $n=1, 2, \dots$  に対しても

$$\|\varphi_n\|_{k, \alpha} \leq B(\lambda, \|f\|_{k+4}).$$

よって各 coordinate chart  $U_\lambda$  の  $M$  での closure  $\bar{U}_\lambda$  の上で

$\varphi_n$  の各回偏微分は一様有界かつ、同等連続である。(ここで Hölder continuity をつけた。) よって Ascoli-Arzelà の定理

によって一様収束する部分列が存在するが、その部分列を、最初の  $\{\varphi_n; n=1, 2, \dots\}$  (の各回偏微分) と同一視しても一般性を失わない。よって  $\exists \varphi \in C^k(M)$  s.t.  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $C^k(M)$ .

今、 $p, p' \in U_\lambda$  に対し、 $\|\varphi_n\|_{k, \alpha} \leq B$ ,  $\forall n=1, 2, \dots$  であるから、

$$\left| \frac{\partial^{|\mathbf{I}|} \varphi_n}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i_m}}(p) - \frac{\partial^{|\mathbf{I}|} \varphi_n}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i_m}}(p') \right| \leq B \cdot |p - p'|^\alpha$$

(但し、 $|\mathbf{I}| = i_1 + \dots + i_m = k$ )

そこで  $n \rightarrow \infty$  とすると、

$$\left| \frac{\partial^{|\mathbf{I}|} \varphi}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i_m}}(p) - \frac{\partial^{|\mathbf{I}|} \varphi}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i_m}}(p') \right| \leq B |p - p'|^\alpha.$$

これは  $\|\varphi\|_{k, \alpha} \leq B (< +\infty)$  を示している。  $\therefore \varphi \in C^{k, \alpha}(M)$ .

また  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $C^k(M)$  故に (もちろん  $k \geq 2$  のときを考えると)

$$\det \left( g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \cdot \det (g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi_n + t_n f)$$

$n \rightarrow \infty$  とし  $\det \left( g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \cdot \det (g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi + t f)$  を得

る。しかも各  $\varphi_n \in \mathbb{H}$  であるから今得た等式も考えあわせると  $\varphi \in \mathbb{H}$  がわかる。これはどうも手おきず  $t \in T$  を示している。よって、 $T$  は closed subset in  $[0, 1]$  となっている。 Q.E.D.  
 以上で Reduction の解き方の outline を述べた。

そこで Calabi 予想の種々の応用を証明をして羅列してやる。(最も一般的な Calabi 予想の応用も含めて。)

(1)  $M$  を compact complex manifold of  $\dim = 2$  で  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  と homeo だとする。このとき  $M \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  (biholomorphic)

(2)  $M$  を compact complex manifold of  $\dim = n$  でしかも Kähler だとする。もし  $M$  が  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  と homeo なら  $M$  は  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  と biholomorphic.

(3)  $M$  を compact complex manifold of  $\dim = n$  で  $c_1(M) \leq 0$  or  $c_1(M) = 0$  だとする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$(-1)^{n-2} \cdot 2(n+1) c_2(M) c_1(M)^{n-2} [M] \geq (-1)^{n-2} n c_1(M)^n [M].$$

ここで等号成立は  $M$  の universal covering が open ball

$\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$  となっている時(もちろん holomorphic に cover される。)

$n=2$  のときは所謂 miyaoka の不等式である。

(4)  $M$  を compact complex manifold で  $c_1(M) > 0$  とする。このとき  $M$  は simply connected である。

(13)  $M$  を compact Kähler manifold  $T^1 C_1(M) = C_2(M) = 0$  とする。このとき  $M$  は complex torus  $T^n$  cover (unramified covering) される。

A priori estimate の詳しいことは Yau の原論文 [3]。

outline は Bourguignon [2] を見よ。応用は Bourguignon に詳しい。

### Reference

- [1] T. Aubin --- Métriques riemanniennes et courbure,  
J. Diff. Geom. 4 (1970), pp. 383-424.
- [2] J.P. Bourguignon --- Premières formes de Chern des  
variétés Kählériennes compactes,  
Séminaire Bourbaki, November 1977.
- [3] S.T. Yau -- On the Ricci curvature of a compact  
Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I  
Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978)  
pp. 339-411