Title	Dirichlet問題の固有値と境界変動 (幾何学と大域解析学)
Author(s)	藤原, 大輔
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 352: 1-15
Issue Date	1979-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/104402
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
352巻 1979年 1-15

Dirichlet 問題の固有値と境界変動

東大 理, 藤原大輔

序.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界をもつ有界領域とする。その境界を γ とする。2次元の Dirichlet 問題の固有値問題を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} (-\Delta - \lambda) u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_\gamma = 0 \end{cases}$$

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ を, (1) の固有値とすると, これらは領域 Ω の汎関数である。簡単のため以後 Ω は単連結とする。すると, λ_j は Ω の境界 γ の汎関数であるとして良い。かかる γ の全体は, 可分な Hilbert 多様体 Γ を成す。Γ の部分集合 B が residual であるとは, 開かつ稠密な可算個の集合の共通集合となることである。

私が, 谷川敏雄氏, 雲田修一氏と得た結果を紹介する。

<u>定理 1</u>, Γ のある residual な部分集合 B が

あって、$\forall \gamma \in B$ に対して、(1)の固有空間は、すべて1次元になるように出来る。

これは、領域が対称性等がなく、極く一般な型をしているならば、すべての固有値が単純であることを示している。同様な結果は、Uhlenbeck [4] によって、ポテンシャル摂動の場合とか、Riemann空間の Laplace-Beltrami 作用素について、計量が摂動される場合について知られている。

定理1は、より強い形で Arnold [1] に予想が述べられている。

§1. 境界の作る Hilbert 多様体 Γ.

S^1を、1次元の単位円周 $=\{e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le 2\pi\}$ とする。Γを、埋め込み：

$$S^1 \ni \; \longrightarrow \gamma(\theta)$$

の作る Hilbert 多様体とする。但し、$x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$は、Sobolev 空間 $H^5(S^1)$ の元とする。Sobolev の埋蔵定理により、$x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$ は C^4 級である。Γ での距離を

$$(1.1) \qquad \rho(\gamma, \gamma') = \left(\|x_1 - x_1'\|_5^2 + \|x_2 - x_2'\|_5^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

で定義する。ここで $\| \ \|_5$ は Sobolev 空間 $H^5(S^1)$

での Sobolev norm である。

$^\forall\gamma \in \Gamma$ は C^4 級の simple Jordan curve を定義する。従って，$\mathbb{R}^2$ の単連結領域 Ω_γ を囲む。γ への単位外法線ベクトル場を $\nu(\theta)$ とする。γ については，Tubular neighbourhood theorem が成立するから，ある $\varepsilon(\gamma)>0$ が存在して，任意の $\gamma' \in \Gamma$ で $\rho(\gamma,\gamma') < \varepsilon(\gamma)$ となるものについては，

$$(1.2) \qquad \omega_\gamma^{\gamma'} ; \overline{\Omega}_\gamma \longrightarrow \overline{\Omega}_{\gamma'}$$

という C^4 級の微分同相が存在する。そして $\omega_\gamma^{\gamma'}$ を γ に制限したものは $\gamma' \circ \gamma^{-1}$ に一致するとして良い。さらに，必要ならば，$\varepsilon(\gamma)$ をさらに小さくとって，$(\gamma, \gamma') \to \omega_\gamma^{\gamma'}$ は，C^4 級であると仮定して良い。従って，γ_t ; $t \in [0,1]$ が Hilbert 多様体 Γ 上の $\gamma = \gamma_0$ を通る曲線とするとき，1-パラメターの微分同相族 $\{\omega_\gamma^{\gamma_t}\}_{t\in[0,1]}$ を得る。$^\forall x \in \overline{\Omega}_\gamma$ において，

$$(1.3) \qquad X(x) = \left.\frac{\partial \omega_\gamma^{\gamma_t}(x)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

とおく。$X(x) = (X_1(x), X_2(x))$ は $\overline{\Omega}_\gamma$ 上の vector 場である。$\omega_\gamma^{\gamma'}$ は，(γ, γ') に対し一意的には定まらぬ。従って vector 場 $X(x)$ は γ_t によって，一意的に定まるわけではない。しかし，その γ 上への制限，$\delta\gamma(\theta) = X(\gamma(\theta))$

は，$\delta\gamma$によって，定まる。さらに，$\delta\gamma(\theta)$ の法線方向の成分

(1.4) $\qquad \{\delta\gamma(\theta), \nu_\theta\} = \langle X(\gamma(\theta)), \nu_\theta \rangle$

をとることによって，S^1 のパラメーター θ の取り方による多義性をなくすことが出来る。かくて，Hilbert 多様体 Γ の γ における接ベクトル空間 $T_\gamma\Gamma$ として

$$T_\gamma \Gamma = \{\{\delta\gamma(\theta), \nu_\theta\} = \langle X(\gamma(\theta)), \nu_\theta \rangle \mid X(\gamma(\theta)) \in H^5(S^1) \times H^5(S^1)\}$$

を同一視することが出来る。

§2 Main theorem の証明

$\gamma \in \Gamma$，Ω_γ を上述の如くとする。問題1を考えるとき $\Omega = \Omega_\gamma$ とする。多様体 Γ は separable であるから，定理1は局所化出来る。

Theorem 1′ $\forall \gamma^0 \in \Gamma$ に対して，ある開近傍 $U(\gamma^0)$ が存在して，その residual な部分集合 $B(\gamma^0)$ があり，$\forall \gamma \in B(\gamma^0)$ に対して，Ω_γ で考えた問題(1)の固有空間はすべて次元が1である。

定理1′の証明をスケッチする。$g_\gamma(x, x')$ を Ω_γ における，Dirichlet 問題のグリーン関数とする。グリーン

作用素を

(2.1) $$G_\gamma u(x) = \int_{\Omega_\gamma} g_\gamma(x, x') u(x') dx'$$

で定義する。固有値問題 (1) は、G_γ を用いて

(2.2) $$(\lambda G_\gamma - I)\, u(x) = 0$$

に変換される。微分同相 (1.2) を用いる。$L^2(\Omega_\gamma)$ の元 $u(x)$ をこれによって $\Omega_{\tilde\gamma}$ 上の関数に引き戻すと

$$\omega_\gamma^{\tilde\gamma *} u(x) = u(\omega_\gamma^{\tilde\gamma}(x)) \in L^2(\Omega_{\tilde\gamma})$$

であり、$\tilde u(x) = \omega_\gamma^{\tilde\gamma *} u(x)$, $\tilde v(x) = \omega_\gamma^{\tilde\gamma *} v(x)$ とすると内積の変換は、

(2.3) $$\int_{\Omega_\gamma} u(y)\, v(y)\, J_\gamma^{\tilde\gamma}(y)\, dy = \int_{\Omega_{\tilde\gamma}} \tilde u(x)\, \tilde v(x)\, dx.$$

である。$J_\gamma^{\tilde\gamma}(y)$ は $\omega_\gamma^{\tilde\gamma -1}$ の Jacobian 行列式である。

(2.2) は

(2.4) $$(I - \lambda\, G_\gamma^{\tilde\gamma})\, \tilde u(x) = 0,$$

where $\tilde u(x) = (\omega_\gamma^{\tilde\gamma *} u)(x)$ and $G_\gamma^{\tilde\gamma} = \omega_\gamma^{\tilde\gamma *} G_\gamma (\omega_\gamma^{\tilde\gamma *})^{-1}$.

(2.4) 式は、固定した Hilbert 空間 $L^2(\Omega_{\tilde\gamma}) = \mathfrak{H}$ で考えればよい。そこで、$\mathfrak{H}$ の単位球を

$$\mathfrak{S} = \left\{ \tilde u \in L^2(\Omega_{\tilde\gamma});\ \int_{\Omega_{\tilde\gamma}} |\tilde u(x)|^2 dx = 1 \right\}.$$

とおく。

$\mathfrak{S}$ も可分の Hilbert 多様体である。

次のような写像を考える。

$$(2.5)\qquad \Phi;\ U(\gamma)\times\mathfrak{S}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathfrak{H}_{\gamma}$$

$$(\gamma,\ \tilde{u},\ \lambda)\longrightarrow\Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda)=(\tilde{u}-\lambda G^{\gamma}_{\gamma}\tilde{u})$$

さらに、ここで γ を固定して、次の写像を考える。

$$\Phi_{\gamma};\ \mathfrak{S}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathfrak{H}_{\gamma}$$

$$(\tilde{u},\lambda)\longrightarrow\Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda).$$

これについて、

命題1　上の写像 Φ_{γ} は C^{∞} 級の Fredholm 写像で、その指数は0である。

さて、$(\gamma,\tilde{u},\lambda)\in U(\gamma)\times\mathfrak{S}\times\mathbb{R}$ をとる。写像 Φ のこの点での接写像は、

$$(2.6)\qquad \delta\Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda)=\delta\lambda\, G^{\gamma}_{\gamma}\tilde{u}+(1-\lambda G^{\gamma}_{\gamma})\delta\tilde{u}+\lambda(\delta G^{\gamma}_{\gamma})u$$

である。$\delta\tilde{u}\in T_{\tilde{u}}\mathfrak{S}$ は、

$$(2.7)\qquad \int_{\Omega_{\gamma}}\tilde{u}(x)\,\delta\tilde{u}(x)\,dx=0$$

を満足する。(2.6) 式の最後の項は、境界の変動 $\delta\gamma(\theta)$ で生じる変動に相当する。この部分は、きちんと、計算される。

命題2 (Hadamard's variational formula).

任意の $u \in L^2(\Omega_\gamma)$ に対し,

(2.8) $$(\omega_\gamma^{\gamma*})^{-1}(\delta G_{\tilde{\gamma}}^{\gamma})\,\omega_\gamma^{\gamma*}u(y) = V_{\delta\gamma}u(y)$$

とおけば,

(2.9) $$V_{\delta\gamma}u(y) = -\iint_{\Omega_\gamma} \frac{\partial g_\gamma(y,\gamma(\theta))}{\partial \nu_\theta}\frac{\partial g_\gamma(\gamma(\theta),y')}{\partial \nu_\theta}\langle X(\gamma(\theta)),\nu_\theta\rangle d\sigma_\theta\, u(y')dy'$$

$$+\langle \operatorname{grad} G_\gamma u(y), X(y)\rangle - G_\gamma(\langle X, \operatorname{grad} u\rangle)(y).$$

ここで $d\sigma_\theta$ は γ の線素で, $\langle X(\gamma(\theta)),\nu_\theta\rangle \in T_\gamma\Gamma$。

つぎに我々は次の定理を証明する.

定理2. $\mathfrak{h} \ni 0$ は, 写像

$$\Phi;\ V(\tilde{\gamma})\times\mathfrak{S}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

の regular value である。

証明. $\Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda) = 0 \in \mathfrak{h}$ と仮定する。すると,

(2.10) $$(I-\lambda G_\gamma^{\gamma})\tilde{u} = 0.$$

$u(x) = (\omega_\gamma^{\gamma*})^{-1}\tilde{u}$ として,

(2.11) $$(I-\lambda G_\gamma)u = 0 \qquad \text{in } L^2(\Omega_\gamma)$$

証明すべきことは，$\delta\Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda)$ の像が $\mathcal{H}_\gamma = L^2(\partial\Omega)_\gamma$ と一致することである。それには $\delta\Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda)$ の像が稠密であることを云えば良い。$\tilde{v}\in\mathcal{H}_\gamma$ が $\mathrm{Im}\,\delta\Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda)$ に直交すると仮定する。すると

(2.12) $$0 = \delta\lambda \int_{\partial\Omega_{\tilde{\gamma}}} G^{\gamma}_{\tilde{\gamma}}\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)\,dx + \int_{\partial\Omega_{\tilde{\gamma}}} (I-\lambda G^{\gamma}_{\tilde{\gamma}})\delta\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)\,dx + \lambda\int_{\partial\Omega_{\tilde{\gamma}}} (\delta G^{\gamma}_{\tilde{\gamma}})\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)\,dx.$$

である，ただし，$\delta u \in T_{\tilde{u}}\Sigma$ である。この条件は，

(2.13) $$\int_{\partial\Omega_\gamma} u(y)\delta u(y) J^{\tilde{\gamma}}_{\gamma}(y)\,dy = 0$$

$\delta\tilde{u} = (\omega^{\gamma *}_{\tilde{\gamma}})^{-1}\delta u$ である。(2.12) 式は，次の三つの連立方程式系と同値である：

(2.14) $$\int u(y)\,w(y)\,dy = 0$$

(2.15) $$\int_{\partial\Omega_\gamma} ((I-\lambda G_\gamma)\delta\tilde{u})(y)\,w(y)\,dy = 0$$

(2.16) $$\int_{\partial\Omega_\gamma} V_{\delta\gamma}\,u(x)\,w(x)\,dx = 0$$

ここで，

(2.17) $$w(y) = (\omega^{\gamma *}_{\gamma})^{-1}\tilde{v}(y) J^{\tilde{\gamma}}_{\gamma}(y).$$

とおいた。

$\delta\tilde{u}$ は，条件 (2.13) を満す任意の関数であるから，
(2.15) より，C を定数として，

(2.18) $\quad (I - \lambda G_\gamma) w(y) = C\, u(y) J_\gamma^{\delta}(y)$.

$I - \lambda G_\gamma$ の対称性を用いると，任意の $u \in \ker(I - \lambda G_\gamma)$ に対し，

$$0 = \int u(y)(I - \lambda G_\gamma) w(y)\, dy = C \int |u(y)|^2 J_\gamma^{\delta}(y)\, dy$$

これから，$C = 0$ を得る。従って，

(2.19) $\quad (I - \lambda G_\gamma) w(y) = 0$

即ち，$w \in C^4(\bar{\Omega}_\gamma)$ で

(2.) $\quad \begin{cases} (-\Delta - \lambda) w(y) = 0 & \text{in } \Omega_\gamma \\ w|_\gamma = 0 & . \end{cases}$

が成立する。(2.11) と (2.16), (2.19) を用いると，

(2.21) $\quad \lambda^{-1} \int \frac{\partial u}{\partial \nu_\theta}(\gamma(\theta)) \frac{\partial w}{\partial \nu_\theta}(\gamma(\theta)) \langle X(\gamma(\theta)), \nu_\theta \rangle\, d\sigma_\theta = 0$

$\langle X(\gamma(\theta)), \nu_\theta \rangle = \delta\gamma(\theta)$ は任意であるから，$u \not\equiv 0$ により

(2.22) $\quad \frac{\partial w}{\partial \nu_\theta}(\gamma(\theta)) \equiv 0$.

が，ある γ 上の開集合で成立する。これと　　をあわせて，Aronszajn's 定理を用いると $w(y) \equiv 0$ on Ω_γ がえる。従って $\tilde{u}(x) \equiv 0$. 定理 2 は示された。

定理1' は、この定理2とUhlenbeck[4]の横断性定理2によって示される。

§3 Hadamard変分公式の証明のスケッチ.

前節で用いたHadamard変分公式は、Hadamard[5]によって述べられたが、そこにおける証明は、$\rho(\theta)=\langle X(\gamma(\theta)),\nu(\theta)\rangle$が、正又は負の定符号のときのみしか有効でない。その後厳密な証明は、幾通りも得られているが、(例えば[6][7][8])いずれも単純ではなく、Hadamardの最初の証明の着想に比べると、不満を感じる。最近、筆者は、小沢真氏と協力して、Hadamardの最初の着想を、極めて少しだけ修正すれば、殆んど、Hadamardの最初の着想そのままで$\rho(\theta)$が符号を変える一般の場合も、Hadamardの公式が証明出来ることを指摘した。[7]。ここでは、それに少し触れてみたい。もう一度情況を明確にしよう。

Ωを$\mathbb{R}^2$の有界領域で、$\partial\Omega=\gamma$でその境をあらわす。$\rho(x)$をγ上で定義されたC^∞の実関数とする(γはC^∞としておく。) ν_xを$x\in\gamma$でのγの外単位法線とする。$\varepsilon\geq 0$に対して

$$\gamma_\varepsilon=\{x+\varepsilon\rho(x)\nu_x\ ;\ x\in\gamma\}$$

は，ε が十分小さければ，ある有界領域 Ω_ε を囲む。

$g_\varepsilon(x,y)$ を Ω_ε における Dirichlet 問題のグリーン関数とする。即ち

$$(3.1)\quad \begin{cases} \Delta_x g_\varepsilon(x,y) = -\delta(x-y) \\ g_\varepsilon(x,y)\big|_{x\in\gamma_\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

をみたすものとする。Hadamard の変分公式は，次のように述べることが出来る。（これは §2 と少し形が違うが，Hadamard のもとの公式のままである。）

定理 3.1 (Hadamard's variational formula)

$x, y \in \Omega$, $x \neq y$ に対して

$$(3.2)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\left(g_\varepsilon(x,y) - g_0(x,y)\right) = \int_\gamma \frac{\partial g_0(x,z)}{\partial \nu_z}\cdot\frac{\partial g_0(y,z)}{\partial \nu_z}\rho(z)\,d\sigma_z$$

ここで，$d\sigma_z$ は $z\in\gamma$ での γ の線素。

証明．$y \in \Omega$ を固定する。$g_0(x,y)$ を x の関数と思えば，$\bar\Omega \setminus \{y\}$ で C^∞ 関数である。したがって，Whitney の拡張定理により，$g_0(x,y)$ を $R^2\setminus\{y\}$ に

C^∞ に拡張しておく。その関数を $\tilde{g}_\varepsilon(x,y)$ とおく。

$$\Delta_x \tilde{g}_0(x,y) = \delta(x-y) + h(x,y)$$

が、任意の $x\in\mathbb{R}^2\setminus\{y\}$ で成立する。但し $h(x,y)$ は $x\in\mathbb{R}^2$; の C^∞ 関数で、$x\in\overline{\Omega}$ のとき $h(x,y)\equiv 0$ である。それゆえ、任意の α に対して

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha h(x,y)\right| \le C_\alpha\, |\mathrm{dist}(x,\gamma)|^2$$

という式が成立する。$\mathrm{dist}(x,\gamma)$ は x と γ の距離。C_α は正定数。Green-Stokes の公式から、$x,y\in\Omega$ のとき

$$g_\varepsilon(x,y) - g_0(x,y)$$

$$(3.3)\quad = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\Delta_z g_\varepsilon(x,z)\,\tilde{g}_0(z,y) - \Delta_z \tilde{g}_0(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\right) dz$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon} h(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\, dz.$$

$$= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left\{ \frac{\partial g_\varepsilon(x,z)}{\partial \nu_z^\varepsilon}\cdot \tilde{g}_0(z,y) - \frac{\partial \tilde{g}_0(z,y)}{\partial \nu_z^\varepsilon}\, g_\varepsilon(x,z) \right\} d\sigma_z^\varepsilon$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon\setminus\overline{\Omega}} h(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\, dz$$

$$= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial g_\varepsilon(x,z)}{\partial \nu_z^\varepsilon}\cdot \tilde{g}_0(z,y)\, d\sigma_z^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon\setminus\overline{\Omega}} h(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\, dz.$$

ここで，$d\sigma_z^\varepsilon$ は γ^ε の線素をあらわす．この式の等号では，(3.1) 式の境界条件を用いた。この (3.3) 式の右辺の第2項は，$\tilde{K}$ の上述の不等式を用いると，

$$(3.4)\qquad \left|\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \bar{\Omega}} \tilde{K}(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\, dz\right| \leq O(\varepsilon^2)$$

である。$\mathrm{dist}\,(z,\gamma) \leqq \varepsilon$ が任意の $z \in \Omega_\varepsilon - \bar{\Omega}$ に対し成立するからである。従って

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\left(g_\varepsilon(x,y) - g_0(x,y)\right)$$

$$(3.5)\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial g_\varepsilon(x,z)}{\partial\nu_z^\varepsilon}\cdot \tilde{g}_0(z,y)\, dz$$

を得る。$\tilde{g}_0(z',y) = 0$ for $\forall z' \in \partial\Omega_0 = \gamma$ であるから，$z \in \partial\Omega_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$ を $z = z' + \varepsilon\rho(z)\nu_z$ とすると，

$$\tilde{g}_0(z,y) = \varepsilon\rho(z')\frac{\partial\tilde{g}_0(z',y)}{\partial\nu_z} + O(\varepsilon^2)$$

である。従って，(3.5) に代入すると，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\left(g_\varepsilon(x,y) - g_0(x,y)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\int_{\gamma_\varepsilon} \varepsilon\rho(z')\frac{\partial\tilde{g}_0(z',y)}{\partial\nu_z}\cdot\frac{\partial g_\varepsilon(x,z)}{\partial\nu_z^\varepsilon}\, dz$$

となって，定理 3.1 を証明出来る。

以上の証明には，楕円型方程式の a priori 評価，グリーン核の存在，Whitney 拡張定理のみを用いているから，n次元の場合で，しかも Schechter 等の論じた properly elliptic な楕円型方程式の場合にも，証明は容易に拡張出来る。詳しくは [7] を御覧いただきたい。

<u>注意</u>．序文中に述べた我々の主定理1に極く良く似た結果が Micheletti 氏によって，既に得られていることを Univ. paris Sud. の Saut 教授から御指摘いただきました。同教授に感謝いたします．

文献表

[1] Arnold, V.I., Modes and quasi-modes. Functional Anal. and its appl. vol. 6, 94-101 (1972).

[2] Garabedian, P. R.; Partial differential equations. John-Wiley & Sons, New York (1964).

[3] Hadamard, J.; Memoire sur le probleme d'analyse relatif a l'equilibre des plaques elastiques encastrees. Oeuvres, C.N.R.S. tom 2. 515-631 (1968).

[4] Uhlenbeck, K., Generic properties of eigen functions. Amer. J. Math. vol. 98. 1057-1078 (1976).

[5] Garabedian, p.R., & Schiffer., Convexity of domain functionsls. J. Anal. Math., vol.2., 281-368 (1978).

[6] Aomoto, K., Formule variationnelle d'Hadamard et modele euclidien des varietes differentiable plongees. (to appear in J. Functional analysis)

[7] Fujiwara & Ozawa, Hadamard's variational formula for the Green functions of some normal elliptic boundary problems. Proc. Japan Acad. 54 A, 215-220 (1978).

[8] Fujiwara, Tanikawa & Yukita, The spectrum of the Laplacian and boundary perturbation. I. Proc. Japan Acad. vol.54A, 87-91 (1978).

[9] Ozawa. S., Perturbation of domains and Green kernels of heat equations. Proc. Japan Acad. 54A, 322-325 (1978).

[10] Micheletti, Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, inrelazione ad una variazione del campo, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, vol 26. (1972)

[11] --------, Petrica per famiglie di domini limitati e proprieta generiche deglu auto valori, Ann. Scuola Norma. Sup. Pisz, vol. 26, (1973).