数理解析研究所講究録
353巻 1979年 248-256

準3方向と3方向のシンプルマルチヘッド有限オートマタの関係

井上克司・高浪五男・谷口 弘
(山口大学工学部)

1. まえがきと準備

筆者らは，先に2次元テープ上で動作するマルチヘッド有限オートマタの特殊なタイプである種々のシンプルマルチヘッド有限オートマタを導入し，その性質を様々な側面から調べてきた[1,2]。

2次元シンプルk-ヘッド有限オートマトンというのは，k個のヘッドのうちのただ1つのみ（そのヘッドを読取りヘッドと呼ぶ）が入力テープ上の記号を識別でき，残りの$k-1$個のヘッド（これらのヘッドを計数ヘッドと呼ぶ）は，それらがテープ上にあるのかそれとも境界記号上にあるのかのみを識別できるような2次元k-ヘッド有限オートマトンである。k個の各ヘッドが左，右，下の3方向にのみ動くことのできるような2次元シンプルk-ヘッド有限オートマトンは3方向性であると呼ばれ，また読取りヘッドの動きは左，右，下

の3方向に限定されているが，各計数ヘッドは左，右，上，下の4方向に動くことのできるような2次元シンプルk-ヘッド有限オートマトンは準3方向性であると呼ばれる。

本稿では，正方形テープ上で動作する決定性2次元シンプルk-ヘッド有限オートマタ（$k \geq 2$）では，準3方向は3方向より強力であることを示す。

文献〔1, 2〕におけるのと同様に，次の記法を用いる。

$DSP2\text{-}kHTRA^s$ ・・・ 正方形テープ上で動作する3方向決定性2次元シンプルk-ヘッド有限オートマトン

$DSP2\text{-}kHSTRA^s$ ・・・ 正方形テープ上で動作する準3方向決定性2次元シンプルk-ヘッド有限オートマトン

$DSNSP2\text{-}kHTRA^s$ ・・・ 正方形テープ上で動作する3方向決定性検知形2次元シンプルk-ヘッド有限オートマトン

$DSNSP2\text{-}kHSTRA^s$ ・・・ 正方形テープ上で動作する準3方向決定性検知形2次元シンプルk-ヘッド有限オートマトン

上記の各種の2次元シンプルマルチヘッド有限オートマタの定義については，文献〔1〕を参照されたい。以下，例えば，$DSP2\text{-}kHTRA^s$で受理されるすべての正方形テープの集合の族を$\mathcal{L}(DSP2\text{-}kHTRA^s)$と記す。

記号の有限集合Σ上の2次元テープとは，Σの要素からなるm行n列（$m, n \geqq 1$）の方形配列をいう。Σ上のすべての2次元テープの集合を$\Sigma^{(2)+}$と記す。2次元テープ$x \in \Sigma^{(2)+}$に対し，$l_1(x)$, $l_2(x)$はそれぞれxの行の数，列の数を表わし，又，$x_{i,j}$（$1 \leqq i \leqq l_1(x)$, $1 \leqq j \leqq l_2(x)$）は，i行j列に位置するx上の記号を表す。更に，$x[(i,j),(i',j')]$は，$1 \leqq i \leqq i' \leqq l_1(x)$ 且つ $1 \leqq j \leqq j' \leqq l_2(x)$ のときのみ，次の(i), (ii)を同時に満足する2次元テープzとして定義される。

(i) $l_1(z) = i' - i + 1$ 且つ $l_2(z) = j' - j + 1$.

(ii) 各k, r（$1 \leqq k \leqq l_1(z)$, $1 \leqq r \leqq l_2(z)$）に対し，

$$z_{k,r} = x_{k+i-1,\, r+j-1}.$$

2. 結　果

各$k \geqq 1$，各m（$\geqq k$）に対し，

$R_k(m) = \{x \in \{0,1\}^{(2)+} \mid l_1(x) = 1$ & $l_2(x) = m$ & (xは正確にk個の'1'を含む)$\}$

とする．また，各$k \geqq 1$に対し，$A(k)$を次の集合とする。

$A(k) = \{x \in \{0,1\}^{(2)+} \mid \exists m\ (m \geqq 1)\,[l_1(x) = l_2(x) = 2m$ & $\forall j\ (1 \leqq j \leqq m)\,[x[(2j-1,1),(2j-1,2m)] = x[(2j,1),(2j,2m)] \in R_k(2m)]]\}$

補題1　各$k \geqq 1$に対し,

(1) $A(2k+1) \in \mathcal{L}[DSP2\text{-}(k+1)HSTRA^s]$,

(2) $A(2k+1) \notin \mathcal{L}[DSNSP2\text{-}(k+1)HTRA^s]$.

証明　(1)の成り立つことは, 文献〔1〕の定理3の証明中で述べられているのと同様な技法を用いることにより, $A(2k+1)$を受理するような$DSP2\text{-}(k+1)HSTRA^s$を構成できることから明らかである。以下, (2)を証明する。いま, $A(2k+1)$を受理する$DSNSP2\text{-}(k+1)HTRA^s$ Mが存在するとし, Mの状態の個数をg, Mの読取りヘッドをR, k個の計数ヘッドを$H_1, H_2, \cdots, H_k$とする。各$m \geqq 1$に対し,

$$V(m) = \{x \in A(2k+1) \mid \ell_1(x) = \ell_2(x) = 2m\}$$

とする。明らかに, $|R_{2k+1}(2m)| = \binom{2m}{2k+1}$であり†,

$$R_{2k+1}(2m) = \{z_1, z_2, \cdots, z_{\binom{2m}{2k+1}}\}$$

とする。また, 各$(i_1, i_2, \cdots, i_s) \in \{1, 2, \cdots, \binom{2m}{2k+1}\}^s$, $1 \leqq s \leqq m$, に対し,

$$V_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m) = \{x \in V(m) \mid \forall j\,(1 \leqq j \leqq s)[x[(2j-1), (2j-1, 2m)] = x[(2j, 1), (2j, 2m)] = z_{i_j}]\}$$

とする。更に, 各$x \in V(m)$, 各j $(1 \leqq j \leqq m)$に対し,

conf(x, j) $\triangleq$ Mの読取りヘッドRが, xの第$2j-1$行目

---

† 任意の集合Sに対し, |S|はSの要素の数を表す.

を下方に離れた直後のMのコンフィグレイション†

とする．このとき，次の命題が成立する。

<u>命題 1</u>　$x[(2j-1,1),(2j-1,2m)] \neq y[(2j-1,1),(2j-1,2m)]$ なる任意の $x, y \in V(m)$，任意の j $(1 \leqq j \leqq m)$ に対し，

$$\mathrm{conf}(x,j) \neq \mathrm{conf}(y,j).$$

[なぜならば，$\mathrm{conf}(x,j) = \mathrm{conf}(y,j)$ としよう。$x \in A(2k+1)$ であるから，x はMで受理され，$\mathrm{conf}(x,j)$ なるコンフィグレイションでxの第 $2j$ 行目以下を読んでいくとMは受理状態に入る。従って，仮定から，

(i) $v[(1,1),(2j-1,2m)] = y[(1,1),(2j-1,2m)]$ 且つ

(ii) $v[(2j,1),(2m,2m)] = x[(2j,1),(2m,2m)]$

を満たすテープ v ($\ell_1(v) = \ell_2(v) = 2m$) もまた$M$で受理されることになる。これは矛盾である ($v \notin A(2k+1)$ であることに注意)．]

いま，各 $x \in V(m)$，各 j $(1 \leqq j \leqq m)$，各 u $(1 \leqq u \leqq k)$ に対し，

$$\alpha_u(\mathrm{conf}(x,j)) \triangleq \mathrm{conf}(x,j) \text{ における } H_u \text{ の上境界記号 \# からの垂直距離}$$

とする．このとき，次の命題が成立する。

---

† 任意のDSNSP2-kHTRA's M'に対し，M'の制御部の状態とM'のk個のヘッドの入力テープ上での位置情報の対を，M'のコンフィグレイションと呼ぶ。

<u>命題２</u>　十分大きな m，各 s（$1 \leqq s \leqq m-1$），各 $(i_1, i_2, \cdots, i_s)$ に対し，

$$d_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m) \triangleq \operatorname*{Max}_{\substack{x \in V_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m) \\ u \in \{1, 2, \cdots, k\}}} [d_u(\mathrm{conf}(x, s+1)) - d_u(\mathrm{conf}(x, s))]$$

は，少なくとも m のオーダである。すなわち，ある定数 $c > 0$ に対し，$d_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m) \geqq cm$。

[なぜなら，$d_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m)$ が m より小さいオーダであるとする。明らかに，$V_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m)$ の中のテープの第 $2s-1$ 行目を R が下方に離れた直後の M のコンフィグレイション（これは一意的に定まる）から出発したとき，R が第 $2s+1$ 行目を下方に離れた直後に入り得る M の異なるコンフィグレイションの総数は，高々

$$g \cdot \{(2m+2) \cdot d_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m)\}^k \cdot (2m+2)$$
$$< a \cdot m^{k+1} \cdot (d_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m))^k \quad (a \text{ はある定数})$$

である。ところが，$V_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m)$ の中のテープの $[(2s+1, 1), (2s+2, 2m)]$-部分‡の異なるものの総数は，$\binom{2m}{2k+1}$（$= m^{2k+1}$ のオーダ）個である。$d_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}(m)$ が m より小さいオーダとしているから，十分大きな m に対しては，

---

‡ 各２次元テープ x，各 i, i', j, j'（$1 \leqq i \leqq i' \leqq l_1(x)$，$1 \leqq j \leqq j' \leqq l_2(x)$）に対し，$x[(i,j),(i',j')]$ を x の $[(i,j),(i',j')]$-部分と呼ぶ。

$$a \cdot m^{k+1} \cdot (\alpha_{(i_1, i_2, \cdots, i_\ell)}(m))^k < \binom{2m}{2k+1}$$

となり，このようなmに対しては，その$[(2\ell+1, 1), (2\ell+2, 2m)]$-部分が異なるにもかかわらず

$$\mathrm{conf}(x, \ell+1) = \mathrm{conf}(y, \ell+1)$$

となるような$x, y \in V_{(i_1, i_2, \cdots, i_\ell)}(m)$が存在することになり，命題1に矛盾する。]

命題2より，次の(A)が言えるようなある$(i_1, i_2, \cdots, i_{2\lceil k/c \rceil})$‡，ある$x \in V_{(i_1, i_2, \cdots, i_{2\lceil k/c \rceil})}(m)$，ある$u$ $(1 \leqq u \leqq k)$が存在する（十分大きなmに対しては，$\lceil k/c \rceil < m$であることに注意されたい）。

(A): Mの読取りヘッドRがxの1行1列の位置からxを読み始めて，Rがxの第$4\lceil k/c \rceil - 1$行目を下方に離れるまでに，H_uは（少なくとも$2\lceil k/c \rceil \times 1/k$回ほど$cm$コマ以上下方に動き，従って$2\lceil k/c \rceil \times 1/k \times cm \geqq 2m$以上下方に動き）下境界記号#に到達する。

いま，(A)が言えるようなx，uをそれぞれx_1，u_1とし，$x_1 \in V_{(i_1', i_2', \cdots, i_{2\lceil k/c \rceil}')}(m)$とする。Rが$V_{(i_1', i_2', \cdots, i_{2\lceil k/c \rceil}')}(m)$の中のテープの第$4\lceil k/c \rceil - 1$行目を下方に離れた直後のMの

‡ $\lceil b \rceil$は，bより小さくない最小の整数を表す。

コンフィグレイション $conf(x_1, 2\lceil k/c \rceil)$[†] から出発したとき，Rが第 $4\lceil k/c \rceil+1$ 行目を下方に離れた直後に入り得るMの異なるコンフィグレイションの総数は，（k 個の計数ヘッドのうち，H_{u_1} は既に下境界記号♯に到達しているから）高々

$$g \cdot (2m+2)^{2(k-1)} \cdot (2m+2) \cdot (2m+2)$$

である（この式の第２項は H_{u_1} 以外の $k-1$ 個の計数ヘッドの可能な位置の数，第３項はRの可能な位置の数，第４項は下境界記号♯上での H_{u_1} の可能な位置の数を表す）。ところが，$V_{(i_1, i_2, \cdots, i_{2\lceil k/c \rceil})}(m)$ の中のテープの $[(4\lceil k/c \rceil+1, 1), (4\lceil k/c \rceil+2, 2m)]$-部分の異なるものの総数は，$\binom{2m}{2k+1}$ 個である。明らかに，十分大きな m に対し，

$$g \cdot (2m+2)^{2(k-1)} \cdot (2m+2)^2 < \binom{2m}{2k+1}$$

となり，このような m に対しては，その $[(4\lceil k/c \rceil+1, 1), (4\lceil k/c \rceil+2, 2m)]$-部分が異なるにもかかわらず，

$$conf(x, 2\lceil k/c \rceil+1) = conf(y, 2\lceil k/c \rceil+1)$$

となるような $x, y \in V_{(i_1, i_2, \cdots, i_{2\lceil k/c \rceil})}(m)$ が存在することになり，命題１に矛盾する。以上で，(2)の証明は終る。■

補題１より，次の定理が得られる。

---

† $V_{(i_1, i_2, \cdots, i_{2\lceil k/c \rceil})}(m)$ の中のテープをMが読んでいくとき，Rが第 $4\lceil k/c \rceil-1$ 行目を下方に離れた直後のMのコンフィグレイションは，$conf(x_1, 2\lceil k/c \rceil)$ として一意的に定まることに注意されたい。

定理1　各$k \geqq 2$に対し，

(1) $\mathcal{L}$(DSP2-kHTRA^s) $\subsetneqq$ $\mathcal{L}$(DSP2-kHSTRA^s)．

(2) $\mathcal{L}$(DSNSP2-kHTRA^s) $\subsetneqq$ $\mathcal{L}$(DSNSP2-kHSTRA^s)。

注1　補題1の証明と本質的に同様な手法で，非決定性に対しても補題1と同様な結果が導かれ，従って定理1と同様な事実が導かれるが，このことに関しては別の機会に報告する．

文　献

〔1〕井上，高浪，谷口：'3方向2次元シンプルマルチヘッド有限オートマタ（階層性）'，信学論（D），J62-D，No.2，（昭54年2月号）．

〔2〕井上，高浪，谷口：'3方向2次元シンプルマルチヘッド有限オートマタ（閉包性）'，信学論（D），J62-D，掲載予定．