数理解析研究所講究録
353巻 1979年 194-203

多次元コスト関数をもつ有限オートマトンについて

京大 工学部 矢野陽一・内藤昭三・室章治郎
茨木俊秀・長谷川利治

1. まえがき

有限オートマトンの能力を拡大し，一般化するために各種の変形モデルが考えられてきた。オートマトンにコスト関数を付与したsdp (sequencial decision process)（逐次決定過程）[1][3]もその一種であり、組合せ計画問題の表現手段として研究されてきた。このモデルでは入力系列のコストを状態遷移に従って次々に計算し，最終状態に到達したときに、そのコストが最適値をもつ，あるいは，ある指定されたしきい値以下である，ときに限りその系列を受理すると定義する。

本報告では、このsdpモデルを多目的組合せ計画問題の表現を念頭において多次元コスト関数をもつsdpに拡張する。すなわち，コスト関数の値域としてn次元実数空間（ベクトル空間）$R^{(n)}$をとり，コストの大小を通常のベクトルの大小で，最適性をパレート最適にとったモデルである[4][5]。

また，しきい値をもつモデルでは系列のコストがしきい値より（ベクトルの意味で）小さいときに受理するとしている。この結果，従来の1次元コストをもつsdpに比べ，その受理能力は真に増大していることが明らかにされた。

2. 多次元sdp

多次元sdp $\Pi^{(n)}$とは，システム$\Pi^{(n)}=(M,\mathbb{h},\xi_0,\Theta)$である。ここで，nはn次元コストをもつという意味である。すなわち，

$M=(Q,\Sigma,q_0,\lambda,Q_F)$：有限オートマトン；　Q：状態の空でない有限集合．　Σ：アルファベットの有限集合　$q_0\in Q$：初期状態　$\lambda:Q\times\Sigma^*\to Q$：状態遷移関数　$Q_F\subset Q$：最終状態の集合

$\mathbb{h}:R^{(n)}\times Q\times\Sigma\to R^{(n)}$（n次元実数値）コスト関数；ここで$R^{(n)}$はn次元実数空間である。このhの定義域を次の方法により$R^{(n)}\times Q\times\Sigma^*$に拡張できる。すなわち，$q\in Q, x\in\Sigma^*, a\in\Sigma$に対し，

$$\mathbb{h}(\xi,q,\varepsilon)=\xi \quad (\varepsilon\text{は零系列})$$

$$\mathbb{h}(\xi,q,xa)=\mathbb{h}(\mathbb{h}(\xi,q,x),\lambda(q,x),a)$$

$\xi_0\in R^{(n)}$；初期状態に付与された初期コスト

$\Theta\in R^{(n)}$；最終状態に付与されたしきい値

以降，簡単化のため，$\bar{\mathbb{h}}(x)\triangleq\mathbb{h}(\xi_0,q_0,x)$と記す。また，$x\in\Sigma^*$を方策とも呼ぶ。

このsdp $\Pi^{(n)}$に対し，許容方策の集合$F(\Pi^{(n)})$，最適方策の集合$O(\Pi^{(n)})$，受理方策の集合$A(\Pi^{(n)})$を次のように定義する。

許容方策の集合 $F(\Pi^{(n)}) \triangleq \{x \in \Sigma^* \mid \lambda(q_0, x) \in Q_F\}$

すなわち，システムを最終状態にみちびく方策の集合で，正規集合になる。

最適方策の集合 $O(\Pi^{(n)}) \triangleq \{x \in F(\Pi^{(n)}) \mid \sim(\exists y \in F(\Pi^{(n)}))(\mathbb{h}(y) < \mathbb{h}(x))\}$

すなわち，許容方策の中で，それより小さいコストをもつ方策の存在しないものの集合である。

受理方策の集合 $A(\Pi^{(n)}) \triangleq \{x \in F(\Pi^{(n)}) \mid \mathbb{h}(x) \leq \theta\}$

すなわち，許容方策の中で，しきい値以下のコストをもつ方策の集合である。

なお，ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in R^{(n)}$ の大小関係は通常の

$$\begin{cases} \mathbb{a} \leq \mathbb{b} \iff a^i \leq b^i \ (\text{各ベクトルの要素について}) \\ \mathbb{a} < \mathbb{b} \iff \mathbb{a} \leq \mathbb{b} \ \text{かつ} \ \mathbb{a} \neq \mathbb{b} \end{cases}$$

で定義する。1次元実数とは異なり，これは半順序にしかならない。また最適方策の定義はパレート最適(Pareto Optimality: PO)と呼ばれるもので，最適値（および最適方策）は一般に1つとは限らない。

3. sdp とその部分クラスの受理能力

sdp とそのコスト関数のタイプを制限した部分クラスを考え，その最適方策のなす集合のクラス，受理方策のなす集合のクラスについて述べる。

3.1. sdpの最適方策と受理方策

sdp $\Pi^{(n)}$ の最適方策 $O(\Pi^{(n)})$ のなす集合のクラス，受理方策 $A(\Pi^{(n)})$ のなす集合のクラスをそれぞれ $\Omega^{(n)}_{sdp}$, $\Theta^{(n)}_{sdp}$ と記す。すなわち，

$$\Omega^{(n)}_{sdp}=\{O(\Pi^{(n)})\mid \Pi^{(n)}:sdp\}$$

$$\Theta^{(n)}_{sdp}=\{A(\Pi^{(n)})\mid \Pi^{(n)}:sdp\}$$

である。後に述べるsdpの部分クラスについても添字が変るだけで同様に定義される。

[補題] [4] $\mho=O(\Pi^{(n)})$ となるsdp $\Pi^{(n)}$ が存在すれば，$\mho=O(\Pi^{(n+1)})$ となるsdp $\Pi^{(n+1)}$ が存在する。$A(\Pi^{(n)})$ についても同様である。換言すれば

$$\Omega^{(n+1)}_{sdp}\supseteq\Omega^{(n)}_{sdp}\qquad n\geq 1$$

$$\Theta^{(n+1)}_{sdp}\supseteq\Theta^{(n)}_{sdp}\qquad n\geq 1$$

他の部分クラスについても同様である。

sdpの受理能力に対しては次の定理がある。

[定理1] [4] 任意の $\mho\subset\Sigma^*$ に対し，$O(\Pi^{(2)})=\mho$ となる2次元sdp $\Pi^{(2)}$ が存在する。$A(\Pi^{(2)})$ についても同様である。換言すれば

$$\Omega^{(n)}_{sdp}=\Theta^{(n)}_{sdp}=2^{\Sigma^*}\qquad n\geq 2$$

3.2. 単調sdp (monotone sdp : msdp)

一般のsdpに対して Dynamic Programming (DP) の「最適性の

原理」が成立するようにコスト関数に制限を加えたものが，単調sdp（msdp）と呼ばれる部分クラスである。すなわち，次式のコストの単調性が成立する[1][2]。

$$\xi_1 \le \xi_2 \Rightarrow \mathbb{h}(\xi_1,q,a) \trianglelefteq \mathbb{h}(\xi_2,q,a) \qquad q\in Q\ ,\ a\in\Sigma \qquad (*)$$

ここで ξ_1, ξ_2 は状態 q で実際ある入力系列 x に対してとりうるコストに限定されている。しかし，msdp ではコスト関数 $\mathbb{h}$ が有界であると仮定しても一般性を失なわないことから，有界な $\mathbb{h}$ に限定して議論すると式(*)はいつでも全域的に単調な関数に拡張できることが分かっている。

このmsdp $\Pi^{(n)}$ に対して

$$G(q) \triangleq PO\{\ \bar{\mathbb{h}}(x)\,|\,\lambda(q_0,x)=q,\ x\in\Sigma^*\ \}$$

とおくと、各 $G(q)$ のあいだに次のDPの関数方程式が成立する[4][5]。

$$G(q_0) = PO\ \{\ \{\xi_0\}\cup\bigcup_{q'\in Q}\{\ \mathbb{h}(G(q'),q',a)\,|\,\lambda(q',a)=q_0\ \}\ \}$$
$$G(q) = PO\ \{\bigcup_{q'\in Q}\mathbb{h}(G(q'),q',a)\,|\,\lambda(q',a)=q\ \} \qquad q\ne q_0$$

なお，半順序集合 S に対し $PO\{S\}$ はパレート最適な要素すべてからなる集合を表わし，また $H\subset R^{(n)}$ に対し，

$$\mathbb{h}(H,q,a) \triangleq \{\ \mathbb{h}(\xi,q,a)\,|\,\xi\in H\ \}$$

とする。この関数方程式を解く(†)ことができれば，

(†) アルゴリズムの存在を論じる際は，$\mathbb{h}$ を帰納的関数と仮定する等の変更が必要であるが詳細は省略し区別せずに論じる。

$$O(\Pi^{(n)}) = \{\ x \in F(\Pi^{(n)})\ |\vec{h}(x) \in G^*\ \}$$

$$G^* \triangleq PO\ \{\bigcup_{q \in Q} G(q)\ \}$$

として$O(\Pi^{(n)})$を求めることができるが，残念ながらそのような一般的なアルゴリズムは存在しないことが示されている[2]。しかし，この関係式は最適方策のもつ重要な性質を明示するものであり他の適当な問題の構造を利用できれば最適方策の計算が可能になる場合も種々考えられよう。

msdp の最適方策の集合のクラス$\Omega^{(n)}_{msdp}$，受理方策の集合のクラス$\Theta^{(n)}_{msdp}$については次の定理がある。

[定理2][5] 任意の$U \subset \Sigma^*$に対し，$O(\Pi^{(2)}) = U$となる，2次元msdp $\Pi^{(2)}$が存在する。$A(\Pi^{(2)})$についても同様である。換言すれば，

$$\Omega^{(n)}_{msdp} = \Theta^{(n)}_{msdp} = 2^{\Sigma^*} \qquad (n \geq 2)$$

定理1と定理2から，$n \geq 2$のときコスト関数に「単調性」という制限を加えても能力はsdpと変らず，事実上この制限が「効いて」いないことが分かるが，それは (1)関数方程式を解くのが一般的に不可能である(サイクリックな構造をしていることによる)，(2)関数方程式の左辺$G(q)$のベクトルが1つに決まらず(パレート最適性の定義)無限個のベクトルを含む可能性があること，の2点に起因する。(1)は1次元msdp の場合にもあてはまることだが，(2)は多次元msdp の

場合にのみ起る問題であり最適方策の集合をより複雑(任意のUを実現できるまで)にする結果となる。このような一般的すぎる結果は，msdp の定義が $O(\Pi^{(n)})$ を計算するという立場からは弱すぎることを示唆している。しかし，(1)ベクトル空間内には順序関係≥が自然に導入されること，および(2)パレート最適性は最適基準の中でいちばんゆるやかなものであること，からこの結果はDPの適用可能なモデルの最大能力を示したものという意味付けができよう。

3.3. 正単調sdp (positively monotone sdp : pmsdp)

上述のmsdp にもう1つの制限「正単調性」を付け加えたモデルを考え正単調sdp (pmsdp)と呼ぶ。すなわち，状態遷移に従ってコストが小さくなることはない：

$$\xi \le h(\xi,q,a) \qquad q\in Q, a\in\Sigma$$

という条件である。実用的には多くの組合せ計画問題がpmsdpに表現できることが知られている。このモデルは，コスト関数に相当強い制約を設けているため，$\Omega^{(n)}_{pmsdp}$，$\Theta^{(n)}_{pmsdp}$ はオートマトンと同じく正規集合のクラスになっている。

[定理3] [4][5] $U\subset\Sigma^*$ に対して，$U=O(\Pi^{(n)})$ となるn次元pmsdp $\Pi^{(n)}$ が存在する必要十分条件は　U：正規集合である。$A(\Pi^{(n)})$ についても同様である。換言すれば，

$$\Omega^{(n)}_{pmsdp} = \Theta^{(n)}_{pmsdp} = \text{"Class of Regular Sets"}$$

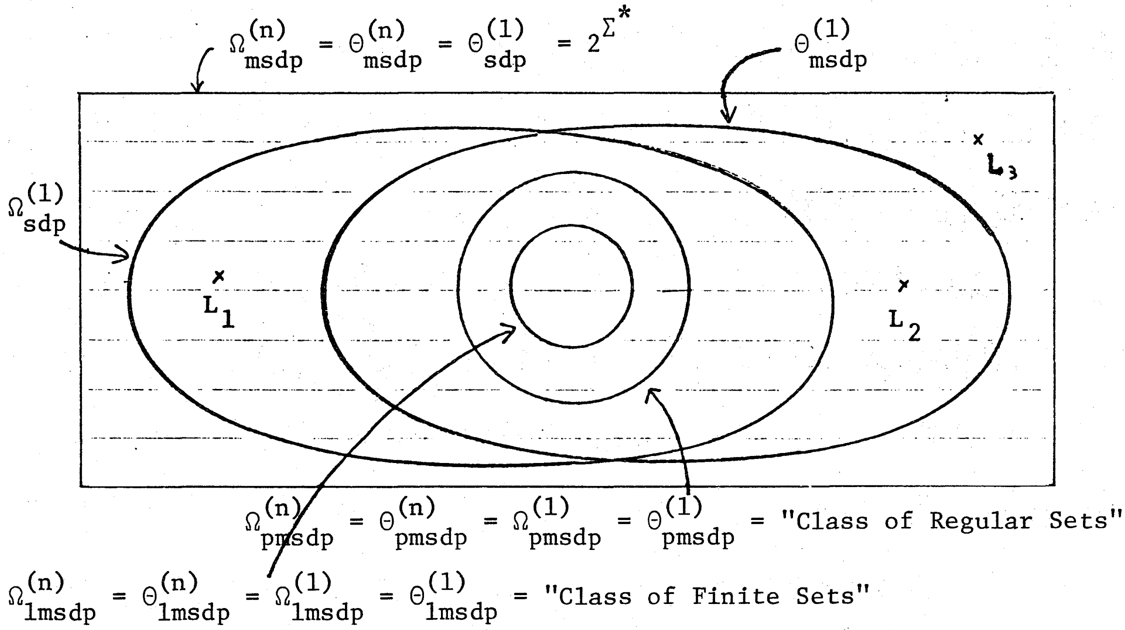
3.4. lmsdp (loop-free monotone sdp : lmsdp)

最後に、msdp に対し次のような（オートマトンに対する）制限：「$F(\Pi^{(n)})$ は有限集合である」を付け加えたモデル（つまり死状態を除き状態遷移は閉路を作らない）を考え，lmsdp と呼ぶ。このモデルは極めて限定されたものであるが現実に生ずる組合せ計画問題の表現という観点からは有用なモデルである。

[定理4] [4][5] $U \subset \Sigma^*$ に対し，$U = O(\Pi^{(n)})$ となる n 次元 lmsdp $\Pi^{(n)}$ の存在する必要十分条件は U：有限集合 である。$A(\Pi^{(n)})$ についても同様である。換言すれば，

$$\Omega^{(n)}_{\mathrm{lmsdp}} = \Theta^{(n)}_{\mathrm{lmsdp}} = \text{"Class of Finite Sets"}$$

3.5. 各クラスの受理能力の図 [1],[2],[4],[5]



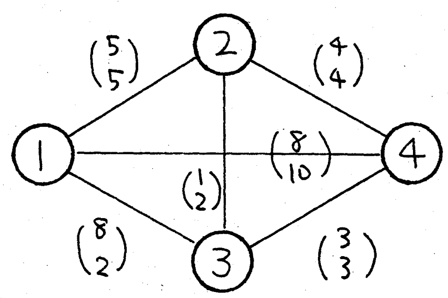
$L_1=\{a^ib^j \mid i=j\geq 0\}, L_2=\{a^ib^j \mid i\geq j\geq 0\}, L_3=\{a^ib^j \mid i\neq j\geq 0\}$

－図1－

4. 多目的組合せ計画問題とそのsdp表現

簡単な組合せ計画問題とそのsdp表現について述べる。

例 2次元コスト（たとえば時間と料金）をもつ巡回セールスマン問題を考える（図2）。各枝に付された2次元ベクトルはその枝を通行するコストを表わす。節点1からのハミルトン経路のうちパレート最適なコストをもつのは 1-2-3-4-1, 1-4-3-2-1, 1-3-2-4-1, 1-4-2-3-1, で各コストは $\binom{17}{20}$, $\binom{17}{20}$, $\binom{21}{18}$, $\binom{21}{18}$ である。

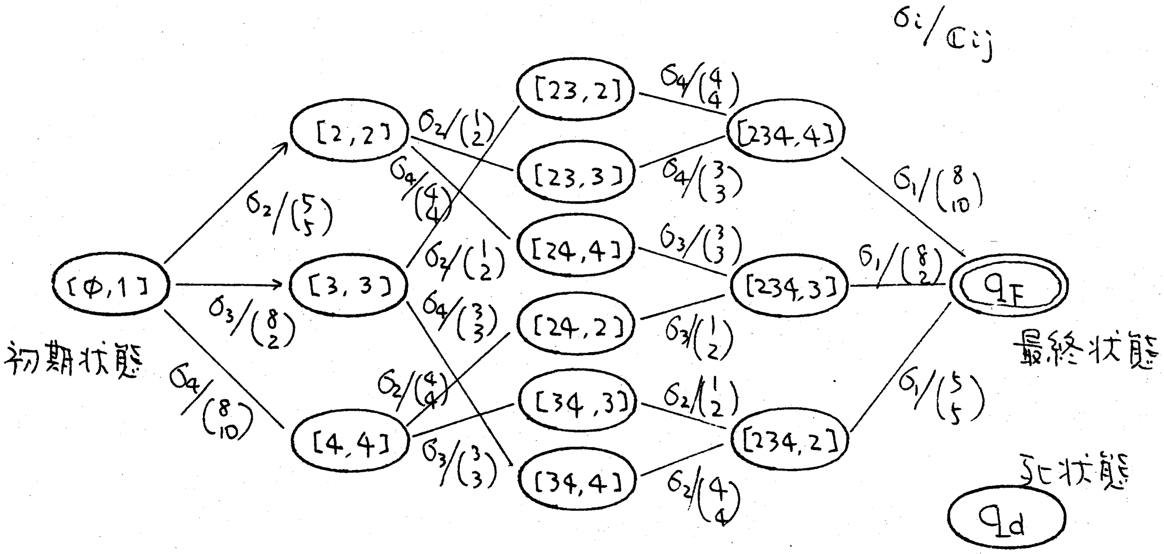


— 図2 —

この問題を表現するsdp $\Pi^{(2)}$ は次のように作られる（図3）。アルファベット $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$（方策の集合），各 σ_i は「次に節点 i に行く」ことを表わす。状態としては、「すでに回った節点の集合」と「今いる節点」のペア，初期状態 $[\phi, 1]$，最終状態 q_F，死状態 q_d，をとる。すなわち，

$$Q = \{[S, i] \mid S \subset V - \{1\},\ i \in S\} \cup \{[\phi, 1], q_F, q_d\}$$

コスト関数 h は $h(\xi, [S, i], \sigma_j) = \xi + c_{ij}$（$c_{ij}$ は節点 i, j 間のコスト）と書かれる。このsdp $\Pi^{(2)}$ では、$F(\Pi^{(2)})$ がハミルトン経路の集合に等しく，$O(\Pi^{(2)})$ が巡回セールスマン問題の（パレート）最適解を表わしている。なお，このsdp $\Pi^{(2)}$ は pmsdp でもあり ℓmsdp でもある。



初期コスト $\xi_0=\binom{0}{0}$ （死状態への状態遷移は省略）

－図3－

〔謝辞〕常日頃，討論頂く長谷川研究室の皆様に感謝します。

－文献－

〔1〕 T.Ibaraki [1972]; Representation Theorems for Equivalent Optimization Problems, Information and Control. Vol.21,No.5.December,1972.

〔2〕 茨木 [1979] 組合せ最適化の理論 信学会出版

〔3〕 R.M.Karp and M.Held [1967]; Finite State Process and Dynamic Programming, SIAM Journal of Applied Mathmatics. Vol.15,No.3,May,1967.

〔4〕 内藤 [1977] 多次元コスト関数をもつ有限オートマトンの表現定理 京都大学工学部数理工学科特別研究報告書

〔5〕 矢野 [1978] 多次元コスト関数をもつ有限オートマトンによる表現定理 京都大学工学部数理工学科特別研究報告書