数理解析研究所講究録
353巻 1979年 87-96

2分検索木上のセレクティブトラバース に関するある改良

広島大学 工学部 菊野 亨
楠本 博巳

1. まえがき

2分検索木は格納されているレコードへのアクセス及びファイルの変更が容易であるので，大規模なファイルを構成する際の重要な技法としてよく知られている[1]．通常，2分検索木の各節点v_iには(k_i，P_i)の2項組のデータが保持される．ここでk_iはキーと呼ばれ，P_iは対応するレコードが実際に格納されているメモリ上の領域へのポインタとする．レコードへのアクセスに関する興味ある問題の1つに，区域条件C_j=(l_j，r_j)(l_j，r_jは共に非負整数で，$l_j < r_j$)の系列$L = C_1 C_2 \cdots C_n$が与えられ，少くとも1つのC_jに対し$l_j < k_i < r_j$なるキーをもつ2分検索木上の全ての節点を，その途中の過程で参照する節点の数を最小にしてアクセスするというセレクティブトラバースの問題がある．

Driscoll らは2分検索木上の各節点に3ビットのマーカ

フィールドを設け，7つのマーカを用いることにより，上述の問題を能率よく解いている[1]．本論文では，若干の（時間的な）オーバヘッドを犠牲にすれば，4つのマーカで十分であること，すなわちマーカフィールドを2ビットにまで減じることが可能であることを示す．

2. 準備

［定義1］　2分検索木Tの各節点v_iに格納されているデータはポインタフィールド，データフィールド及びマーカフィールドの3つに分かれている．

（i）ポインタフィールドには，左部分木へのポインタLEFT，右部分木へのポインタRIGHT が含まれている．

（ii）データフィールドには2項組のデータ（k_i，P_i）が保持されている．ここでk_iはキーと呼ばれ$\mathbb{N}$（$\mathbb{N}$は非負整数全体の集合）の要素である．P_iは対応するレコードが格納されている領域へのポインタであるが，今の場合，P_iの値については関心がないので省くことにする．

（iii）マーカフィールドは3ビットの容量をもつ．

［定義2］　区域条件C_jとは2項組（l_j，r_j）のことである．但し，l_jとr_jは共に$\mathbb{N}$のある要素であって，関係式$l_j<r_j$が成立するものとする．区域条件の系列$C_1 C_2 \cdots C_n$をLと表す．Lにおいて$l_p \leq l_q < r_p$あるいは$l_p < r_q \leq r_p$を満たす相

異なる添字p，qが存在するなら，Lにはオーバラップが存在するという．

［定義３］　２分検索木T上の節点v_iのキーk_iと区域条件$C_j=(l_j, r_j)$に対し，$l_j<k_i<r_j$が成立するなら，節点v_iは区域条件C_jを満たすという．Tと区域条件の系列Lに対し，Lに属する区域条件の少なくとも１つを満たす節点の集合をT（L）と表す．

［定義４］　２分検索木Tと区域条件Lが与えられ，その途中の過程で参照する節点の数を最小に押えてT（L）に属する節点を全てアクセスする問題をセレクティブトラバース（selective traverse）の問題と呼ぶ．以降では単に問題STと記すことにする．

Driscollらは，区域条件の系列Lにオーバラップが存在しない場合について問題STを解くアルゴリズムSELECT（以降ではアルゴリズムSと呼ぶ）を与えている．アルゴリズムSでは，２分検索木Tの各節点にあるマークフィールド（３ビット）上で識別可能な７つのマークi，l，r，a，s，n，fを用いており，スタック，キューなどは用いていない．

３．改良

アルゴリズムSに対し，使用するマークの数を７から４に

減じる，すなわちマーカフィールドのビット数を１ビット減じることが可能であることを示す．

３．１　基本方針

ここで提案するアルゴリズムはDriscollらと基本的に同じ立場をとり，スタックは用いず，各節点ごとに付加したマーカフィールドの値を参照しながら２分検索木$\mathcal{T}$をたどる．但しマーカフィールドを１ビット減じて２ビットとするため，使用するマーカもi，ℓ，r，aの４つとする．改良アルゴリズムは次の２つのフェーズに分かれている．

フェーズⅠ：$\mathcal{T}$とLに対し，集合$\mathcal{T}$（L）に属する節点を含む部分木の周囲に位置する節点に対し，マーカℓ，rとaを境界記号として書き込む．

フェーズⅡ：フェーズⅠで準備した各節点のマーカと，必要ならば左子節点および右子節点のマーカとを調べながら$\mathcal{T}$上をたどっていって，$\mathcal{T}$（L）に属する節点だけに必要な処理を行う．

フェーズⅠはマーカsをℓで代用することを除けば，アルゴリズムSとほぼ同じ．フェーズⅡでは，アルゴリズムSで用いていたマーカfをℓあるいはrで，マーカnをiでそれぞれ表しておいて，ある節点υにおいて（アルゴリズムSで行ったマーカの区別が）必要となればυの左子節点および右

子節点のマーカを調べることにより，アルゴリズムSのステップIIの動きを正しくシミュレートしている．

3．2　改良アルゴリズムの概要（マーカの説明）

マーカの説明を行うことによって改良アルゴリズム，特にフェーズIIの概要を述べる．先ず，アルゴリズムSに存在したが，改良アルゴリズムでは省いたマーカについて簡単に説明する．次に2，3の記号を準備しておく．

ℓson（v）：節点vの左子節点（left son）．

ℓsub（v）：節点vの左子節点を頂点とする部分木．

rson（v）：節点vの右子節点（right son）．

rsub（v）：節点vの右子節点を頂点とする部分木．

各マーカの設定されている節点をvとする．

マーカS：改良アルゴリズムにおいては，各節点vに対し先ずℓsub（v）内をたどり，その後でrsub（v）内をたどることとし，マーカSをマーカℓで代用する．

マーカn：マーカiあるいはaのnへの変換を省き，直接，処理を行う．マーカnをマーカiで代用する．

マーカf：節点vの親に移る時には，ℓson（v），rson（v）のマーカが共にiとなっていることに注目して，マーカrあるいはℓで代用する．なおℓson（v）とrson（v）のマーカを調べることにより，fの復元は可能（詳細は後述のマ

ーカrを参照).

次に，改良アルゴリズムで使用する4つのマーカについて詳しく述べる．アルゴリズムSのフェーズⅡの実行前における，マーカrの節点vの周りの状況は図1の通りである．又マーカℓの節点v，マーカaの節点vの周りの状況はそれぞれ図2，図3の通りである．なお図中のマーカは$\alpha \in \{r, a, s\}$，$\beta \in \{\ell, a, s\}$とする．

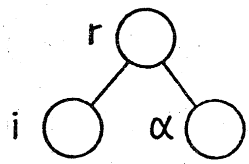


図1　マーカrの節点

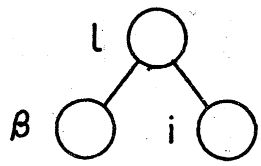
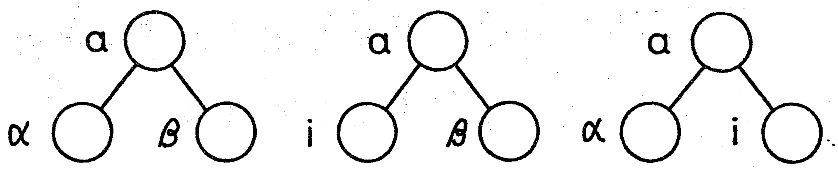


図2　マーカℓの節点



(1) 場合1　(2) 場合2　(3) 場合3

図3　マーカaの節点

①マーカi：基本的にはアルゴリズムSと同じ．

②マーカr：アルゴリズムSのフェーズⅡでは先ず節点vのマーカr(図1参照)をfに変換し，rson(v)に移り，rsub(v)内での実行が終了すると，rson(v)のマーカαをiに変換し図4の形で(マーカfの)vに再び戻ってくる．

そこで改良アルゴリズムのフェーズⅡでは，vのマーカrを(fに)変換することなく，常にrson(v)に移る．必要

なら再びvに戻ってきた時点でrson(v)のマーカがiかどうかを調べることによって，rとfの区別は可能である．

③マーカℓ：マーカSの説明で述べた様に，改良アルゴリズムではマーカSをℓで代用するので，図5の形と図2の形のマーカℓの節点vを同時に取り扱うことが必要となる．図でマーカは$\alpha' \in \{r, a, \ell\}$，$\beta' \in \{\ell, a\}$である．

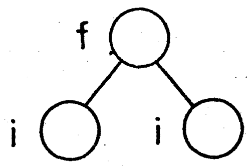


図4　マーカfの節点

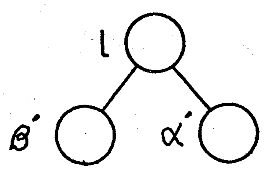


図5　マーカℓの説明図

改良アルゴリズムのフェーズIIでは，節点vのマーカℓをrに一旦変換しておいて，ℓson(v)に移る．こうして，ℓsub(v)内での実行が終了して再びvに戻った時，(②で述べた手順に従えば)図2なら図4(fはrとなっている)の形に，図5なら図1の形にそれぞれ遷移して，ℓとSの区別が正しく実現される．

④マーカa：アルゴリズムSのフェーズIIではマーカaは図3の形で現れる．この時，マーカiの節点(ℓson(v)あるいはrson(v))を頂点とする部分木内には，ある区域条件を満たす(マーカiの)節点だけが存在する．改良アルゴリズムのフェーズIIでは，ℓson(v)のマーカがiか否か判定し，iならℓsub(v)に対しLEFTINNERを呼ぶ．

LEFTINNERの実行の最後に（$v \in \mathcal{T}$（ム）なので）vに対し処理を行い，vのマーカaをrに変換してvに戻り，以降は②のマーカrの手順に帰着される．iでないならvのマーカaをiに変換し$lson$（v）に移る．$lsub$（v）内での実行が終了してvに戻ると，vに対し処理を行う．次に$rson$（v）のマーカがiか否かを判定し，iならvのマーカiをaに変換し，$rsub$（v）に対しRIGHTINNERを呼び，RIGHTINNERの実行の最後にvのマーカaをrに変換する．以降は②のマーカrの手順に帰着される．

4．評価

評価に必要な記号の説明をしておく．

C：定数（例えば区域条件に含まれるl_iとかr_i）と２分検索木内の節点のキーの大小比較演算．

T：２分検索木内の節点のマーカの判定演算．

P：２分検索木内の節点（に含まれるデータ）に対し実際に処理を行う演算で，アルゴリズムではPROCESSという命令で記述している演算．

次にN個の節点を含む完全２分検索木$\mathcal{T}$とオーバラップのない区域条件のリスト$L = C_1 C_2 \cdots C_n$に対する問題STについて，アルゴリズムの実行時間に関する評価を行う．以下ではいずれも最悪の場合を取扱うものとする．但し，＃（C_k）

は区域条件C_kを満たす節点の数とする．

Driscoll らのアルゴリズムSの場合[1]

$$[6n\log N+4\sum_{k=1}^{n}\#(C_k)]T$$
$$+[2n\log N]C+[\sum_{k=1}^{n}\#(C_k)]P \cdots (1)$$

改良アルゴリズムの場合

$$[8n\log N+4\sum_{k=1}^{n}\#(C_k)]T$$
$$+[2n\log N]C+[\sum_{k=1}^{n}\#(C_k)]P \cdots (2)$$

（1）式と（2）式を比較すれば改良アルゴリズムの場合，アルゴリズムSに比べて，（$2n\log N$）だけ余計に時間がかかることが分かる．しかし，上記の3つの演算C，T，Pの内，演算Tに要する時間は他の2つに比べ比較的少ないと予想される[1]．したがって，この時間的損失はマーカフィールドの1ビットの削減により，十分償われると思われる．

5．むすび

Driscoll らが与えていたアルゴリズムSに対し，1ビットの削減が可能であることを示した．なお，改良アルゴリズムの場合の評価を厳密に行えば，$0\leq P\leq 1$なるある数Pに対し，$[2n\log N-P\sum_{k=1}^{n}\#(C_k)]T$だけのオーバヘッドとなり，改良アルゴリズムの方がアルゴリズムSよりも速くなることも多くの場合について実測されている．フェーズⅡをフェーズⅠに組み込んだアルゴリズムも得ており，別の機

会に報告する予定である.

文 献

(1) J.R.Driscoll and Y.E.Lien:"A selective traversal algorithm for binary search trees", CACM,21,6,p.445 (June 1978).