

二次元一様等方性乱流の性質

京大理 築友正

柳瀬 真一郎

§ 1. はじめに

二次元乱流は近年さまざまの方面から相当の関心を集め、これに関する論文も非常に増加している。その理由は一つには、二次元乱流の性質が三次元乱流やそのモデル化である、Burgers 乱流とは大きく違うことである。流体運動が二次元空間内に限定されるため、普通の三次元乱流では重要な渦のひき伸ばしがなくなる。そのため二次元乱流は三次元乱流よりも強い制限の下で、よりデリケートなふるまいを示すことになる。特に重要なのはエネルギーが低波数領域へ流れる、いわゆる逆カスケードである。この事実は流れが準二次元的とみなされる気象現象では非常に重い意味を持っている。というのは、観測にかからぬ小さなスケール (Subgrid Scale) の運動が次第に大きなスケールに影響を与える様になるからである。このため数値予報は、根本的な不確定性をはらんでいる。また近年注目をあびている現象に、強い磁場

の下でのMHD乱流がある。磁場が強い時、その磁場に垂直な面内でMHD乱流はほぼ2次元的になることが実験的に観測されている。この現象は特に、地球磁場に関する乱流ダイナモで重要な役割を果たすはずである。

2次元乱流に関心を寄せているのは何も地球物理学的な方面からばかりではない。2次元乱流は古く Onsager (1949) 以来、統計物理学の興味の対象となっている。なぜなら、2次元乱流の非粘性の極限のモデルとして渦系の集合を考えると、それが簡単な力学系となるからである。また渦系モデルにしなくても、波数空間で非粘性2次元乱流を考えると、たとえば負の温度とも呼べる状態など興味深い性質があらわれる。(もちろん非粘性2次元乱流はモデルであって、たぶん2次元乱流の粘性ゼロの極限とは異なる、ていると思われる)

最後に、2次元乱流の面白さは数値実験と比較しながら理論を作っている点にある。3次元乱流に関しては計算機はまだ能力不足であるが、2次元乱流ではどうやら乱流状態を取り扱えるレベルに達した様に思われる。厳密に2次元の流れは自然には存在しないから計算機実験との比較は理論の重要な確証である。

今回は2次元一様等方性乱流の性質を Quasi-equilibrium zero cumulant approximation を用いて調べた。これは以

前、多重尺度キ、4ラント展開と呼んでいたものであるが、この呼び方の方がより適切である。この近似の詳細については Tatsumi のレビュー (Adv. in Appl. Mech. に掲載予定) に詳しい説明があるのでそちらを参照していただきたい。以下この近似を QEACA と略称する。

得られた結果は、 k^3 領域の存在、ポリストロフィーカタストロフの発生 (内容については後述) などが中心となる。

§2. 2次元乱流の一般的性質

2次元非圧縮性流体の運動は、次の渦度方程式によって記述される。渦度を $\omega(x)$ 、流れ関数を $\psi(x)$ とすると、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \Delta \omega, \quad (1)$$

$$\omega = -\Delta \psi,$$

となる。 ν は動粘性係数である。 $\chi(k)$ を ω のフーリエ変換とすると、フーリエ空間では上の方程式は次の様になる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \chi(k) = \int \frac{k'_x k_y - k_y k'_x}{(k - k')^2} \chi(k') \chi(k - k') dk' \quad (2)$$

一様等方性の乱流場を仮定して、相関関数 Ω 、更を次の様に導入する。ここで k はイフトル k の絶対値をあらわす。

$$\langle \chi(\underline{k}) \chi(\underline{k}') \rangle = \Omega(\underline{k}) \delta(\underline{k} + \underline{k}')$$

$$\langle \chi(\underline{k}) \chi(\underline{k}') \chi(\underline{k}'') \rangle = \Phi(\underline{k}, \underline{k}', \underline{k}'') f(\underline{k} + \underline{k}' + \underline{k}'')$$

Ω , Φ はそれぞれ、2次, 3次のフェイラントである。乱流を特徴づける重要な量の多くは $\Omega(\underline{k})$ を用いて次の様にあらわされる。なお $\Omega(\underline{k})$ は渦度密度スペクトルと呼ばれる。

$$E(\underline{k}, t) = \pi \Omega(\underline{k}, t) / k \quad (\text{エネルギー-スペクトル})$$

$$V(\underline{k}, t) = \pi k \Omega(\underline{k}, t) \quad (\text{エントロピー-スペクトル})$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle u(x)^2 \rangle = \int_0^{\infty} E(k, t) dk \quad (\text{エネルギー})$$

$$Q(t) = \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle = \int_0^{\infty} V(k, t) dk \quad (\text{エントロピー})$$

$$P(t) = \frac{1}{2} \langle (\nabla \times \omega)^2 \rangle = \int_0^{\infty} k^2 V(k, t) dk \quad (\text{ヘリシティ})$$

ただし、

$$\omega = (0, 0, \omega)$$

$$u(x) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right)$$

乱流現象で常に興味のある中心となるのは粘性係数が十分小さい時の統計量の漸近的挙動である。方程式(2)より、 Ω の時間的変化を示す式を作りそれから、 E , Q , P の従う式を得ると以下の様になる。

$$\frac{dE}{dt} = -2\nu Q \quad (\equiv -\epsilon) \quad (3)$$

$$\frac{dQ}{dt} = -2\nu P \quad (\equiv -\eta)$$

2次元では、 $E(t) \leq E(0)$, $Q(t) \leq Q(0)$ が成立しているから $\nu \rightarrow 0$ の極限では $\epsilon \rightarrow 0$ となる。この事実から、2次元乱流ではコルモゴロフの仮設はなり立たない。従って k^{-3} 領域は存在しないことになる。(外部からエネルギーを注入する場合全く別になる) 一方、 P は粘性ゼロの極限で保存されることは証明されているから、 $\nu \rightarrow 0$ の極限で2つの可能性が存在する。一つは $\eta \rightarrow 0$ で、もう一つは $\eta \rightarrow$ 有限値である。後者が成立する場合には、3次元におけるコルモゴロフ理論と同様な議論が可能となる。2次元ではエンストロフィの散逸波数として、 $k\eta = (\eta/\nu^3)^{1/2}$ を選ぶことができて、平衡領域でのエネルギースペクトラは以下の様な形となる。

$$E(k) = \eta^{2/3} k^{-3} F(k/k_\eta)$$

ここで F は無次元の任意関数である。従って平衡領域内で、粘性の支配的な領域が存在すればそこでは

$$E(k) = \eta^{2/3} k^{-3} F(0)$$

となり k^{-3} 領域があらわれる。(Leith (1968), Kraichnan (1967), Batchelor (1969))。今回の研究の結果は、 η が有限値となることを示している。またそれに伴い、 k^{-3} 領域が存在する。なお η が有限値にとどまる時は、 P は ν' で発散する。これをパリンストロフィ-カタストロフと呼ぶ。

§3. エネルギー-スペクトル方程式

(2)式から、 Φ_2 4ラント方程式の系列を作り、それに Q.E. ZCA を適用すると、 Ω と Ψ の閉じた連立方程式が得られるが、それから Ψ を消去すると次の様な、渦度密度スペクトル方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right)\Omega(k) = \Psi(k) \quad (4)$$

$$\Psi(k) = 2 \iint dk' dk'' f(k, k', k'') \frac{(k^2 - k'^2)(k'^2 - k''^2)}{k^2 k''^2} \times \{\Omega(k') - \Omega(k)\} \Omega(k'') e(t)$$

$$\hat{f}(k, k', k'') = \sqrt{\{(k'+k'')^2 - k^2\} \{k^2 - (k'-k'')^2\}} / k' k''$$

$$e(t) = \frac{1 - \exp\{-\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)\}}{\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)}$$

積分は、 $|k'-k''| < k < |k'+k''|$, $k', k'' \geq 0$ を満たす k', k'' について行う。 $\Psi(k)$ と $\Phi(k, k', k'')$ との関係は次式で与えられる。

$$\Psi(k) = \int dk' (k_y k_x - k_x k_y) \left\{ \frac{\Phi(k, k', k' k'')}{(k+k')^2} - \frac{\Phi(k, k', -k' k'')}{(k-k')^2} \right\}$$

— (5)

(4)式を導く際、 $\Psi(k, 0) = 0$ を仮定した。これは、 $\Psi(t=0) = 0$ と仮定すると得られる条件で、初期に乱流場が Gaussian であるなら、成立する。 $\hat{f}(k, k', k'')$ が k' と k'' の入れかえに対して不変であることは便利な性質である。 $\Psi(k)$ を用いると、

さらに次の様な乱流統計量が計算される。

$$T(k, t) = \pi \Psi(k, t) / k \quad (\text{エネルギー-トランスファー関数})$$

$$W(k, t) = \pi k \Psi(k, t) \quad (\text{エントロピー-トランスファー関数})$$

$$S_2(t) = -2 \frac{\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \rangle}{\left[\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \right]^{\frac{1}{2}} \left\langle \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right\rangle}$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\left(\int_0^{\infty} k^3 \Psi(k) dk \right)}{\left[\int_0^{\infty} \Omega(k) k^3 dk \left(\int_0^{\infty} k \Omega(k) dk \right)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

(2次元スキュー-ネスファクター)

通常のスキュー-ネスファクターは2次元では恒等的にゼロなので、2次元スキュー-ネスファクターと呼ばれる量が時々使われる。さらに通常の微分距離以外に、次の様な2次元微分距離を定義しておく。

$$\lambda_2(t) = \frac{\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}}{\sqrt{\langle \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \rangle}} = \sqrt{2 \int_0^{\infty} k \Omega(k) dk / \int_0^{\infty} k^3 \Omega(k) dk}$$

方程式(4)の解の性質を詳しく調べる前に、方程式が2次元乱流に対して当然満たされるべきいくつかの条件を満足していることを示す。2次元乱流では非粘性の場合、エネルギーだけでなくエントロピーも保存されなければならないが、これは(4)で満たされている。またスペクトル関数は、初期に負の値を与えなければ、負値を取ることはない。

§ 4. 高レイノルズ数における解の漸近的ふるまい
 粘性が非常に小さい時の解の漸近的ふるまいを調べる準備として、無次元の変数を導入する。初期時刻における代表波数を k_0 、代表速度を u_0 とすると初期レイノルズ数は次の様に見える。

$$R = u_0 / \nu k_0.$$

さらに無次元波数 K 、無次元時間 T を次の様に導入する。

$$K = k / k_0.$$

$$T = u_0 k_0 t.$$

粘性が非常に小さい高レイノルズ数の状態で、エネルギースペクトルが時間とレイノルズ数に関して相似になるとすると、スペクトル形は次の様になると考えられる。

$$E(k, t) = E_0 R^\alpha T^\beta f(K/R^\gamma T^\delta) \quad (6)$$

$$E_0 = u_0^2 / k_0.$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は指数をあらわす定数で、 f は無次元の関数である。指数を求めるため(4)式を、 $E(k, t)$ を使って書きなおすと次の様になる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) E(k, t) = T(k, t) \quad (7)$$

$$T(k, t) = \frac{2}{\pi} \iint dk' dk'' \tilde{f}(k, k', k'') \cdot \frac{(k^2 - k'^2)(k'^2 - k''^2)}{k^2} \\ \times \{kE(k') - k'E(k)\} E(k'') e^{it}$$

$$\tilde{f}(k, k', k'') = \hat{f}(k, k', k'') / k' k''$$

波数領域によつて異なる、たゞ相似法則が成立すると考えられるから、領域に於て相似則を求める。

(i) $\nu k^2 \ll 1$ (Energy containing range)

$e(t) \equiv 1$, と置くことができる。この領域における、指数の値をそれぞれ、 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ とする。(6)を(7)に代入して、両辺の R, T のべきを比較すると、

$$\alpha_1 + 3\delta_1 = 0,$$

$$\beta_1 + 3\delta_1 = -2,$$

となる。この領域の相似則が粘性によらないと考えると、

$$\alpha_1 = \delta_1 = 0, \quad (8)$$

となる。さらにエネルギーの大半がこの領域に含まれていると考えられ、2次元では粘性がゼロの極限ではエネルギーの減衰はないから、

$$E(t) = \int_0^\infty E(k, t) dk = E_0 T^{\beta_1 + \delta_1} \int_0^\infty f(s) ds,$$

より、

$$\beta_1 + \delta_1 = 0.$$

従つて

$$\beta_1 = -\delta_1 = 1, \quad (9)$$

となる。

(ii) $\nu k^2 \gg 1$ (Quasi-equilibrium range)

$e(t) \equiv \frac{1}{\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)}$, と置くことができる。この領域における指数の値をそれぞれ、 $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ とする。(6) と (7) を代入して、両辺の R, τ のべきを比較すると、

$$\alpha_2 - \gamma_2 = -2,$$

$$\beta_2 - \delta_2 = 0.$$

一方、(3) の下式での、 $\eta(t)$ の値がほとんどこの領域で決まると考えると、

$$\eta(t) = 2R^{5\delta_2 + \alpha_2 - 1} \tau^{5\delta_2 + \beta_2} \int_0^\infty S^4 f(S) dS$$

となる。ここでインスタントフィードバックの値が領域(i)で決まるとすると、

$$Q \propto R^0 \tau^{-2}$$

これから、

$$\eta(t) \propto R^0 \tau^{-3}$$

となり指数を比較すると、

$$\alpha_2 = -3/2, \quad \gamma_2 = 1/2, \quad \beta_2 = \delta_2 = -1/2 \quad (10)$$

となる。この時のエネルギースペクトルの相似形は、

$$E(k, t) = R^{-3/2} \tau^{-1/2} f\left(\frac{k}{R^{1/2} \tau^{-1/2}}\right) \cdot E_0$$

次元のある形であらわすと、

$$E(k, t) = \nu^{3/2} \eta^{1/6} f(k/k_\eta),$$

$$k\eta = \nu^{1/2} t^{-1/2},$$

となる。これは平衡領域で予想されるスペクトル形である。

なお、(i), (ii) 領域の間を結ぶのが k^{-3} のべき領域である。

実際 (ii) 領域のスペクトルが粘性によらなくなるのは、

$$f(k/R^{1/2} t^{-1/2}) \propto k^{-3} R^{3/2} t^{-3/2},$$

の時のみで、この時、

$$E(k, t) \propto R^0 t^{-2} k^{-3}$$

で、領域 (i) の相似則に含まれてしまう。逆にこの様に接続

していくことにより、指数を決めていくこともできる。この

方法は、Kida (1979) による。なお、この中間領域を、

enstrophy-inertial range と呼ぶ。

(iii) $\nu k^2 \gg 1$

この時エネルギー-スペクトルの形は、

$$E(k, t) \propto k^a \exp(-\sigma k),$$

となることが、(7) 式より示せる。(詳細は Tatsumi の L25-)

計算の結果、この様な粘性の非常に強くきく領域では、

$$E(k, t) = 128.32 \nu^2 \sigma^{3/2} k^{5/2} \exp(-\sigma k)$$

となる。ただし、 σ はまだ決められない。

以上の結果を使えばいくつかの統計量の時間、レイノルズ数に対する依存性は次の様になる。

$$\begin{aligned} E(t) &\sim R^0 \tau^0 \\ Q(t) &\sim R^0 \tau^{-2} \\ P(t) &\sim R \tau^{-3} \\ \lambda_2(t) &\sim R^{-1/2} \tau^{1/2} \end{aligned}$$

ここで注意しなければならないのは、相似形の導出の際、パリンストロフ、-カタストロフの存在が仮定されていたことである。($\nu \rightarrow 0$ で $\eta > 0$) これに対する反証と思われるものが存在する。(Pouquet et al (1975)) つまり、方程式(4)の解から計算されるパリンストロフ、-は、

$$P(t) \leq P(0) \exp\left\{\frac{1}{2} Q(0) t^2\right\} \quad (11)$$

という制限を受ける。ここで $P(0)$, $Q(0)$ は初期値である。従って $\eta (=2\nu P)$ の値は $\nu \rightarrow 0$ でゼロに近づくという結論になる。しかし不等式(11)が成り立つのは時間 t を止めて見た場合であって、後に計算結果で示される様にいくらレイノルズ数を大きくしても、それに従って時間を大きくして行くとある時刻 $t_*(R)$ より大きくなると $\eta > 0$ となりエンストロフ、-は減衰し始める。 $t_*(R)$ のレイノルズ数依存性はほぼ、 $t_*(R) \sim (\log R)^{1/2}$ である。つまり、初期時刻 $t < t_*(R)$

の間は、 $\nu \rightarrow 0$ で $\eta \rightarrow 0$ となり エンストロフィーの減衰はおこらないうが、 $t > t_*(R)$ になると、 $\eta > 0$ となり、 τ で減衰し始める。また $\rho(t) \sim \nu^{-1} \tau^{-3}$ でレイノルズ数の一乗で増加する。この意味でパリンストロフィーカタストロフは存在する。

§5. 数値計算

初期条件を与えた時のエネルギースペクトルの、時間的变化を調べるため(4)式の数値積分を行った。§4で行なったような波数と時間の無次元化に加え、無次元渦度密度スペクトル $\phi(k)$ を次の様に導入する。

$$\phi(k) = \Omega(k) / u^2.$$

積分変数の変換を行って(4)式を書きなおすに次の様に作る。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{2k^2}{R} \right] \phi(k) \\ &= 4R \int_0^\infty dk' \int_1^1 d\mu \frac{1 - \exp[-(k^2 + k'^2 + k''^2)\tau/R]}{k^2 + k'^2 + k''^2} \\ & \quad \times [\phi(k') - \phi(k)] \phi(k'') \frac{k k'^2}{k''^2} \left[\frac{k k'}{k''^2} + 2\mu \right] \sqrt{1 - \mu^2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$k''^2 = k^2 + k'^2 + 2\mu k k'$$

初期条件として次の2つの場合を選んだ。

$$\begin{aligned} \text{I: } & \phi(k, 0) = 2k^2 e^{-k^2/\pi}, \\ \text{II: } & \phi(k, 0) = 2k^4 e^{-k^2/\pi} \end{aligned} \quad (13)$$

Iは、波数ゼロに有限のエネルギー密度がある場合で、IIはエネルギー密度がない場合に当る。

上の2つの初期条件に対して(12)式の数値積分を行なう。た
わけであるが、その際重要なのは、 K' 、 μ 積分を行う場合の
きざみ点の取り方である。波数 K' については、原点付近にス
ペクトルが大きな値を取ることに、高波数へも流れることを
考慮して、次の様な変数変換を行なった。

$$K' = ab^n, \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

今回の計算では、 $a=0.1$ 、 $b=1.12$ 、 $N=50\sim75$ を採用
した。 μ 積分は、ルジャンドル-ガウス多項式のゼロ点をき
ざみ点として採用した。これは $\mu=\pm 1$ の付近で密になっ
ている。取った点数は39点である。

両方の初期条件に対して、6つのレイノルズ数の数値計算
を実行した。レイノルズ数の値は、 $R=20, 100, 200, 400,$
 $10^4, 10^5$ である。

図1, 2に、 $R=10^5$ の場合のエネルギースペクトルの、時
間変化を示す。図内に記入した数値は無次元時間での値で、
時刻14まで計算を行なった。どちらの場合も高波数、低波数の
両方への流れがあることが特徴的である。またともに、 k^{-3}
領域が存在している。両者の相違点は、低波数領域でCase I
の傾きが変化しているのに対し、Case IIの傾きはほとんど変

化がみられないことである。

図3, 4は、それぞれのCaseについてグラフを適宜に相似変形(両対数グラフでは平行移動)して重ねた図である。基準としたのは、 $R=10^5$, $\tau=14$ におけるグラフで energy-containing range に相当する波数領域である。この様にして得られた指数の値を Table 1 に示す。これらの値は多少で理論的に予想された値とより一致を示している。 k^{-3} 領域でのエネルギースペクトルの値は数値計算より次の様になる。

$$\begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \end{pmatrix} E(k, t)/E_0 = \begin{pmatrix} 13.6 \\ 12.4 \end{pmatrix} \tau^{-2} k^{-3},$$

一方、Quasi-equilibrium range における指数値を上と同様な方法で計算すると、 $\alpha_2 \approx -1.5$, $\beta_2 \approx 0.5$ と比較的理論と一致する値を得たが、 β_2 , δ_2 についてはこの領域での時間的相似性の欠如のため値が得られなかった。このことはインスタロフイーの時間変化に重大な影響を及ぼしているが、われわれはこれを数値計算の誤差に起因するものと考えている。従ってより精密な数値計算を行えば理論と一致する指数値が得られると思われる。なお、領域 (iii) においても理論の予想する様なスペクトル形は得られなかった。これも数値誤差と考えられる。

最後に、図5, 6にインスタロフイーの時間変化を示す。

これからわかる様に、いくらレイノルズ数を大きくしても、適当な時間がたつとインストロフィ - は減衰を始める。計算結果によれば $Q(t)$ の減衰則はほぼ、

$$Q(t) \propto t^{-a}$$

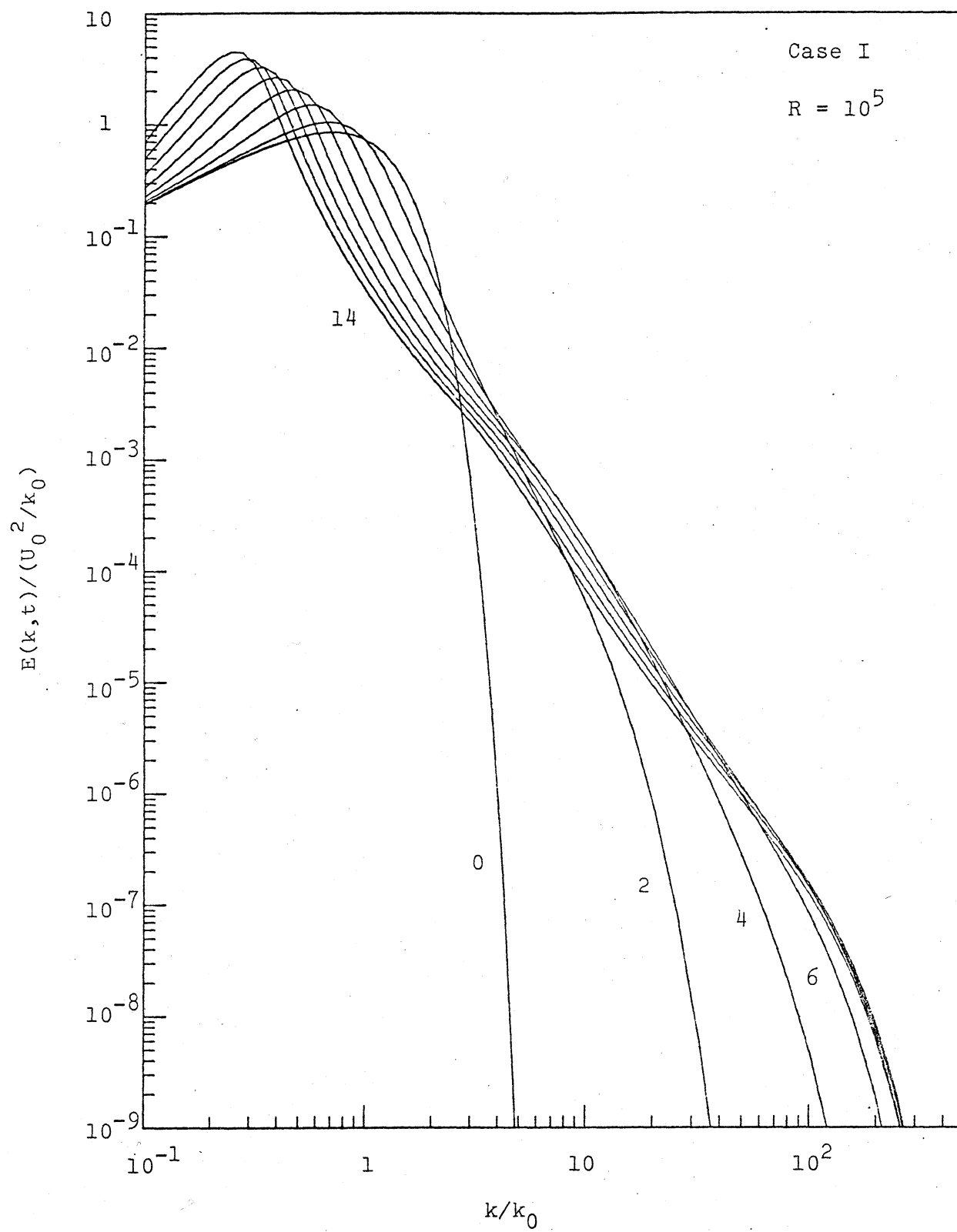
$$a = 1.2 \quad (\text{Case I})$$

$$a = 1.6 \quad (\text{Case II})$$

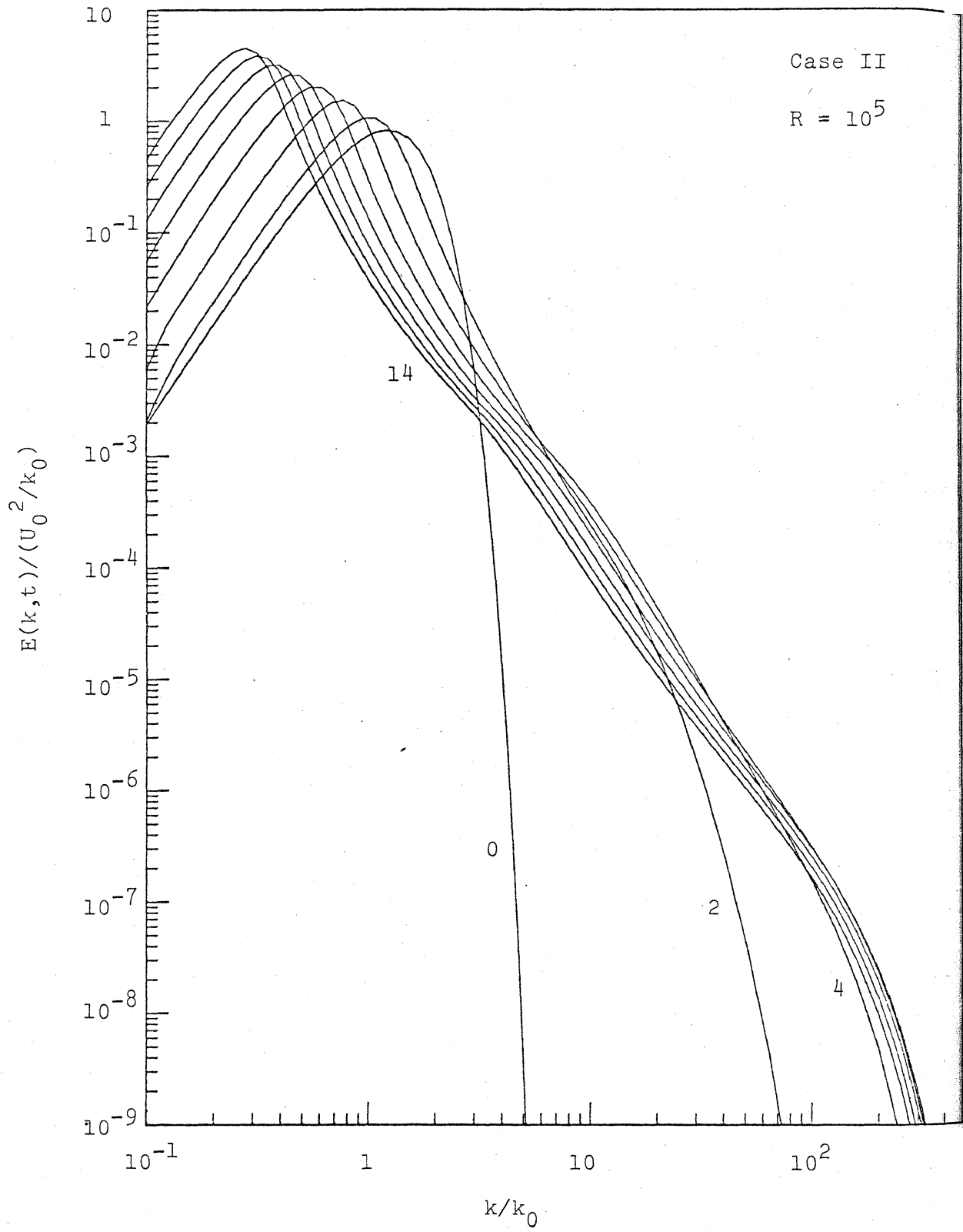
となる。この結果は理論的予想 ($a=2$) とあまりよく一致しない。この理由は (ii) 領域での時間相似性の欠如にあり、従って数値誤差と思われる。しかし、 $t > t_*(R)$ で $\eta > 0$ の状態が実現するのはまちがちな、と考えられる。数値データよりだいたい $t_*(R) \sim (\log R)^{1/2}$ となる。

References

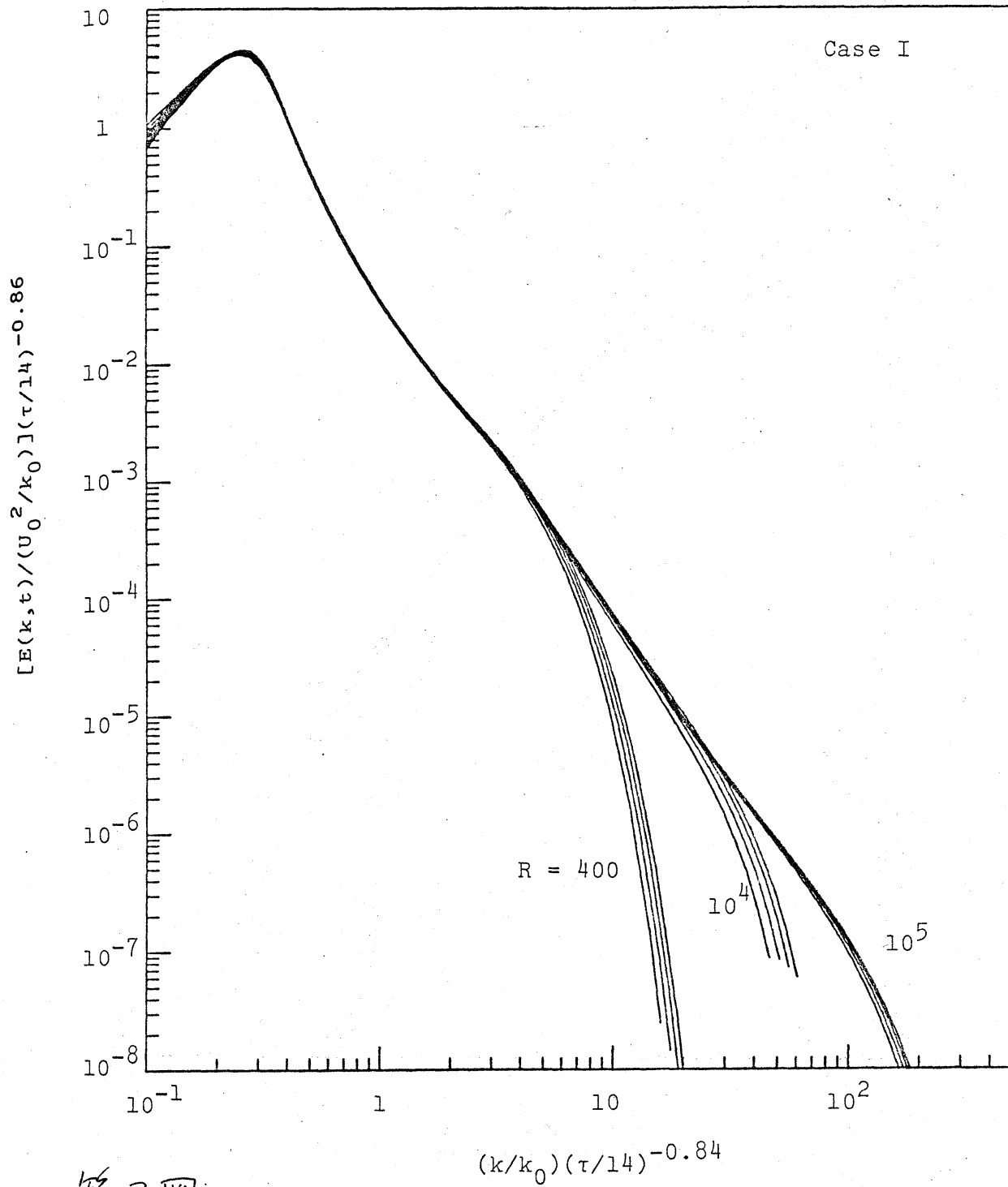
- Batchelor, G.K. 1969 Phys. Fluids Suppl. 12, II, 233.
 Kida, S. 1979 to appear
 Kraichnan, R.H. 1967 Phys. Fluids, 10, 1417.
 Leith, C.E. 1968 Phys. Fluids, 11, 671.
 Onsager, L. 1949 Nuove Cimento Suppl. 6, 279.
 Pouquet, A., Lesieur, M., Andre, J.C. and Basdevant, C. 1975 J. Fluid Mech. 72, 305.
 Tatsumi, T., Kida, S. and Mizushima, J. 1978 J. Fluid Mech. 85, 97.
 Tatsumi, T. 1979 Advances in Appl. Mech.



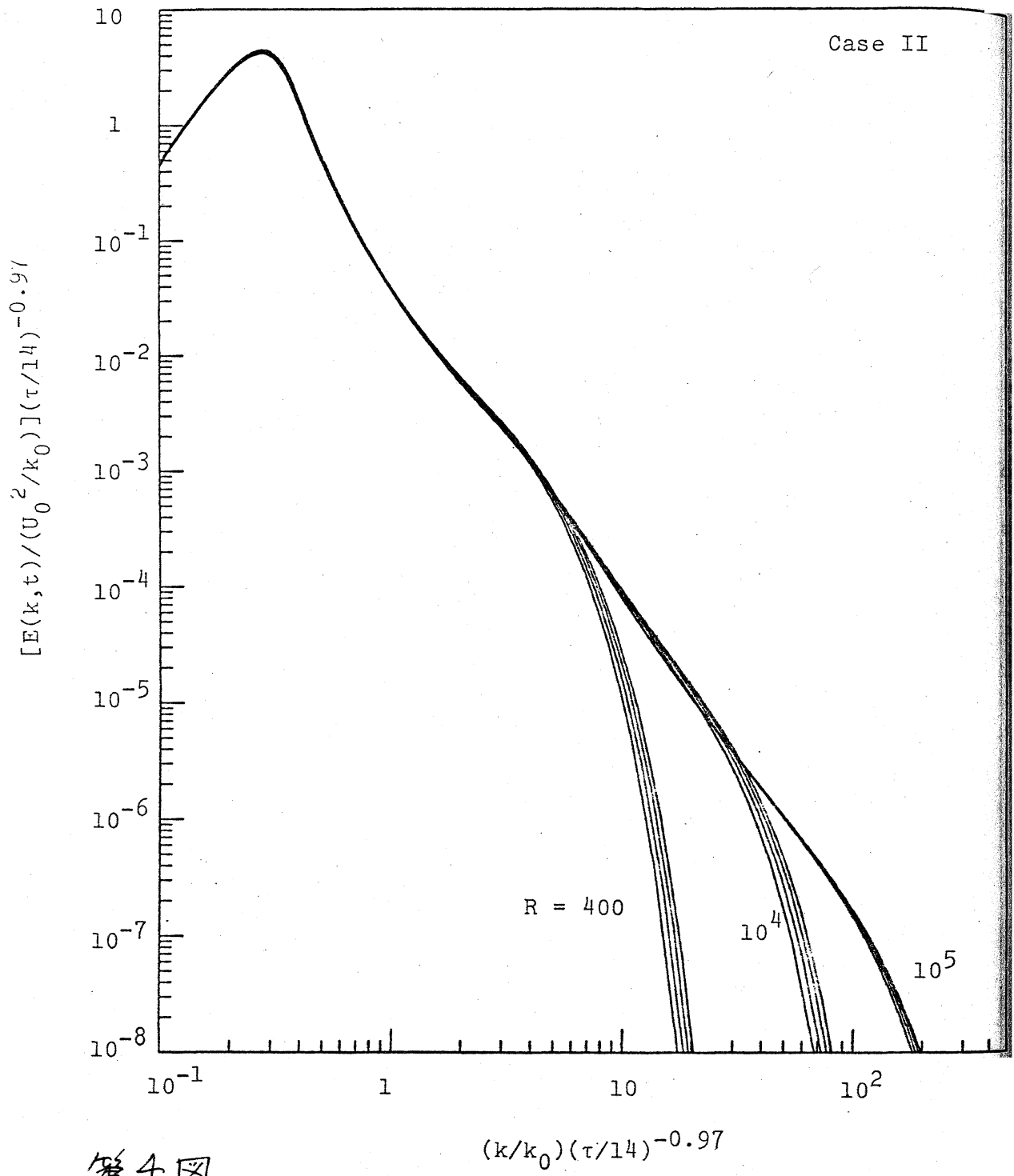
第 1 图



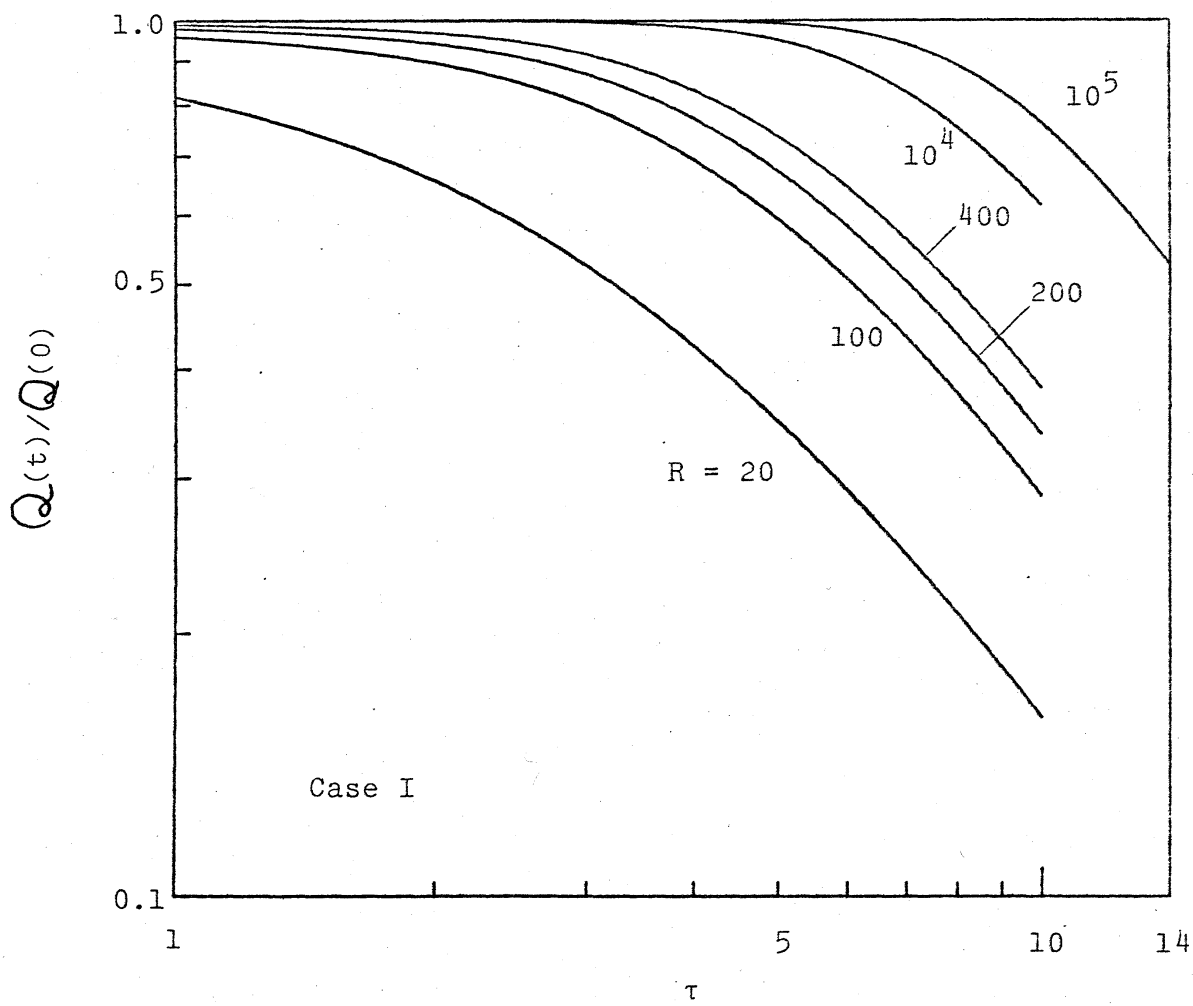
第2图



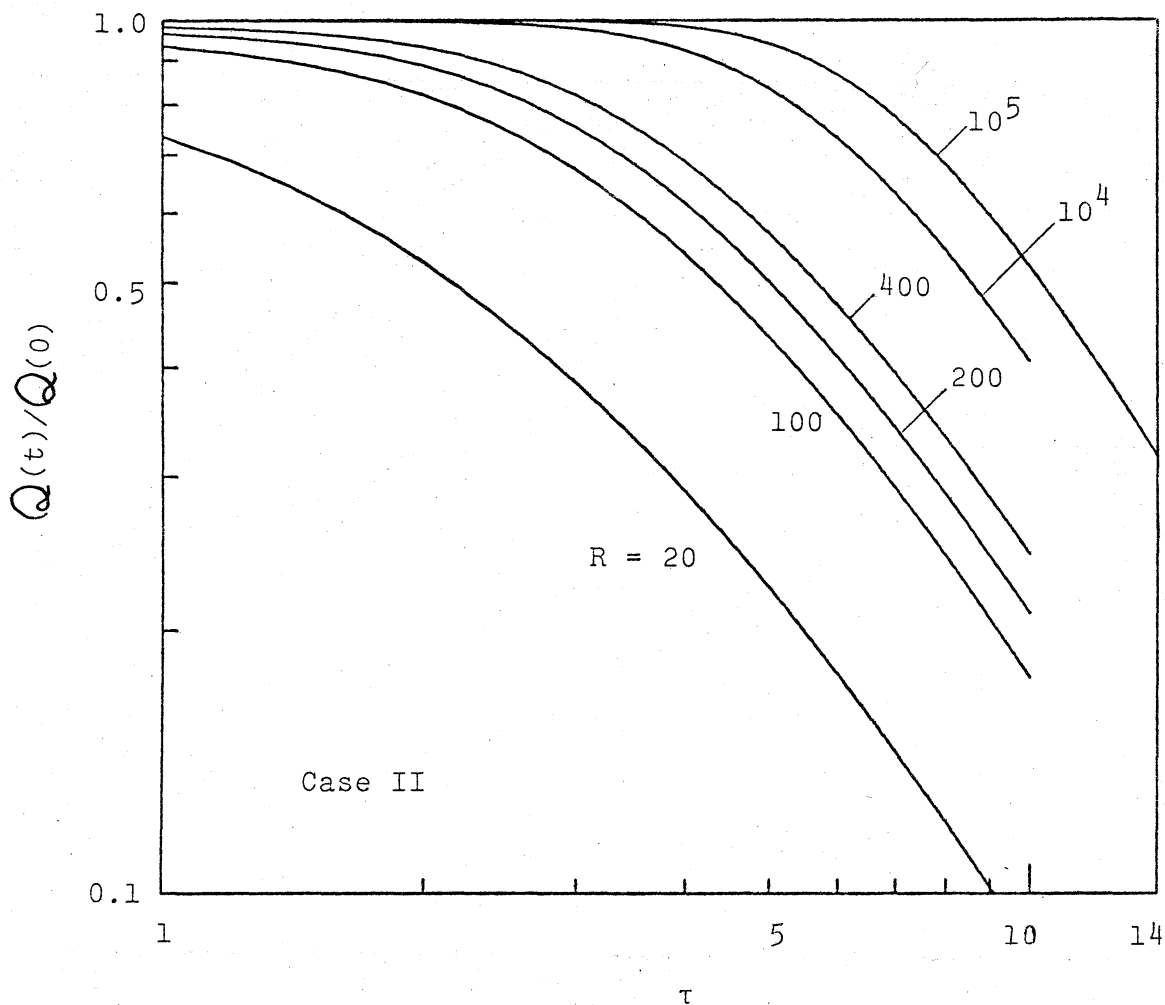
第3图



第4图



第5図



第6图

Table 1. Similarity exponents for the energy-containing range

	Case I	Case II
α	0.0	0.0
β	0.86	0.97
γ	0.0	0.0
δ	0.84	0.97