数理解析研究所講究録
355巻 1979年 111-124

半平面上で定義された算術的正則函数の全平面への解析接続

上智大 理工　吉野 邦生

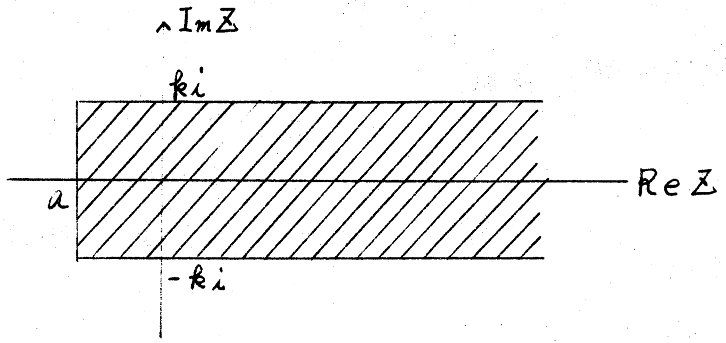
§0. はじめに

自然数の上で整数値を取る整函数、すなわち、算術的整函数の理論は、古くから、研究され、特に、R. Buckにより、細かい分類がなされた。この結果をもとに、Avanissian－Gay[1]は解析的汎函数の理論を用いて、R. Buckの結果を多変数の場合に、拡張した。

さて、この小論文では、森本[6]により導入された、非コンパクトな台を持つ解析的汎函数の理論とAvanissian－Gayにより導入された、Avanissian－Gay変換を用いて、半平面でのみ定義された算術的正則函数が、適当な条件の下で、全平面に解析接続され、しかも、その型をも、決定してしまうという現象を研究する。

§1. 非コンパクトな台を持つ解析的汎函数

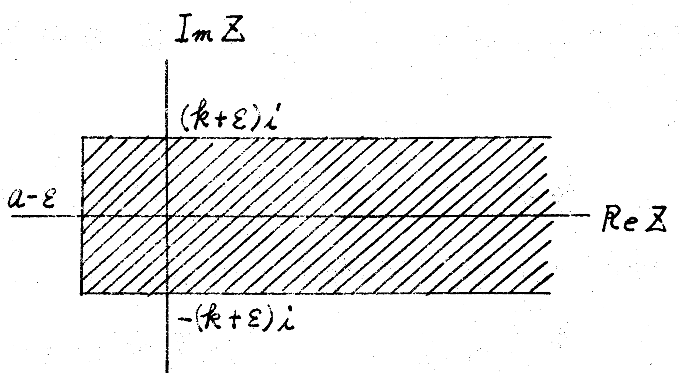
$L = \{ z \mid \mathrm{Re}\, z \geqq a, |\mathrm{Im}\, z| \leqq k \}$ とおく。



$$\mathcal{Q}(L : k') = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon' > 0}} \mathcal{Q}_b(L_\varepsilon : k' + \varepsilon')$$

但し、

$$\mathcal{Q}_b(L_\varepsilon : k' + \varepsilon') = \{ f \in \mathcal{O}(\mathring{L}_\varepsilon) \cap C(L_\varepsilon) : \sup_{z \in L_\varepsilon} |f(z)\, e^{(k'+\varepsilon')z}| < +\infty \}$$



$\mathcal{Q}(L : k')$ は、DFS－空間になる。

$\mathcal{Q}(L : k')$ の双対空間を $\mathcal{Q}'(L : k')$ で表わす。

$\mathcal{Q}'(L : k')$ の元をLに台を持ち、タイプ k' 以下の解析的汎函数と呼ぶ。

$\mathrm{Re}\,t < -k'$ なる $t \in \mathbb{C}$ について、$e^{tz} \in \mathcal{Q}(L:k')$

従って、$\mathcal{Q}'(L:k')$ の元 u についてフーリエ・ボレル変換が、次のようにして、定義できる。

$$\hat{u}(t) = \langle u_z ,\ e^{tz} \rangle \qquad (\mathrm{Re}\,t < -k')$$

$\hat{u}(t) \in \mathcal{O}(\mathrm{Re}\,t < -k')$ となり、u の連続性により、$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \varepsilon' > 0,\ \exists C_{\varepsilon\varepsilon'} \geqq 0,$

$$|\hat{u}(t)| \leqq C_{\varepsilon\varepsilon'}\, e^{(a-\varepsilon)\mathrm{Re}\,t + (k+\varepsilon)|\mathrm{Im}\,t|}$$

$$(\mathrm{Re}\,t \leqq -k' - \varepsilon')$$

次の結果が、知られている。

<u>定理</u>1（森本） フーリエ・ボレル変換は、位相同型である。

$$\mathcal{Q}'(L:k') \cong \mathrm{Exp}((-\infty, -k') + i\mathbb{R} : L)$$

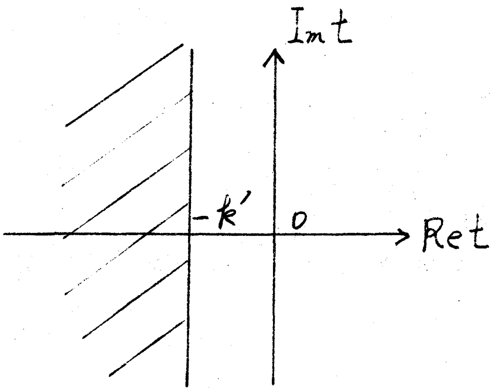
但し、$\mathrm{Exp}((-\infty, -k') + i\mathbb{R} : L)$

$= \{ f \in \mathcal{O}((-\infty, -ik') + i\mathbb{R}) ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall \varepsilon' > 0$

$\quad \exists C_{\varepsilon,\varepsilon'} \geqq 0,$

$\quad |f(t)| \leqq C_{\varepsilon\varepsilon'}\, e^{(a-\varepsilon)\mathrm{Re}\,t + (k+\varepsilon)|\mathrm{Im}\,t|}$

$\quad (\mathrm{Re}\,t \leqq -k' - \varepsilon' \}$



この§の詳しい内容については[8]を見られたい。

§2. Avanissian-Gay 変換

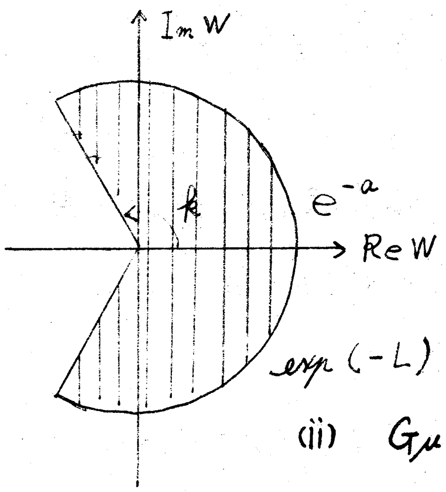
以下、$0 \leqq k' < 1$, $0 \leqq k < \pi$ とする。

$W \notin \exp(-L)$ とすると、z の函数として、

$(1 - We^{z})^{-1} \in \mathcal{Q}(L : k')$

$\mu \in \mathcal{Q}'(L : k')$ に対し、Avanissian-Gay 変換を次のように定める。

$$G_\mu(W) = \left\langle \mu_z, \frac{1}{1 - We^{z}} \right\rangle$$



Avanissian-Gay 変換は、次の性質を持つ。

命題1

(i) $G_\mu(W) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \exp(-L))$

(ii) $$G_\mu(W) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(-n)}{W^{n}} \quad (|W| > e^{-a})$$

(iii) $$\lim_{|W| \to \infty} G_\mu(W) = 0$$

(iv) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists C_{\varepsilon\varepsilon'} > 0$

$$|G_\mu(W)| \leqq C_{\varepsilon\varepsilon'} \frac{1}{|W|^{k'+\varepsilon'}}$$

$$(k + \varepsilon \leqq |\arg W| \leqq \pi)$$

次の公式が、得られている。

命題２　$\mu \in Q'(L : k')$，　$0 \leqq k' < 1$　$0 \leqq k < \pi$

$h(z) \in Q_b(L_\varepsilon : k' + \varepsilon')$

$$\langle \mu, h \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L_\varepsilon} G_\mu(e^{-\zeta}) h(\zeta)\, d\zeta$$

この節の詳しい内容は、森本・吉野（9）を見よ。

§３、超越直径

定義　Ｆを$\mathbb{C}$のコンパクト集合とする。

$z_1, \cdots, z_n \in F$とする。

$\sup_{z_i \in F} \prod_{i<j} \overline{z_i z_j} = V_n$ とおく。

$$d_n = V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

$$d_{n+1} \geqq d_n \qquad d = \lim_{n \to \infty} d_n$$

このdを集合Ｆの超越直径という。

Ｆの超越直径を$\gamma(F)$で表わすことにする。

次の評価式が、知られている。

lemma 1　（zalcman）

(1)　$\gamma(F) \leqq \frac{1}{2\pi} \operatorname{int}_C \operatorname{length}(C)$

但し、Ｃは、Ｆを囲む回転数１（Ｆの各点について）の長さ有限の曲線

(2)　Ｆ：区間（a．b）とすると、

$\gamma(F) = \frac{1}{4}(b-a)$

超越直径を使って、$\mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus F)$が、有理函数であるための条件が、知られている。

lemma 2 (Polya)　F：単連結　$\gamma(F) < 1$　とする。

$g \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus F)$ のローラン展開係数が、全て整数であると、$g(w) = \dfrac{A(w)}{B(w)}$ と書ける。

ここで、A，Bは、整数係数多項式で、特に、Bの最高次係数は、1である。

さて、lemma 1を使うと、次の命題3が、得られる。

命題3　$L = [a, \infty) + i[-k, k]$

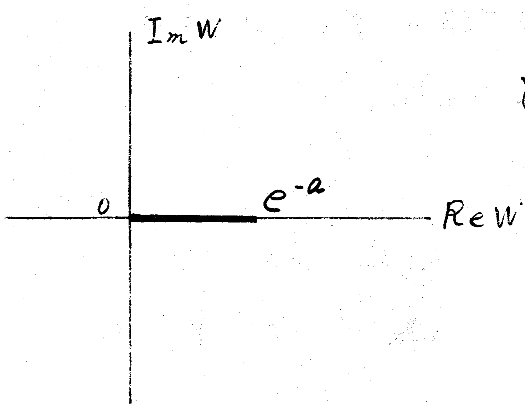
(i)　$\gamma(\exp(-L)) = \frac{1}{4}e^{-a}$　　if $k = 0$

(ii)　$\gamma(\exp(-L)) \leqq \frac{1}{\pi}(k+1)e^{-a}$　　$0 < k \leqq \frac{1}{2}\pi$

(iii)　$\gamma(\exp(-L)) \leqq \frac{1}{\pi}(k+\sin k)e^{-a}$　　$\frac{1}{2}\pi \leqq k < \pi$

(証明)　$\exp(-L)$の図を書く。

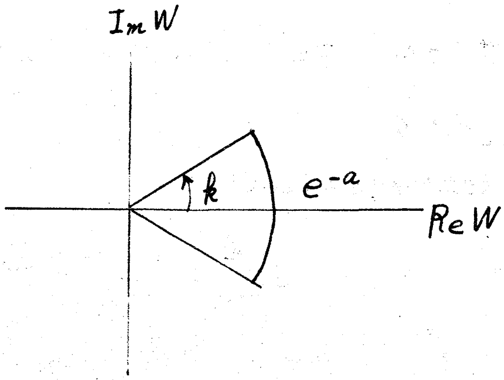
(i)



lemma 1 の(2)により、

$\gamma(\exp(-L)) = \frac{1}{4}e^{-a}$

(ii)



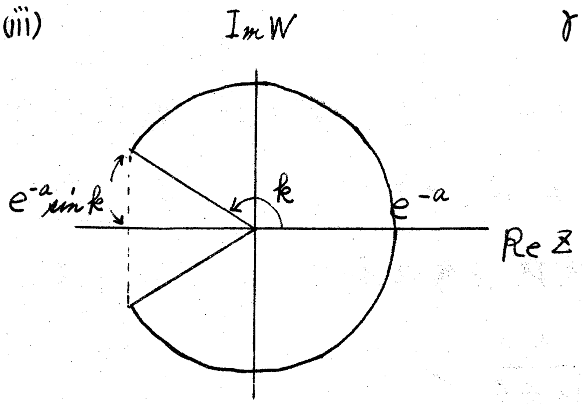
lemma 1 の (1) により.

$$\frac{1}{2\pi}\times(2e^{-a}+2e^{-a}k)$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-a}(k+1)$$

$$\therefore \gamma(F)\leqq\frac{1}{\pi}e^{-a}(k+1)$$

(iii)



$$\gamma(\exp(-L))\leqq\frac{1}{2\pi}(2e^{-a}k+2e^{-a}\sin k)$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-a}(k+\sin k)$$

系　$(a.k)$ が、次をみたせば. $\exp(-L)$ の超越直径は 1 未満

$$\gamma(\exp(-L))<1$$

(3 − 1)　$k=0$. and $a>-2\log 2$

(3 − 2)　$0<k\leqq\frac{\pi}{2}$. and $a>\log\pi^{-1}(k+1)$

(3 − 3)　$\frac{\pi}{2}\leqq k<\pi$. and $a>\log\pi^{-1}(k+\sin k)$

§ 4　主要定理と証明

定理　$0\leqq k'<1$, $0\leqq k<\pi$. $(a.k)$ は (3.1)…(3.3) のどれかをみたしているとする。

$f \in \mathcal{O}(\mathrm{Re}\,t < -k')$, $f(-n) \in \mathbb{Z}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$

$\varepsilon > 0$, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists C_{\varepsilon\varepsilon'} \geqq 0$

$|f(t)| \leqq C_{\varepsilon\varepsilon'} e^{(a-\varepsilon)\mathrm{Re}\,t + (k+\varepsilon)|\mathrm{Im}\,t|}$

$\Rightarrow$ $f(t) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^1)$ しかも、$f(t) = \sum_{i=1}^{l} P_i(t) e^{\beta_i t}$

但し、$P_i(t)$ は、多項式で、 $\mathrm{Re}\,\beta_i > a$, $|\mathrm{Im}\,\beta_i| \leqq k$

$e^{-\beta_i}$ は、代数的整数

（証明） 定理 1 により、$u \in Q'(L : k')$ が、存在して、

$f(t) = < u_z, e^{tz} > = \hat{u}(t)$

u の Avanissian-Gay 変換を考えると、

$$G_u(W) = < u_z, \frac{1}{1 - We^z} >$$

命題 1 により、

$$G_u(W) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}(-n)}{W^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(-n)}{W^n}$$

仮定により、$f(-n) \in \mathbb{Z}$

さて、仮定、(3-1) ‥‥ (3-3) の条件があると、

$\exp(-L)$ の超越直径は 1 未満。

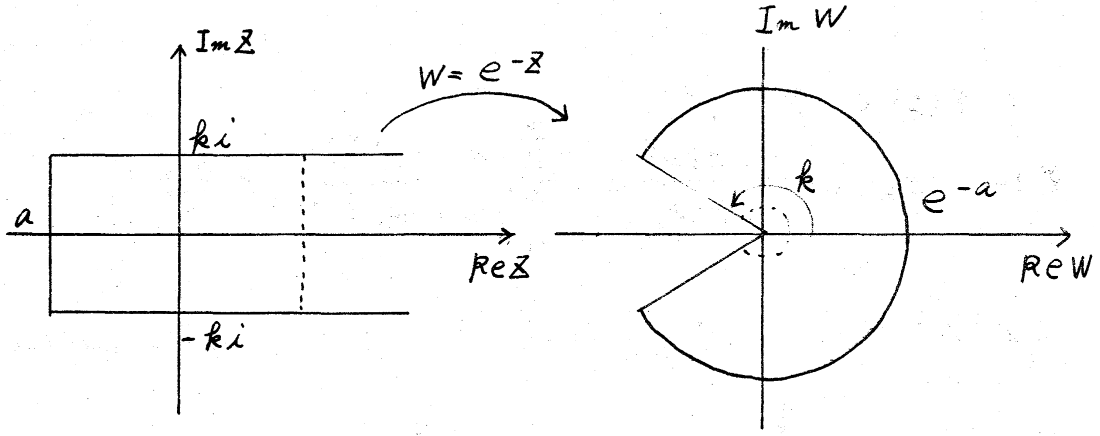
従って、lemma 2 により、$G_u(W) = \frac{A(W)}{B(W)}$

となる整数係数の多項式が存在する。特に、$B(W)$ は monic

である。

命題 1 の (iv) により、$B(0) \neq 0$.

従って、$G_\mu(W)$ は、$W=0$ で正則。

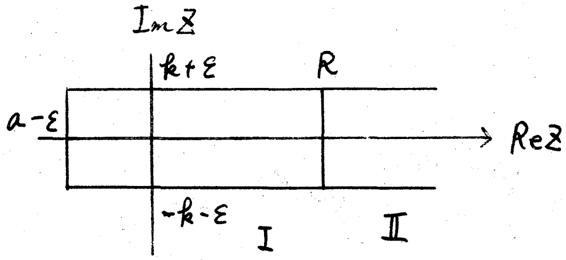


$G_\mu(e^{-z})$ で考えると、$\mathrm{Re}\,z > R$ で、$G_\mu(e^{-z})$ は、正則とする $R>0$ が、存在する。

反転公式（命題2）により、

$$f(t) = \langle u_z, e^{tz} \rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L_\varepsilon} G_\mu(e^{-z}) e^{zt}\,dz$$

$(\mathrm{Re}\,t < -k')$



上の周辺積分を、左図のように I、II に分けて考えると、被積分函数は、II で正則であるので、

$$\int_{II} = 0$$

$$= \int_I + \int_{II}$$

$$= \int_I$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_I G_\mu(e^{-z})\, e^{zt}\, dz$$

$\therefore f(t) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^1)$

更に，$G_\mu(W) = \dfrac{A(W)}{B(W)} = \dfrac{\prod_{i=1}^{k}(W-a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^{\ell}(W-b_i)^{n_i}}$ とすると，

$G_\mu(W) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus \exp(-L))$ により，$b_i \in \exp(-L)$

$$G_\mu(e^{-z}) = \frac{\prod_{i=1}^{k}(W-a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^{\ell}(W-b_i)^{n_i}} = \frac{\prod_{i=1}^{k}(e^{-z}-a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^{\ell}(e^{-z}-b_i)^{n_i}}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k}(e^{-z}-a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^{\ell}(1-b_i e^{z})^{n_i}}\, e^{(\sum_{i=1}^{\ell} n_i) z}$$

$b_i \in \exp(-L)$ であるので，$b_i = e^{-\beta_i}$ $(\beta_i \in L)$

となる β_i が唯一つ存在する（$\because$ $k<\pi$）

従って，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{\prod_{i=1}^{k}(e^{-z}-a_i)^{n_i}}{\prod_{i=1}^{\ell}(1-b_i e^{z})^{n_i}}\, e^{\sum n_i z}\cdot e^{zt}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{\prod_{i=1}^{k}(e^{-z}-a_i)^{n_i}}{\prod_{i=1}^{\ell}(1-e^{z-\beta_i})^{n_i}}\, e^{\sum n_i z}\cdot e^{zt}\, dz$$

各 $z = \beta_i$ で留数定理を使えば，

$= \sum_{i=1}^{\ell} P_i(t)\, e^{\beta_i t}$ $\quad$ ($e^{-\beta_i}$ は，代数的整数，$\beta_i \in L$)

§5．例

(i)　$k=0$．$a>-2\log 2$ の例

$$f(t)=2^{-t}=e^{t(-\log 2)}$$

$$|f(t)|=e^{-\mathrm{Re}\,t\log 2}=e^{\mathrm{Re}\,t(-\log 2)}\qquad(\mathrm{Re}\,t\leqq 0)$$

この場合、．$k=0$，$a=-\log 2$

$\log 2>0$ により、　$a=-\log 2>-2\log 2$　//

(ii)　$0<k\leqq\frac{\pi}{2}$．$a>\log\pi^{-1}(k+1)$ の例

$$f(t)=\sin\frac{\pi}{2}t=\frac{e^{\frac{\pi}{2}it}-e^{-\frac{\pi}{2}it}}{2i}\qquad\begin{pmatrix}f(-1)=-1 & f(-2)=0\\ f(-3)=1 & f(-4)=0\cdots\end{pmatrix}$$

$$|f(t)|\leqq\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{|\mathrm{Im}\,t|\cdot\frac{\pi}{2}}=e^{|\mathrm{Im}\,t|\cdot\frac{\pi}{2}}$$

この場合、$a=0$，　$k=\frac{\pi}{2}$

$$\log\pi^{-1}(k+1)=\log\pi^{-1}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=\log\frac{\pi+2}{2\pi}$$

$\frac{\pi+2}{2\pi}<1$　により．　　　　<0

従って　$a>\log\pi^{-1}(k+1)$ を満たしている。

(iii)　$\frac{\pi}{2}\leqq k<\pi$，　$a>\log\pi^{-1}(k+\sin k)$

$$f(t)=2\cos\frac{2}{3}\pi t=e^{\frac{2}{3}\pi it}+e^{-\frac{2}{3}\pi it}$$

$$f(-1)=2\cos\frac{2}{3}\pi=-1$$

$$f(-2)=2\cos\frac{4}{3}\pi=-1$$

$$f(-3)=2\cos 2\pi=2$$

$$|f(t)| \leqq 2e^{\frac{2}{3}\pi|\mathrm{Im}\, t|}$$

$$a = 0, \quad k = \frac{2}{3}\pi$$

$$\log \pi^{-1}(k + \sin k) = \log \pi^{-1}\left(\frac{2}{3}\pi + \sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \log \pi^{-1}\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{3}$ であるので、

$$< \log\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \log 1 = 0 = a.$$

従って　不等式　$a > \log \pi^{-1}(k + \sin k)$

をみたしている。

§ 6. 注意

定理において、$f(-n)$ の値は、整数であると仮定したが、実は、この条件は緩めることが、できる。すなわち、本質的には、lemma 2 におけるローラン展開係数が、全て整数であるという部分が、実は、虚2次体の整数でもよいのである。これについては、詳しくは、Martinean [5], Polya [12] を見られたい。

又、ローラン展開係数と、超越直径の深い関わり合い、例えば、クロネッカーの定理等については、Goluzin [13] Polya [12] を見られたい。

References

[1] Avanissian, V.and R. Gay: Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France, 103 (1975), 341-384.

[2] Ahlfors, R. : Conformal Invariants, Topics in Geometric Function Theory. McGraw-Hill, (1973)

[3] Boas, R. : Entire Functions. Academic Press, New York (1954)

[4] Buck, C.R. : Integral valued entire functions. Duke Math.J.,15 (1948), 879-891.

[5] Martineau, A. : Extension en n variables d'un théorème de Polya-Carlson concernant les séries de puissances à coefficients entieres. C.R.Acad. Sci. Paris, t 273, Ser. A, (1971), 1127-1128.

[6] Morimoto, M.: On the Fourier ultra-hyperfunctions. 1. Sûrikaiseki-kenkyûjo kôkyûroku, 192 (1973), 10-34.

[7] MOrimoto, M.: Fourier Transformation and distribution, Jôchi daigaku kôkyûroku, 2 (1978), 1-177 (In Japanese).

[8] Morimoto, M,: Analytic functionals with non-compact carrier. Tokyo.J.Math.,1 (1978). to appear.

[9] Morimoto, M and K.Yoshino : A uniqueness theorem for holomorphic function of exponential type, Hokkaido Math.J.,7 (1978), to appear.

[10] Šeinov, A,: Transfinite diameter and some theorem of Pólya in the case of several complex variables, Siberian Math.J.,12 (1972), 1382-1389.

[11] Zalcman, L.: Analytic Capacity and Rational Approximation, (Lecture Note in Mathematics, 50), Springer-Verlag, Berlin (1968).

[12] Polya, G: Sur · les séries entières a coefficients entieres, Proceedings of the London Mathematical Society, vol 21 (1922) pp. 22-38.

[13] Goluzin: Geometric Theory of Functions of a complex variable, American Mathematic Society (1969).