解析線形写像とベクトル値超函数について

德大 教養 伊東由文

30. この小論は、参考文献[1]の論文の要約である。このような形で発表できるようになったのは、吉田耕作先生のかけずめによるものである。ここに、先生への感謝の意玄表明させていただきました。小松彦三郡先生、河合隆裕先生、金子昊先生にもここで感謝の意玄表明させていただきます。

1959年と1960年の論文で、M. Lato は超函数論を確立しました。その理念は、一般化された意味での「関数」を正則関数の境界値と考えることにありました。これは、L. Lohwarts の「分布」より太く、関数概念を拡張しました。最近、M. Latoと同じ方法で、P.D.F. Jon とT. Kawai'は、L. Lohwartsが「分布」に対して行ったように、超函数論をでりトル値超函数論に拡張しました。

他方, A. Martineau と P. Schapinaは, 超函数が解析訊 関数のあるものであること, 特に,コンパット台の超函数は 解析訊関数に他なるないことを示しました。このことは、また、L. Schwartsが関数概念の双対概念として関数概念を一般化した方法が、超函数に対しても適用できることを示しています。関数概念の双対概念として、L. Schwartsの「かあ」、「超分布」、「解析汎関数」、「超函数」等多くの新しいものが発見されてきています。

=のようでは、A. Martineau-P. Schapiraの方法で、 P.D.F. Jan-T. Kawai のでクトル値超函数論を再構成しょう と思って、解析線形写像の概念を得ました、これは、正則関 数の空間かる位相線形空間への連続線形写像のことで、終空 間がし攻元の時の解析汎関数の概念を拡張したものです。こ 山は, いかば, ベットに値解析汎関数ともいうできもののこ とです、ベクトル値超函数は、解析線形写像のあるものであ り、特に、コンパクト台のベクトル値超函数は、コンパクト 台の解析線形写像に他なるないことが示されます。このよう な方向での関数概念の拡張として、L. Schwertのかフトル 値「分布」の理論があります。 るこでは、関数空間かる位相 線形空間への連続線形写像が本質的な役割を演じます. この ように,関数空間から位相線形空間への連続線形写像は,関 数空間の双対空間と同じく、新しいもの玄生み出すように見 えまず、このようなものとして、解析線形写像の理論があり

ます、この理論は、1変数の場合、1950年代に、Lilva が研究し、Kithe、grothendiechによって完成されたもの です、

でクトル値超函数をベクトル値正則関数の境界値として表 かすのと同じ方法によって、コンパクト台の解析線形写像を ベクトル値正則関数で表かすニとができます。これは、 Silva-Kithe-Shothendieckの結果の一般化になってい ます。とくに、これは、Kitheの1953年の論文の最後 に出ている問題への一つの解答になっています。

§ 1. ○をCⁿ上の正剛関数芽の層とし、CTをCⁿ上の実解析関数芽の層とする。AをCⁿの開集をあるリロスコンパクト集をあるいは実部分集合等の部分集合とするとき、Aにおりて、あるいは、Aの近傍で、正則な関数全体のつくる局所凸空間をO(A)で表かす。O(A)には自然な局所凸位相を入れてかく、Aが実部分集合であるときには、O(A)=C(A)である。

Eを複素数体C上の元んんとで間とする、 $L_b(o(A); E)$ $\xi o(A)$ かる $E \land o$ 連続線形写像の空間に有界収束の位相を 入れたものとする、 $L_b(o(A); E) \equiv O'(A; E)$ の元以を A 上の E - ie(Bim) 解析線形写像という。A のコンパクト 部分集合 K に対し、 $M \in O'(A; E)$ が O(K) まで 拡大さ M ると

き、 $K \ge U の <u>友台</u> (Carrier) という。友台は唯一)とは限了ない。しかし、<math>\mathbb{R}^n$ のコンパケト部分集合を友台にもつ実解析線形写像に対し、やかなり立つ。

定理1. $U \in OU'(R^n; E)$, $U \neq 0$, $U \leq U'$, $U \cap \xi \in C$ (Carriero)の中で最小のものが存在する、この最小の支色を, $U \cap \underline{\beta}$ (support) と $U \cap \underline{J}$ (如) と書く、

 \mathbb{R}^n 上の無限回連続微分す能な関数の空間を $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ で表めずと、Stane-Weierstrassの定理によって、 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ の稠密な部分空間であるから、次の命題を得る。

<u>命題1</u>. $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; E) = L_b(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n); E) ひらげ,$ $<math>U \in \mathcal{O}U'(\mathbb{R}^n; E)$ である。このとき、 $supp_{\mathcal{D}'}(N) = supp_{\mathcal{D}'}(N)$ が成り立つ、== で、 $supp_{\mathcal{D}'}(N)$ は、 $U \circ E$ - 値「分布」 としての台を表めす。

迎の命題は、E-值超函数の層を定義す了時に使かれる。

命題2. Ω を \mathbb{C}^n の開部分集合とする。Kを Ω のコンパクト 部分集合で、 Ω -Kが相対コンパクト \mathcal{C} 連結成分を持たないものとする。そのとき、 \mathcal{O} ($\partial \Omega$; E) は \mathcal{O} ($\overline{\Omega}$ - \overline{K} ; E) の 網密な部分空間である。

52. 論理的には少し前後するか, ニュで, 正則関数の空間, 実解析関数の空間, 解析汎関数の空間, 解析線形写象の

空間の位相テンソル積に関す了結果を一括してかく、命題3.次の自然な同型が成り立つ、

- (i) $O(\Omega_1)$ \otimes $O(\Omega_2) \cong O(\Omega_1 \times \Omega_2)$ ($\Omega_1 \subset \mathbb{C}^m$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$, 開*集*合);
- (ii) $O(K_1)$ \otimes $O(K_2) \cong O(K_1 \times K_2)$, $(K_1 \subset \mathbb{C}^m, K_2 \subset \mathbb{C}^m, J > \mathcal{N}^2 + 集合);$
- (iii) $\Omega(K_1) \otimes \Omega(K_2) \cong \Omega(K_1 \times K_2)$, $(K_1 \subset \mathbb{R}^m, K_2 \subset \mathbb{R}^n, \exists - n^2 + f = 1)$;
- (iv) $\Omega(\Omega_1)$ \otimes $\Omega(\Omega_2) \cong \Omega(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $\Omega(\Omega_1 \cap \Omega_2) \cong \Omega(\Omega_1 \times \Omega_2)$,

命題4. やの自然な同型が成り立つ。

- (i) $O'(\Omega; E) \cong O'(\Omega) \otimes E, (\Omega \subset C^m, 開集危);$
- (ii) $O'(K;E) \cong O'(K) \otimes E$, (KCCⁿ,コンパクト集合);
- (m) の(K; E) (K) ⑥ E, (KCR, コンパット集合);
- (iv) OT(S) E) \(\Omega(S) \(\delta \) \(\Delta \), (SLCR^M, 開集合).

<u>命題5</u>. Ω_i , K_i は命題3と同様とする(i=1,2) と,炎の自然な同型が成り立つ。

- $(i) O'(\Omega_1) \widehat{\circ} O'(\Omega_2) \cong L_b(O(\Omega_1); O'(\Omega_2)) \cong O'(\Omega_1 \times \Omega_2);$
- $(ii) \Theta'(K_1) \otimes \Theta'(K_2) \cong L_b(\Theta(K_1); \Theta'(K_2)) \cong \Theta'(K_1 \times K_2);$
- (iii) $\sigma'(K_1) \otimes \sigma'(K_2) \cong L_1(\sigma(K_1); \sigma'(K_2)) \cong \sigma'(K_1 \times K_2);$
- (iv) $\sigma'(\Omega_1) \otimes \sigma'(\Omega_2) \cong L_b(\sigma(\Omega_1); \sigma'(\Omega_2)) \cong \sigma'(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

これは、L. Schwartsの核定理の対る物である。

災に、E1とE2は Tréchet 空間とする。 ωは ε- 位相ある 11はπ- 位相の11ずれかを表わすとする。 ジが成り立つ。

命題6. Ω_{i} , K_{i} は命題3と同様とする(i=1,2)と、返の自然な同型が成り立つ。

- (i) $O'(\Omega_1; E_1) \hat{\otimes}_{W} O'(\Omega_2; E_2) \cong O'(\Omega_1 \times \Omega_2; E_1 \hat{\otimes}_{W} E_2);$
- $(i) O'(K_1; E_1) \widehat{\mathcal{Q}}_{N} O'(K_2; E_2) \cong O'(K_1 \times K_2; E_1 \widehat{\mathcal{Q}}_{N} E_2);$
- (iii) $\Omega'(K_1; F_1) & \Omega'(K_2; F_2) \cong \Omega'(K_1 \times K_2; F_1 & E_2);$
- $(\bar{l}\nu) \ \Omega'(\Omega_i; E_i) \ \hat{\varrho}_{\omega} \ \Omega'(\Omega_i; E_z) \cong \Omega'(\Omega_i \times \Omega_z; E_i \ \hat{\varrho}_{\omega} E_z).$
- §3. ここで, E-値超函数を定義する、ΩをRの相対コンパケト開部分集合とする、このとき,

 $\mathcal{B}(\Omega; E) = \Omega'(\overline{\Omega}; E) / \Omega'(\partial \Omega; E)$

とかく、 $B(\Omega; E)$ の元を $\Omega_E - 値超函数$ という、 Ω_0 すべての開集合 ω に対す了 $B(\omega; E)$ の集合は $\Omega_E = 0$ 前層を定義する、これを $\alpha = 0$ 0、 $\alpha = 0$ 0、必が成り立つ、

命題7. ΩをRⁿの相対コンパクト開部分集合とする、そのとき,

- り前層野りなは層である。
- 2) この層は軟弱(flably)である.
- 3) Kがののコンパクト部分集合であれば、

 $\Gamma_{K}(\Omega, F_{B}|\Omega) = \Omega'(K; E)$

が成り立つ

 $4)F= \stackrel{P}{\longleftarrow} F_{\iota} \, f_{\Omega} \, o$ 関都分集合の合併で、 $T \in \Gamma_{\Gamma}(\Omega, \mathbb{P}|\Omega)$ であれば、 $T_{\iota} \in \Gamma_{\Gamma_{\iota}} \, (\Omega, \mathbb{P}|\Omega)$ があって、 $T = \stackrel{P}{\longleftarrow} T_{\iota} \, f_{\Omega} \, f_{\Omega} \, f_{\Omega}$ が成り 立つ、

5) wがSZの開部分集合であれば、 (EBISZ)|w=EB|w

が成り立つ.

近日, \mathbb{R}^n 上の \mathbf{F} - 値超函数を考える。 \mathbb{R}^n 上の前層 $\mathbf{F}_{\beta_1} = \{\Omega \to \mathcal{B}_{\beta_1}(\Omega; \mathbf{F}); \Omega \subset \mathbb{R}^n\}$

をひの様に定義する:

被覆 $\Omega = \{i \in \mathcal{S}_{C}, = = \tau, \mathcal{S}_{C} \mid \text{ は相対 コンパット 集合,}$ $\tau_{C} \in \mathcal{B}(\Omega_{C}; E), \tau_{C} \mid \Omega_{C} \cap \Omega_{C} = \tau_{C} \mid \Omega_{C} \cap \Omega_{C}$.

このような2つの対 $(\Omega_i, T_i)_{i'\in I}$ と $(\Omega_{i'}, T_{i'})_{i'\in I'}$ は, すべての $i\epsilon I$ とすべての $i'\epsilon I'$ に対し

 $T_i | \Omega_{i} \cap \Omega_{i'} = T_{i'} | \Omega_{i} \cap \Omega_{i'}$ が成り立つならば,同じE-値超函数を定義する。 $== \tau$ で,「1」は制限を表わす。= 0 とき,やか成り立つ。

- 2)層写 口軟弱である.
- サパの開集合 Ω に対し、 $F=\stackrel{r}{\iota}$ 、 F_i が Ω の閉集合の合併であれば、 $T\in F_i$ (Ω 、FB)に対し、 $T_i\in F_i$ (Ω 、FB)があって $T=\stackrel{r}{\iota}$ T_i が成り立つ.

L. SchwartsのF-値分布はF-値超函数と考えることができる。即ち、次が成り立つ。

定理了、PM上のE-値分布の層型は配の部分層である。

多4. 次に、Latoの基本定理と我々の今構成したE-値超函数の層をBとJ.D.F. Don-T. Kawaiの構成したものとの同型とをいくつかの準備とともに述べる。

最初に、H.Komatsu-P. Lehapiraによる『OPのDolleault型の今解定理を述べる、ニニで、るPは、CM上のE-値正則関数を係数とする(P,o)型の微分形式の層である。同様に、

 $E_{\beta}^{P,3}$ はE-値超函数を係数とする (P,3)型級分形式の作る \mathbb{C}^n 上の層とする、 \mathbb{C}^n は \mathbb{R}^{2n} と同一視されている、このとき, 少を得る。

<u>定理4. C*上で炎の完全系列を得了;</u>

「気を R^n 上のE- 値実解析関数 すの層とすると交が或り立つ。 <u>定理5</u>. Ω が R^n の開集合であれば,すべての正整数P に対し, $H^P(\Omega, E_0 \Gamma) = O$ が成り立つ。

でをで、上の下一値正則関数芽の層とすると、近のMalgrange の定理の抵張が成り立つ、

- (i) Hr(3, Fo)=0, ==T, P>n.
- (ii) $H^{p}(\widehat{\mathcal{X}}, {}^{\sharp} O) = 0$, $z = \overline{c}$, $p \ge n$.

- (i) $H_K^P(C^n, F_0) = 0$, z = 7, $p \neq n$.
- (ii) $H_{\mathsf{K}}^{\mathsf{n}}(\mathbb{C}^{\mathsf{n}}, \mathsf{Fo}) \cong H^{\mathsf{n-I}}(\mathbb{C}^{\mathsf{n}} \mathsf{K}, \mathsf{Fo}) \cong \mathcal{O}'(\mathsf{K}, \mathsf{F}).$

この定理は, E=Cの場合 Martinean が多様体に対し,

Hanveyがユークリッド空間に対し証明したものである。(i)は、定理のは定をみたすでのコンパクト集合K上の解析線形写像が層を立まな数とす了相対コホモロジークラスある!!はコホモロジークラスとして表めされてことを示して!!る。この定理がよれの基本定理を証明するのに基本的である。

<u>定理8</u>(Sato-Jon-Kawai). Qを肌の開集台とすると, やの(i), (ii)が成り立つ.

- (i) $H_{\Omega}^{P}(\mathbb{C}^{n}, F_{0}) = 0$, z = 7, $p \neq \eta$.
- (ii)前層 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^n({}^{\mathsf{E}_{\mathcal{O}}}) = \{\Omega \to \mathsf{H}_{\Omega}^n(\mathbb{C}^n, {}^{\mathsf{E}_{\mathcal{O}}}); \Omega \subset \mathbb{R}^n\}$ は層 になる。
 - (间同型光点(Ed) 等 多的成了至了。

これで、P.D.F. Jon-T. Kawaiの構成したE-値超函数の層がMartineau-Schapinaの方法で再構成とれることが今了.

多5. やに、Cechのコホモロジーを用いて、F-値超函 数をE-値正則関数の境界値として表力す。

ΩをRO開集合, XZをJART=QZZCTにあけるQの Stein近傍とする。

 $\Omega_i = \Omega_0 \{z \in \mathbb{C}^n; \int_{m} z_i \neq 0\}$ とかくと、 $\mathcal{U} = \{\Omega_i\}_{i=1}^n$ は $\Omega - \Omega_0$ 非輸状な被覆である. それは、 \mathcal{U} が $\Omega - \Omega_0$ よを的被覆であるかるである.

$$\widetilde{\Omega}^{\#}\Omega = \widehat{\Omega}_{i} \widetilde{\Omega}_{i}$$

$$\widetilde{\Omega}^{n} = \widehat{\Omega}_{i} \widetilde{\Omega}_{i}$$

とかく、いま、写像の到

$$\mathcal{O}(\widetilde{\Omega}^{\sharp}\Omega; E) \xrightarrow{\mu} H^{n-1}(u, F_0) \xrightarrow{\lambda} H^{n-1}(\widetilde{\Omega} - \Omega, F_0)$$

$$\xrightarrow{\delta} H^{m}_{\Omega}(\widetilde{\Omega}, F_0) \xrightarrow{p} \mathcal{B}(\Omega; E)$$

<u>定理</u> q . (i) やの自然な同型が成り立つ, $\mathcal{B}(\Omega; E) \cong \mathcal{O}(\mathfrak{I} \# \Omega; E)/\mathbb{Z} \mathcal{O}(\mathfrak{I}^{t}; E)$.

(ii) UEOU (R"; E) F 对L,

$$\widetilde{\mathcal{U}}(z) = \left(\frac{1}{2c\pi}\right)^{m} \mathcal{U}_{t}\left(\frac{1}{(t-2)\cdots(t-2n)}\right)$$

とおくと、 $\widetilde{U}(z) \in O(\mathbb{C}^m \# \mathbb{R}^m; E)$ で、 $b(\widetilde{u}) = U \# \overline{u}$ 立つ、(iii) $g \in \Omega(\Omega; E)$ に対し、 \mathbb{C}^m にかけるΩの \mathbb{Z} を満たし、 $g \# \widetilde{\Omega}$ 上の正則関数にまで延長できるよう 77 ものがとれる。このとき、 $\widetilde{\Omega}_{\alpha} = \{z \in \widetilde{\Omega}; \sigma L_{\alpha} z > 0\}$ 、 $O = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ 、 $\sigma_{\overline{u}} = \pm 1$ とおき、 $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ 内で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ で $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$ に $g \in \widetilde{\Omega}_{\alpha}$

とする、 $sgn(\sigma) = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ とする、 $= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma$

§6,最後に, E-値超函数をE-値正則関数の境界値として表かす前節の方法と同様の方法で, C^Mの直積型のコンパクト集合上の解析線形写像がE-値正則関数で表かせ了ことを示す。

K=K,x…xKnをCⁿのコンパット集合とし、ΩをKの Stein近傍とする。

 $\Omega_i = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C}^m; z_i \notin K_i\}$ とおくと、 $\mathcal{U} = \{S_i\}_{i=1}^m \notin \Omega - K$ の非輔状な被覆である。 $\Omega \# K = \bigcap_{i=1}^m S_i$, $\Omega^i = \bigcap_{i=1}^n S_i$

とかく、いま、写像の列

$$O(\Omega \# K; E) \xrightarrow{\mu} H^{n-1}(\Pi, F_{O}) \xrightarrow{\lambda} H^{n-1}(\Omega - K, F_{O})$$

$$\xrightarrow{S} H^{m}_{K}(C^{n}, F_{O}) \xrightarrow{S} O'(K; E)$$

に対し、 $b = \left(\frac{2}{3}\right)^m \rho \cdot \delta \cdot \lambda \cdot \mu$ とかく、2 = T、 μ は準同型、 λ は Leray の同型、 δ は Martineau の同型、 ρ は定理 $\eta(i)$ の同型を表めす、このとき、 突を得る。

<u>定理10</u>. (i)次の自然な同型が成り立つ, $O'(K; E) \cong O(\Omega \# K; E) / 歪 O(\Omega^i; E)$. (ii) $U \in O'(K; E)$ | F対し,

$$\widetilde{\mathcal{U}}(z) = \left(\frac{1}{2c\pi}\right)^n \mathcal{U}_{\xi}\left(\frac{1}{(\xi_1 - Z_1) \cdots (\xi_n - Z_n)}\right)$$

とかくと、 $\widetilde{\chi}(z)\in\mathcal{O}(\Omega^{\#}K;E)$ で、 $b(\widetilde{\chi})=U$ が成り立つ。 (iii) $f\in\mathcal{O}(\Omega^{\#}K;E)$ とする、 $f\in\mathcal{O}(K)$ に対し、 Ω に含まれる K の近傍 $\omega=\omega_1\times\dots\times\omega_n$ で、 $f\in\mathcal{O}(\omega)$ を満たすものをとすことができる。 「こを、K な友時計まわりに I 回まわる W 内の正則曲線とする。このとき、 $b(f)\in\mathcal{O}'(K;E)$ は、公式

$$b(f)(g) = (-1)^n \int_{\Gamma_n} --\int_{\Gamma_n} f(z) g(z) dz, --dz_n$$

によって多に作用する.

く参考文献〉

- [1] Ito, Y.: analytic linear mappings and vector valued hyperfunctions, 1977, (to appear).
- [2] —: Theory of analytic linear mappings, I. General theory, 1977, (to appear).
 - [3]—: On the Theory of vector valued hyperfunctions, 1997, to appear). 他の文南が月月しては,[1]—[3]のReferences を見ても311を11.