

Maximally degenerate な台をもつ

不確定特異点型 擬微分方程式

東大 理 青 木 貴 史

上記の題を行つた講演に於て定理として発表した結果の証明に誤り
(次元 > 1 のとき) があり、改善を試みたが期日までに果せなかつたので以下では 1次元の場合の結果およびそれに先立ち、道具として用いる片岡による \mathcal{E}^R の symbol の理論を述べ、十分な吟味を怠り発表したことに對するお詫言として、

1. \mathcal{E}^R の symbol (片岡 [1], [3])

\mathcal{E}^R の定義に關しては 柏原 - Schapira [5] 等を参照していただくことにし

2. 以下では $X = \mathbb{C}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$, $T^*X \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, \zeta) = (x_1, \dots, x_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$

とし、 $x_0^* = (x_0, \zeta_0) = (0, \zeta_{01}, 0, \dots, 0)$ ($\zeta_{01} \neq 0$) の近傍 (錐状近傍) 上で \mathcal{E}^R

($= \mathcal{E}_x^R$) を考える。座標は x と ζ と固定しておく。

$\mathcal{E}_{x_0^*}^R \ni F$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いた Radon 変換表示 (片岡 [1], [2]) によつて

$$f(x, \zeta, \langle x - x', \zeta \rangle) d\sigma(\zeta) dx'$$

の同値類として表現される。こゝに $f(x, \zeta, p)$ は 各 $\varepsilon > 0$ に對し

$$\left\{ (x, \zeta, p) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid |x - x_0| < \varepsilon, \left| \frac{p}{\zeta_1} \right| < \varepsilon, \left| \frac{\zeta}{\zeta_1} - \frac{\zeta_0}{\zeta_{01}} \right| < \varepsilon, -\operatorname{Re} \frac{p}{\zeta_1} > -\varepsilon \left| \operatorname{Im} \frac{p}{\zeta_1} \right| \right\}$$

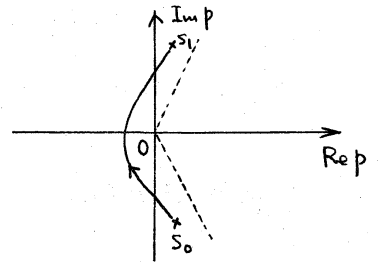
\mathbb{Z}^n 正則な $(\zeta, p) \mapsto \tau(-n)$ 次同次多項式, $d\sigma(\zeta) = \sum (-1)^{j-1} \zeta_j d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$,
 $x^1 = (x'_1, \dots, x'_n)$. 0-class は $f(x, \zeta, p)$ が $(x, \zeta, p) = (x_0, \zeta_0, 0)$ で \mathbb{Z}^n
 に対して正則なものを \mathbb{Z}^n である. この f に対して

定義 1. $F(x, \zeta) = (2\pi\sqrt{-1})^{n-1} \int_{s_0(\zeta)}^{s_1(\zeta)} f(x, \zeta, p) e^{-p} dp$ とおく.

ただし s_0, s_1 は ζ について 1 次同次正則函数

で $\zeta = \zeta_0$ かつ $\operatorname{Re} s_0 > 0, \operatorname{Re} s_1 > 0, \operatorname{Im} s_0 < 0,$

$\operatorname{Im} s_1 > 0$ なるもの. 積分路は右図の如くとする.



$F(x, \zeta) \in F \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}^n}^R$ の symbol といい $F = F(x, D_x)$

と表すもの.

命題 2. 上記で定義された $F(x, \zeta)$ は次を満たす.

1) $F(x, \zeta)$ は $\exists \varepsilon > 0, \Omega = \{ |x - x_0| < \varepsilon, \left| \frac{\zeta}{\zeta_1} - \frac{\zeta_0}{\zeta_{01}} \right| < \varepsilon \}$ で正則.

2) $\forall \omega \subset \subset \Omega, \forall \delta > 0 \quad \sup |F(x, \zeta) e^{-\delta|\zeta|}| < \infty.$

ただし $\omega \subset \subset \Omega$ は ω が Ω 内の compactly generated cone であることを,

\sup は $\omega \cap \{ |\zeta| \geq 1 \}$ 上でとる. 以下この Ω の性質に \mathbb{Z}^n 記号を用いる. また

この評価が \mathbb{Z}^n 可解析函数を 緩増大 であることをいう.

3) $f(x, \zeta, p)$ が $(x_0, \zeta_0, 0)$ で \mathbb{Z}^n 正則 であることを $\exists \delta > 0, \forall \omega \subset \subset \Omega$

$\sup |F(x, \zeta) e^{\delta|\zeta|}| < \infty$ なる評価を F が \mathbb{Z}^n 可解析函数 急減少 であることをいう.

この評価が \mathbb{Z}^n 可解析函数を 急減少 であることをいう.

$$4) \quad g(x, \zeta, p) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_0^\infty \zeta_1^{-n} F(x, s \frac{\zeta}{\zeta_1}) e^{\frac{p}{\zeta_1} s} s^{n-1} ds \quad \text{とある}$$

$f - g$ は $p=0$ のとき ζ の正則

5) 逆に 1), 2) をあてがう $F(x, \zeta)$ に対して 4) の積分により定義される g をとり ζ の symbol を $G(x, \zeta)$ とすると $F(x, \zeta) - G(x, \zeta)$ は急減少である。

注意 3 定義 1. における s_0, s_1 のとり方の不定性は急減少函数の存在だけ現れる。

例 4 $\zeta_1 \neq 0$ とき $\log D_1, \sqrt{D_1}, \exp \sqrt{D_1}$ 等は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol といえる。

命題 2 1) による $\mathcal{E}_{\text{reg}}^{\mathbb{R}} \simeq$ 緩増大解析函数 mod 急減少解析函数 である。

定義 1 の $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol (以後 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol といふ) と、
 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}} \ni P(x, D)$ の symbol 表示 $P(x, D) = \sum_j P_j(x, D)$ (P_j は j 次同次) との関係その通り。各同次成分 $P_j(x, \zeta)$ の正則函数としての和 $\sum_j P_j(x, \zeta)$ が広義一様収束すればその和 $P(x, \zeta) = \sum_j P_j(x, \zeta)$ は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol と一致する。(ただし modulo 急減少函数)。特に $j \geq 0$ に対して

$$P_j \text{ は } (*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon \quad |P_j(x, \zeta)| |\zeta|^{-j} \leq \frac{C_\varepsilon}{j!} \varepsilon^j \quad \forall j \geq 0$$

という評価をあたえ $\sum_{j \geq 0} P_j(x, \zeta) = P_+(x, \zeta)$ は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol と一致するから

$P_+(x, D) = \sum_{j \geq 0} P_j(x, D)$ は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol と $P_+(x, \zeta)$ は一致する。

(*) の評価より $|P_+(x, \zeta)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon |\zeta|}$ を得るから、これは

命題 2 の 2) の評価に他ならない。 $P_-(x, D) = \sum_{j < 0} P_j(x, D)$ による

$\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, \zeta)$ は収束する限り有限ならば, 各 P_j の ζ について適当な急減少関数 ε を $\varepsilon \eta = \varepsilon$ の和 $P_{-}(x, \zeta)$ が存在し, それを $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ a η at ε の symbol とする. 従って $P_{-}(x, \zeta)$ は形式和 $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, \zeta)$ の漸近展開と見做す.

一般に

命題 5 (x_0, ζ_0) の錐状近傍 $\Omega \subset T^*X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ で定義された

正則関数列 $\{F_j(x, \zeta)\}_{j=0}^{\infty}$ が

$$\forall K \Subset \Omega, \exists M > 0, \forall \delta > 0 \exists C_{\delta} > 0 \text{ s.t.}$$

$$|F_j(x, \zeta)| \leq C_{\delta} M^{|j|} j! |\zeta|^{\delta} e^{\delta|\zeta|} \quad \text{in } K \cap \{|\zeta| \geq 1\}$$

という評価が成り立つならば $F(x, D_x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x, D_x) \in \mathcal{E}_{x_0^*}^{\mathbb{R}}$ が定まる.

命題 6 (形式共役) $F(x, D_x) \in \mathcal{E}_{x_0^*}^{\mathbb{R}}$ の形式共役 $G(x, D_x) \in \mathcal{E}_{2a(x_0^*)}^{\mathbb{R}}$

($T_2 = l$ a $(x_0^*) = (x_0, -\zeta_0)$) は F a symbol $\varepsilon F(x, \zeta)$ とおくと

$$G(x, D_x) = \sum_{k \geq 0} G_k(x, D_x)$$

$$T_2 = l \quad G_k(x, \zeta) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_{\zeta}^{\alpha} D_x^{\alpha} F)(x, -\zeta)$$

で表わすことができる.

命題 7 (結合) $F(x, D_x) = \sum_{j \geq 0} F_j(x, D_x), G(x, D_x) = \sum_{k \geq 0} G_k(x, D_x)$

を命題 5 の条件をみたす和とすると $F(x, D_x) G(x, D_x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_{\ell}(x, D_x)$

$$T_2 = l \quad R_{\ell}(x, \zeta) = \sum_{j+k+l=\ell} \frac{1}{\alpha!} D_{\zeta}^{\alpha} F_j(x, \zeta) D_x^{\alpha} G_k(x, \zeta)$$

と表示できる.

応用として定数係数無限階微分作用素の $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ における可逆性について
触れておく。証明は河合 [4] LEMMA 4.1.3 より直ちに従う。

命題 8 $P(D) \in X = \mathbb{C}^n$ 上の定数係数無限階微分作用素,
 $P(\zeta) \in \mathcal{S}'$ の symbol とする。 $V = \{ \zeta \in \mathbb{C}^n \mid P(\zeta) = 0 \}$ とする。 $\zeta_0 \in \mathbb{C}^n$
の錐状近傍 Ω として $R > 0$ を十分大きくすると $V \cap \Omega \cap \{ |\zeta| > R \} = \emptyset$ なるものを
存在すれば $P(D)$ は $X \times \{ \zeta_0 \} \subset T^*X$ 上で $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の作用素として可逆である。

2. Maximally degenerate 場合を含む擬微分方程式 — 次元 $n=1$ の場合 —

$X = \mathbb{C}$ の原点 0 を含む常擬微分方程式 (単独のみを考える)

$$\mathcal{M} : P(x, D)u = 0 \quad (D = \frac{d}{dx})$$

$\in T^*X$ の点 $x_0^* = (0; \zeta_0 dx)$ ($\zeta_0 \neq 0$) を考える。 P の principal symbol は
 $x^m \times$ (non-zero) の形になる。 Weierstrass 型の割算定理によつて可逆因子 $\{ \alpha_j \}$ として P は

$$x^m - P_0'(D)x^{m-1} - \dots - P_{m-2}'(D)x - P_{m-1}'(D)$$

の形とすることができる。 $t \in \mathbb{C}$ ($[P_j', D] = 0$, order $P_j' \leq -1$) である。 さしに x_0^* で可逆
な作用素 D^m をかけ整理してはいかぬ

$$P(x, D) = (xD)^m - P_0(D)(xD)^{m-1} - \dots - P_{m-2}(D) \cdot xD - P_{m-1}(D)$$

と仮定してよい。 order $P_j = r_j \leq j$ である。 以下 P はこの形とする。

このとき原点の非正則度は $\sigma = \max_{1 \leq j \leq m} \{ 1, j/(j-r_{j-1}) \}$ と与えられる。

$1 \leq \sigma \leq m$ であるが、 $\sigma = 1$, $\sigma > 1$ に応じてそれぞれ原点は確定特異点,
不確定特異点であるといふ。

さて $\mathcal{N}_0 : x v = 0$ という方程式を考え $\mathcal{N}_0^m = \mathcal{N}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_0$ (m 個の直和)

と置く。このとき

命題 9 x_0^* の近傍で $\mathcal{E}^R \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}^R \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{N}_0^m$

証明 \mathcal{M} を行列を用いて書きかえる:

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & & \dots & 0 \\ P_{m-1}(D) & P_{m-2}(D) & \dots & 0 & 1 \\ & & & & P_0(D) \end{pmatrix}$$

$$U = {}^t(u_1, \dots, u_m)$$

とすれば \mathcal{M} は $(xD - M(D))U = 0$ と同値である。さて x_0^* で

可逆な作用素の行列

$$C = \begin{pmatrix} D^{m-1} & & 0 \\ & D^{m-2} & \\ 0 & & D \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

で変換すると $C(xD - M(D))C^{-1} = xD - A(D)$, ただし

$$A(D) = \begin{pmatrix} 1-m & D & & & 0 \\ & 2-m & D & \dots & \\ 0 & & & \dots & -1 & D \\ P_{m-1} D^{1-m} & P_{m-2} D^{2-m} & \dots & & & P_0 \end{pmatrix},$$

ゆえ \mathcal{M} は方程式 $(xD - A(D))V = 0$ ($V = {}^t(v_1, \dots, v_m)$) と

同値である。また \mathcal{N}_0^m は x_0^* の近傍で方程式 $xDW = 0$ と同値で

ある ($W = {}^t(w_1, \dots, w_m)$)。こゝまで \mathcal{E} -加群として方程式を扱った。

以上の reduction によつて

$$(xD - A(D))R(D) = R(D) \cdot xD$$

は E^R の作用素の可逆な $m \times m$ 行列 $R(D)$ ($[R, D] = 0$) を構成すればよい。書きなおして

$$(*) \quad [x, R(D)] \cdot D = A(D) R(D).$$

$A(D)$ の E^R の η での symbol を $A(\zeta)$ とする。 $A(D)$ は $\omega^* = (0, \zeta_0 dx)$ ($\zeta_0 \neq 0$) の近傍で定義された作用素ゆえ $A(\zeta)$ は $\mathbb{C} \ni \zeta_0 \in$ 含む角領域 Ω で定義された正則函数で $\zeta \rightarrow \infty$ のとき

$$A(\zeta) \sim A_1(\zeta) + A_0 + A_{-1}(\zeta) + \dots$$

という漸近展開をもつ。ここには $A_j(\zeta)$ は $A(D)$ の j 次同次成分である。

従って特にはじめに行う reduction は

$$A_1(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}$$

であることを注意する。

$\zeta = z$ での常微分方程式を考える。

$$(**) \quad -\frac{d}{dz} R(\zeta) \cdot \zeta = A(\zeta) R(\zeta)$$

これは ∞ に高々 rank 1 の不確定特異点をもつ線型常微分方程式である。その解の基本系を $R(\zeta)$ とする。 $R(\zeta)$ が E^R の作用素の可逆な行列の symbol であることを示せば $R(\zeta)$ を symbol とする作用素 $R(D)$ が $(*)$ を満たすことは明らかである。命題が示される。

$R(\zeta)$ は Ω で正則函数の行列として可逆である。 $R(\zeta)$, $R(\zeta)^{-1}$ の $\zeta \rightarrow \infty$ での増大度を調べる。ここから方程式 $(**)$ における $A(\zeta)$ の漸近展開

の主要部 $A_1(\zeta)$ が $\lambda \neq 0$ であることから次の評価を得る。(渋谷 [8] §5.4)

$$|R(\zeta)| \leq K \exp(L|\zeta|^{\frac{m-1}{m}})$$

$$|R(\zeta)^{-1}| \leq K \exp(L|\zeta|^{\frac{m-1}{m}})$$

ただし K, L は適当な正の定数である。よって $R(\zeta)$ は \mathcal{E}^R の作用素の可逆な行列 $R(D)$ を定め 命題が示された。

注意 10 $R(\zeta)$ の評価は σ を原点の非正則度とすると

$$|R(\zeta)| \leq K \exp(L|\zeta|^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})$$

まで改良することができる。($R(\zeta)^{-1}$ も同様)

例 11 方程式 $((xD)^2 - D)u = 0$ を考える。この方程式を用い

てかいたば $(xD - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ D & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$. ($D = \frac{d}{dx}$)

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = R(D) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_0(2\sqrt{D}) & , & -I_0(2\sqrt{D}) \log D + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k!^2} D^k \\ -\sqrt{D} I_1(2\sqrt{D}) & , & 1 + \sqrt{D} I_1(2\sqrt{D}) \log D - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k}{k!(k+1)!} D^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = R(D)^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{D} I_1(2\sqrt{D}) \log D - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k}{k!(k+1)!} D^{k+1} & , & I_0(2\sqrt{D}) \log D - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k!^2} D^k \\ \sqrt{D} I_1(2\sqrt{D}) & , & I_0(2\sqrt{D}) \end{pmatrix}$$

よって方程式 $x D \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ と同値である。ただし

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k!(k+1)!}, \quad \psi_k = 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}, \quad \Psi_k = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}.$$

さて命題の証明において得られた同型 $R(D) \in \{(0, e^{i\theta} \zeta_0 dx) \mid 0 < \theta \leq 2\pi\}$ に沿って接続して z と z_0 の間に Γ とおくと $R^*(D)$ で表わす。 $R(D)^{-1} R^*(D) = M$ とおくと $M \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\tilde{\eta}_0^{\mathbb{R}})^m / \sim \cong \text{GL}(m, \mathbb{C}) / \sim$ 。 $\Gamma = \Gamma \circ \mathbb{C} \tilde{\eta}_0 : xDV = 0$, $\tilde{\eta}_0^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes \tilde{\eta}_0$, $(\tilde{\eta}_0^{\mathbb{R}})^m = \tilde{\eta}_0^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus \tilde{\eta}_0^{\mathbb{R}}$ (m 個の直和), またある $W \in \text{GL}(m, \mathbb{C})$ があって $WM_1W^{-1} = M_2$ となるとき $M_1 \sim M_2$ と定めた。 $M = P(M)$ とおき M を monodromy 行列という。(大島 [7], 柏原-大島 [6]) 同値類 ρ によって ρ は well defined となる。命題の系として (佐藤-河合-柏原 [9])

命題 12 はじめの仮定をみたす ρ 上の擬微分方程式 M_1, M_2 に対して

$$M_1^{\rho} \simeq M_2^{\rho} \iff \rho(M_1) = \rho(M_2)$$

$$\Gamma = \Gamma \circ \mathbb{C} \tilde{\eta}_0 : M^{\rho} = \mathcal{E}^{\rho} \otimes M$$

— 次元 $n > 1$ の場合: 予想 —

次の方程式 $M : Pu = 0$ $\in x_0^* = (0; \zeta_0 dx_1)$ ($\zeta_0 \neq 0$) の近傍 z を考える。 $\Gamma = \Gamma \circ \mathbb{C}$

$$P(x, D) = (x_1 D_1)^m - P_0(x', D) (x_1 D_1)^{m-1} - \dots - P_{m-1}(x', D)$$

$$\text{order } P_j \leq j, \quad x' = (x_2, \dots, x_n), \quad D = (D_1, \dots, D_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

また $\tilde{\eta}_0 : x_1 V = 0$ とおくと

$$\text{予想} \quad \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{\rho} \otimes M \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{\rho} \otimes \tilde{\eta}_0^m$$

References

- 片岡清臣 [1] 超関数のラドン変換とその応用について, 東京大学修士論文, 1976.
- [2] On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, to appear.
- [3] 代数解析セミナー 1978年5月13日 於東京大学
- 河合隆裕 [4] On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 17 (1970), 467-517.
- 柏原正樹, P. Schapira [5] Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe, Inv. Math. 46 (1978), 17-38.
- 柏原正樹, 大島利雄 [6] Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. of Math. 106 (1977), 145-200.
- 大島利雄 [7] Maximally degenerate な台を持つ擬微分方程式について, 数理研講究録 226 代数解析学とその応用 (1975), 29-38.
- 渋谷泰隆 [8] 複素領域における線形常微分方程式, 紀伊國屋書店, 1976.
- 佐藤幹夫, 河合隆裕, 柏原正樹 [9] 超関数論における擬微分方程式論, 数学 25 (1973), 213-238.