数理解析研究所講究録
355巻 1979年 18-35

Yang-Mills場と代数的ベクトル束

京大　数理研　　村瀬元彦

研究集会で「Instantonのmoduliについて」なる題のもとに行なった講演では，Yang-Mills方程式の解空間を具体的に決定する手がかりを与えると思われた次の結果；「SU(2)-instantonは複素領域に於けるそのpolesの位置によって，uniqueに定まる」([7])を紹介した．しかし研究集会のあと1ヵ月程してDrinfeld-Maninの論文[4]が届き，instantonのmoduli spaceは完全に決定されたことが明らかになった．彼等はgauge群がSU(2n)の場合のn-instanton解をすべて具体的に表示することにより，任意のinstanton解を得たのである．この結果が出たことにより，古典場としてのYang-Mills場(or方程式)に対しては，代数学的あるいは幾何学的側面から見て残された問題は唯一つ，「2階のYang-Mills方程式と1階化されたアンチ(anti-) self-dual Yang-Mills方程式とは同値か？」だけにな

ったように思われる．これに関しても，既にAtiyah－Jones，Bourguignon等によりいくつかの結果が得られている（[3]の文献表参照）．

本稿では，gauge群が$SU(n)$の場合のinstantonに対応して出てくる$\mathbb{P}^3$上のrank nの代数的ベクトル束が，どのような性質を持つか，を論ずる．既に物理の方ではinstantonに対する関心がうすれてしまっている[9]ので，以後はBourguignonの言葉"… it is time to start the analysis of Yang－Mills equations."[3]に耳を傾けたい．

> Bourguignonが Drinfeld－Manin の方法を徹底的にけぎらいしているのは実に面白い．「あまり本質的とは思われない複雑な構造をいっぱい持ちこんでやるのは不自然だ，しかし私に解を作って見せろと言われると困るのだが，」と言っていたのが面白かった．

1. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$の変形．

Rigidなcompact複素多様体の複素解析族を底空間B上に作ったとき，specialな多様体に対応する点の集合はBのどんな部分集合になるか，を調べてみる．すると，

そういう集合は任意の余次元を持って現われ得ることが判る．そこで問題を限って $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の変形ではどうか？と問う．$n=2$ の場合，即ち $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の変形に対してはよく知られており，special なものは底空間の divisor に対応して現われることが判っている．$n=3$ についても同様のことが成立する．

命題．$\begin{array}{c} \mathcal{M} \\ f \downarrow \\ B \end{array}$ を複素多様体 B を底空間とする $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ $(n=2,3)$ の複素解析族とする．

$$B \supset Z \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ x \in B \;\middle|\; f^{-1}(x) \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \right\}$$

を special な点の為す集合と呼ぶ．このとき Z は B の divisor である．

証明は簡単な計算である．（Brieskorn によって $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^{n-1}$-bundle の universal family が決定されているので，それをきちんと調べればよい．）n を一般にすると，計算が面倒になるのでよく判らない．しかし次の形に問題を制限すると，同じような結果が得られる．そして，その特別な場合が Yang-Mills 方程式を調べるのに役立て

られるのである．

<u>定理 1</u>．　E を $\mathbb{P}^m$ 上の rank n のベクトル束で，次の条件

(*) $\mathbb{P}^m$ の general な line L に E を制限した $E|_L$ は $L \cong \mathbb{P}^1$ 上の代数的自明な rank n のベクトル束になる．

を満たすもの，とする．

$Gr = Gr(1, m)$ で $\mathbb{P}^m$ の lines を分類する Graßmann 多様体を表わす．また $x \in Gr$ に対応する $\mathbb{P}^m$ の line を $\tau^{-1}(x)$ と書く．このとき

$$J = \{ x \in Gr(1, m) \mid E|_{\tau^{-1}(x)} \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^n \}$$

によって定まる Gr の部分集合 J は Gr の divisor になる（空集合かも知れない）．

<u>Remark</u>．　$Fl = Fl(0, 1, m) \hookrightarrow Gr(1, m) \times \mathbb{P}^m$ を旗多様体，$\alpha : Fl \longrightarrow Gr$，$\beta : Fl \longrightarrow \mathbb{P}^m$ を自然な projection，$\tau = \alpha \circ \beta^{-1}$ を代数的対応，とする．

Fl 上のベクトル束 $\beta^* E$ の各 fibre を projectify して得られる $\mathbb{P}^{n-1}$-bundle を α を通してながめれば，Gr 上の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の複素解析族を与えている．これの special

な点の為す集合が everywhere 余次元 1 を持つ，というのが定理の主張である．

証明． J を support とする torsion sheaf を Gr の上に定義し，それの locally free resolution が 2つで切れることを示す． 以下は Barth が rank 2 の場合を調べるのに [2] で用いた手法と全く同じものである．

条件 (*) により E の才1 Chern 類 $c_1(E)$ は 0 である． 従って $\mathbb{P}^m$ の任意の line L に対し，

(i) $\exists x \in J$ s.th. $\tau^{-1}(x) = L$ （こういう L を E の "jumping line" と呼ぶ．）

(ii) $H^0(L, (E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))|_L) \neq 0$

(iii) $H^1(L, (E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))|_L) \neq 0$

の 3つは互いに同値である． 但し $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1)$ は $\mathbb{P}^m$ 上の hyperplane bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ の dual line bundle，$E^\vee$ は E の dual bundle を示す． (ii)⟺(iii) は Serre - duality による． そこで，

$$\mathcal{L} = R^1\alpha_*\beta^*(E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))$$

と定めると， set theoretical に $J = \operatorname{supp} \mathcal{L}$ が成り立つ．

次に $E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1) = E^\vee(-1)$ の resolution をとろう．

$\mathbb{P}^m$ 上の任意の vector bundle は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ を十分沢山テンソルしておけば global sections で生成されるから、次のような locally free resolution がとれる：

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(l_i) \longrightarrow E^{\vee}(-1) \longrightarrow 0,$$

$l_i < 0$ for $\forall i = 1, \dots, r$.

これを用いて $\mathcal{L}$ の locally free resolution を作る。

まず、general な line $L \subset \mathbb{P}^m$ に対しては

$$H^0(L, (E^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))|_L) = 0$$

であるから、$\alpha_* \beta^* E^{\vee}(-1) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & Fl(0,1,m) \arrow[dl, "\alpha"', "\mathbb{P}^1"] \arrow[dr, "\beta", "\mathbb{P}^{m-1}"'] & \\
Gr(1,m) & & \mathbb{P}^m \arrow[ll, squiggly, "\tau"]
\end{tikzcd}$$

また、α の fibre は $\mathbb{P}^1$ ゆえ $R^2\alpha_*$ は消える。従って、

$$0 \longrightarrow R^1\alpha_*\beta^* K \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} R^1\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(l_i) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

α が Gr 上の $\mathbb{P}^1$-bundle の projection map であることに注意すれば、$M \underset{def}{=} R^1\alpha_*\beta^* K$ と $N \underset{def}{=} \bigoplus_{i=1}^{r} R^1\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(l_i)$ も Gr 上の coherent sheaf であることが判る。また、

$$h^1(L, \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_L(l_i)) \underset{def}{=} \dim_{\mathbb{C}} H^1(L, \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_L(l_i))$$

は line $L \subset \mathbb{P}^m$ によらない constant ゆえ、N は Gr 上の locally free sheaf である。

次に $M = R^1\alpha_*\beta^* K$ が locally free になることを示し

そう．その為には $h^1(L, K|_L)$ が constant であることを示せばよい．任意の line $L \subseteq \mathbb{P}^1$ に対し，$l_i < 0$ に注意して，次の完全列を得る：

$$0 \longrightarrow H^0(L, E^\vee(-1)|_L) \longrightarrow H^1(L, K|_L) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} H^1(L, \mathcal{O}_L(l_i)) \longrightarrow H^1(L, E^\vee(-1)|_L) \longrightarrow 0.$$

従って，

$$h^1(L, K|L) = \sum_{i=1}^{r} h^1(L, \mathcal{O}_L(l_i)) + h^0(L, E^\vee(-1)|_L) - h^1(L, E^\vee(-1)|_L).$$

$\sum_{i=1}^{r} h^1(L, \mathcal{O}_L(l_i))$ は constant であり，また $h^0(L, E^\vee(-1)|_L) - h^1(L, E^\vee(-1)|_L)$ も constant ゆえ $h^1(L, K|_L)$ は constant．よって

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda} N \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

は $\mathcal{L}$ の locally free resolution であることを知る．M と N の rank は等しいので，supp $\mathcal{L}$ は Gr の代数的部分集合として，$\det \lambda = 0$ によって定義されるから，Gr の divisor になることが判る．□

<u>定義</u>．Jumping lines の為す divisor J の multiplicity を $\det \lambda$ の multiplicity によって定義する．即ち，

$$\deg J \underset{\mathrm{def}}{=\!=} c_1(\mathcal{L}) = c_1(N) - c_1(M).$$

但し，$\mathrm{Pic}(Gr(1,\mathrm{III})) \cong \mathbb{Z}$ により Gr 上の sheaf の

第1 Chern 類 c_1 を整数と見為す．

定理 2. Eを定理1に於けるベクトル束とする．Eの第2 Chern 類 $c_2(E)$ を整数と見為したとき，それがpositive であるならば，$\deg J = c_2(E)$ が成り立つ．

証明．これも Barth [2] の idea をそのまま一般の rank に拡張すれば出来る．

$Gr(1,m)$ を Plücker 座標で射影空間にうめ込んだとき，その2次元線型部分空間 $\mathbb{P}^2$ が $Gr(1,2)$ として自然に $Gr(1,m)$ に入っている．従って $0 \to M \xrightarrow{\lambda} N \to L \to 0$ を general な $Gr(1,2) \cong \mathbb{P}^2$ に切って $c_1(N) - c_1(M)$ を調べることが出来る．つまり $m = 2$ として $c_1(N) - c_1(M)$ を計算すればよい．

以下 $E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) = F$ と書く．$m=2$ として，$Gr = Gr(1,2) \cong \mathbb{P}^2$, $Fl = Fl(0,1,2)$, $\Pi = Gr \times \mathbb{P}^2$ の様に表わす．

Barth [2]（より詳しくは [2] に引用されている Horrocks の結果）によれば，$\mathbb{P}^2$ 上では $F = E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ の resolution を

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

$k_i < 0$ for $\forall i = 1, \ldots, r-n$, $l_j < 0$ for $\forall j = 1, \ldots, r$,

の様に，negative 直線束の直和によって作ることが出来る．

$\pi : \mathbb{C}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を natural projection，

$0 \to K \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i) \longrightarrow F \to 0$ を resolution とする． $0 \to \pi^* K \to \bigoplus_{i=1}^{r} \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i) \to \pi^* F \to 0$ に於て，$H^1(\pi^* K) = 0$ を導くことが出来るから，$\iota : \mathbb{C}^3 - \{0\} \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ による direct image $\iota_* \pi^* K$ は locally free．従って K は直線束の直和に同値となるが，negative 直線束の直和の部分束なので各々は negative になる．詳しくは，G. Horrocks: Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring. Proc. London Math. Soc. 14, 689-713 (1964) 参照．しかしこの論文に出てくる述語は「category」と「functor」だけなので，何が書いてあるのかきわめて判りにくい．

このとき，

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r-n} k_i - \sum_{i=1}^{r} l_i = -c_1(F) = n \\ \sum_{i<j} k_i k_j - \sum_{i<j} l_i l_j = n \sum_{i=1}^{r-n} k_i - c_2(F) \end{cases}$$

である．

$\Pi = Gr(1,2) \times \mathbb{P}^2$ から $Gr = Gr(1,2)$ への projection を

π_1, $\mathbb{P}^2$ への projection を π_2 と書く.

$$\pi_1 : \Pi = \mathrm{Gr}\times\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathrm{Gr}, \qquad \pi_2 : \Pi = \mathrm{Gr}\times\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2.$$

$\mathrm{Fl} = \mathrm{Fl}(0,1,2)$ は Π の divisor で, その *ideal sheaf* は

$$\pi_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(-1) \otimes \pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \quad \text{である.}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Gr}\times\mathbb{P}^2 \arrow[d, equal] & \\
& \Pi \arrow[ddl, "\pi_1"'] \arrow[ddr, "\pi_2"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\
& \mathrm{Fl} \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
\mathrm{Gr} & & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

従って,

$$0 \longrightarrow \pi_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(-1)\otimes\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \longrightarrow \pi_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}\otimes\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \alpha^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}\otimes\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\to 0$$

ゆえ, 任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対し

$$0 \longrightarrow \pi_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(-1)\otimes\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1) \to \pi_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}\otimes\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow \alpha^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}\otimes\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)\to 0$$

即ち,

$$0 \longrightarrow \pi_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(-1)\otimes\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1) \longrightarrow \pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow \beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow 0$$

を得る. $k<0$ と仮定しよう. すると $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) = 0$ により,

$$0 \longrightarrow R^1\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow R^2\pi_{1*}\left(\pi_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(-1)\otimes\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1)\right) \longrightarrow R^2\pi_{1*}\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow 0$$

が判る. この第1項の c_1 を調べるには, 残り2つの c_1 を

見ればよい.

まず, $R^2\pi_{1*}\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) = H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Gr}$

は, Gr 上の自明ベクトル束ゆえ $c_1 = 0$.

次に $R^2\pi_{1*}(\pi_1^*\mathcal{O}_{Gr}(-1) \otimes \pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1))$

$$= H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Gr}(-1)$$

$$= H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k-2)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Gr}(-1) \qquad \text{(Serre duality)}$$

$$= \frac{1}{2}(k^2+k)\cdot \mathcal{O}_{Gr}(-1)$$

であるから, $c_1 = -\frac{1}{2}(k^2+k)$.

従って $c_1(R^1\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) = -\frac{1}{2}(k^2+k)$ for $k<0$.

これにより,

$$c_1\Big(\bigoplus_{i=1}^{r} R^1\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i)\Big) - c_1\Big(\bigoplus_{i=1}^{r-n} R^1\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_i)\Big)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum(l_i^2+l_i) + \frac{1}{2}\sum(k_i^2+k_i)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum k_i^2 - \sum l_i^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum k_i - \sum l_i\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{(\sum k_i)^2 - (\sum l_i)^2 - 2\sum_{i<j} k_ik_j + 2\sum_{i<j} l_il_j\Big\} - \frac{1}{2}c_1(F)$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{-c_1(F)\Big(\sum k_i + \sum l_i\Big) - 2(-c_1(F))\sum k_i + 2c_2(F)\Big\} - \frac{1}{2}c_1(F)$$

$$= c_2(F) - \frac{1}{2}c_1(F)^2 - \frac{1}{2}c_1(F)$$

$$= \frac{1}{2n}\Big(2n\,c_2(F) - (n-1)\,c_1(F)^2\Big)$$

と計算される.

ところで, $\mathbb{P}^2$ 上の rank n のベクトル束に対して定

表された $\frac{1}{2n}(2n\,c_2(F)-(n-1)\,c_1(F)^2)$ は，F を $F\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu)$ にかえても，μ にはよらない constant であることが判る．従って，その値をおめるにはうまく μ を選んで計算すればよい．さて，$F=(E^\vee\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))|_{\mathbb{P}^2}$ で，$c_1(E^\vee)=0$ であったから，$\mu=1$ にとれば，

$$c_1\Big(\bigoplus_{i=1}^{r} R^1\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i)\Big)-c_1\Big(\bigoplus_{i=1}^{r-n} R^1\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_i)\Big)$$
$$=\frac{1}{2n}(2n\,c_2(E^\vee)-(n-1)\,c_1(E^\vee))$$
$$=c_2(E^\vee)$$
$$=c_2(E)$$

となる．従って $\deg J=c_2(E)$ である．$\square$

2. Instanton.

Yang-Mills 方程式や instanton についての解説は，学会に於ける Bourguignon の講演が実に適格で明快なものであったので，[3] が参照されることを期待しつつ，ここではその一切を省略する．

ベクトル束と SU(2)-instanton については，Hartshorne [5] が詳しい研究を行なっている．対応して出てくる $\mathbb{P}^3$ 上のベクトル束を E と書くとき，E は rank 2 であり，

(1) $c_1(E)=0$, $c_2(E)>0$,

(2) E は stable vector bundle （定義は [2] 参照）

(3) E は symplectic 構造を持つ，

なる性質を有し，逆に (1), (2), (3) によって E が unique に決定される．

これを irreducible SU(n)-instanton (即ち SU(n-1)-instanton に reduce しない SU(n)-instanton) に関して調べてみると，

(1) $c_1(E)=0$, $c_2(E)>0$, $c_3(E)=0$,

(2)′ E は simple ベクトル束 (即ち global endomorphism が constant しかない)，

(3)′ 構造群が SU(n) であり，かつ S^4 上の bundle から作ったという意味で，"実構造" を持つ，

(4) $\mathbb{P}^3$ の general line L への E の制限 $E|L$ は，$L\cong\mathbb{P}^1$ 上の rank n の自明ベクトル束，

となっていることが判る．(4) はもちろん SU(2) のときにも成立しているが，それは (2) に含まれている．

(3) は $SU(2)=Sp(1)$ に由来するものなので，SU(n) の場合には Atiyah-Ward [1] や Hartshorne [5] のような形で "実構造" を表示することは出来ない．また，(2) の stability も，一般の rank に対してはよく判らない [6]．

一階化された anti-self-dual Yang-Mills 方程式の

解（instanton）を ω，それから定まる $\mathbb{P}^3$ 上の vector bundle を $E(\omega)$ とする．

$$\mathcal{L} = R^1\alpha_*\beta^*\left(E(\omega)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\right) \quad : \text{torsion sheaf on } Gr(1,3)$$

$$J(\omega) = \operatorname{supp}\mathcal{L} \quad \text{with multiplicity} \quad c_1(\mathcal{L})$$

とおくと，定理1，2 から，$J(\omega)$ は $Gr(1,3)$ の degree $c_2(E(\omega))$ の divisor であることが判る．

$Gr(1,3) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ の定義方程式が $z_0^2 = z_1^2 + \cdots + z_5^2$ となるように $\mathbb{P}^5$ の座標 z を定めたとき，$Gr(1,3)$ に z から決まる complex conjugation $^-$ が定義される．このとき (3)′ によって，

$$(3)'' \quad J(\omega) = \overline{J(\omega)}$$

が成り立つ．つまり $J(\omega)$ の定義方程式は実係数にとれる．

[8] では，irreducible instanton ω は $J(\omega)$ によって unique に定まることを述べた．$J(\omega)$ としてどんなものが出てくるかを見てみると，$n=2$, $c_1(E)=1$ のときには すべての real divisor of degree 1 が出てきていることが判る．一般の場合には Drinfeld–Manin [4] の結果を用いて調べることが出来るが，ある限られたものしか出てこない．なぜそうなのか，どうして可能な（と思われる）ものがすべて出て来るのではないのか，よく判らない．

3. その他.

P を $S = S^4$ 上の non-trivial $SU(n)$-principal bundle, ω を P 上の connection form, Ω を ω の curvature form とする. $c_2(P) > 0$ となるように S の orientation を決め, S の natural metric に関する Hodge star operator を $*$ で表わす.

Anti-self-dual Yang-Mills 方程式とは,

$$*\Omega = -\Omega$$

のことであった. そして, この方程式を満たす解 ω ($\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ に注意) を instanton solution と呼んだ.

$S \hookrightarrow Gr(1,3) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ を

$$S = \{ (z_0 : \cdots : z_5) \in \mathbb{P}^5 \mid z_0^2 = z_1^2 + \cdots + z_5^2,\ z_0, \cdots, z_5 \in \mathbb{R} \}$$

によって定めるとき, S 上の 2-form Ω は poles を持った type $(2,0)$ の form として $Gr(1,3)$ 上に解析接続出来る. それを $\tilde{\Omega}$ と書く. $\tilde{\Omega} = d\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]$ なる $\tilde{\omega}$ も ω の解析接続として定義出来る.

$\tilde{\omega}$ は $E(\omega)$ の jumping lines の為す divisor $J(\omega)$ に側ってのみ pole を持ち, residue 公式とも言うべき次の式が成立する;

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_S \mathrm{trace}\,\tilde{\Omega}\wedge\tilde{\Omega}\,\Big|_S = c_2(P) = \deg J(\omega).$$

$\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{trace}\,\Omega\wedge\Omega$ は S 上の Pontrjagin form であるから はじめの等式は自然であるが，二番目の，その値が pole の degree になる，というのは不思議に思われる．

$J(\omega)$ は instanton から決まるものである限りいつでも reduced divisor である．1．で扱ったような一般のベクトル束に対しても J が reduced になっているのかどうか，またベクトル束が J によって特徴づけられているのかどうか，はあまり判っていない．

$\mathbb{P}^3$ 以外の多様体に拡張しようとする時には，[8] で述べた Theorem 1 をどうとらえて高次元化するか，が KEY となるように思われる．

(1979年4月．K.C., A.K.!)

丸山正樹先生には，代数的ベクトル束について色々御教示載いた．ここに厚く感謝の意を表する．特に定理 2．が成立することを注意されたのは，丸山先生であった．

文献

[1] Atiyah, M.F. and Ward, R.S.: Instantons and algebraic geometry. Commun. Math. Phys. 55, 117–124 (1977).

[2] Barth, W.: Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_n$. Math. Ann. 226, 125–150 (1977).

[3] Bourguignon, J. P.: Geometry and physics of Yang–Mills fields. 幾何学分科会講演要旨（日本数学会） pp. 61–65（1979年4月).

[4] Drinfeld, V.G. and Manin, Yu. I.: A description of instantons. Commun. Math. Phys. 63, 177–192 (1978).

[5] Hartshorne, R.: Stable vector bundles and instantons. Commun. Math. Phys. 59, 1–15 (1978).

[6] Maruyama, M.: private communication.

[7] Mulase, M.: Yang–Mills 方程式の解の空間について. 城崎代数幾何学シンポジューム記録 pp. 177–201 (1978年12月).

[8] Mulase, M.: Poles of instantons and jumping

lines of algebraic vector bundles on $\mathbb{P}^3$. RIMS-preprint n°. 279 (1979).

[9] 't Hooft, G.: On the phase transition towards permanent quark confinement. Nuclear Physics B138, 1-25 (1978).

(この論文には，何が書いてあるのかサッパリ判らないけれども，path space 上の operator valued function を用いて何かしようというあたり，数学的に見て非常に面白そうに思われる．)