数理解析研究所講究録
355巻 1979年 1-17

線型常微分方程式の変形理論の Soliton 理論への応用

京大 数理研 上野 喜三雄

§0 Soliton 理論 (or Isospectral Deformation) (Date[2], Kricheber[1]) を我々のモノドロミー保存変形理論の立場から捉え直してみよう。その際, 我々がとる基本的原理は, "見かけの特異点 (apparente singularity) をもつ常微分方程式(系)の変形理論を構成せよ" ということに集約される。現在のところ具体的計算が実行されているのは, sine-Gordon 方程式 (略して, s-G eq.) についてのみであるが, 将来は, isospectral deformation (or Zakharov-Shabat formalism [3], AKNS formalism [4] 及び, 前述の文献) によって得られる非線型方程式の多くが, 我々の変形理論の枠内で捉えられるものと期待される。

なお, この小文を書くにあたり, 東大の岡本和夫先生との討論は, 非常に貴重かつ本質的なものでした。岡本先生に心から感謝いたします。

§1 s-G eq の N-soliton 解の構成法 (Date[1]) と関連して必要とされる常微分方程式は次の type のものである。

(1) $PY=0$, ただし, $P=\frac{d}{dx}-A(x;t)=\frac{d}{dx}-(x^2E+xF+G+\sum_{i=1}^{N}\frac{H_i}{x-a_i})$

ここで, $a_i\neq a_j$ for $i\neq j$, $a_i\neq 0$ for $\forall i$ とする。又, $t=(t_1,\cdots,t_\ell)\in T$ $\subset\mathbb{C}^\ell$ (Tは適当な有界領域) はパラメーターで, E,F,G,H_i はtの正則函数を成分とする2x2行列であって, 更に以下に述べる条件をみたすとする。$G=diag(g_1,g_2)$, $g_1\neq g_2$, $E=K\hat{E}K^{-1}$, $\hat{E}=diag(e_1,e_2)$ $e_1\neq e_2$, $K,\hat{E}$の成分はtの正則函数。H_iの固有値は, 1と0である。又, a_iは, tに依存しない定数とする。さらに $x=a_i$ は見かけの特異点であると仮定する。

見かけの特異点は次の様に定義される。"$x=a$は方程式の係数の特異点ではあるが, 解はその点において分岐せず, 正則又は極をもつとき, $x=a$を見かけの特異点という。"

上の定義をもう少し広く解釈して, 解がその点の近傍で非対数的(non-logarithmic)となる場合も, 見かけの特異点と呼ぶこともある。見かけの特異点があらわれる為に, 変形の際の保存量として新しいものが登場する。(cf Ueno[6], [7])

さて, 上記の条件のもとで, 以下の条件をみたす解の基本系の組 $\{Y_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{M+1}$, $\{Z_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{M'+1}$ が存在する。まず, $Y_j^{(\infty)}$ 達は, 次の如きものである。

(i) $S_j^{(\infty)}$ $(j=1,\cdots,M,M+1)$ は, $x=\infty$ を頂点にもつ, 頂角 $<\pi$ の角領域

(ii) $S_j^{(\infty)}\cap S_{j+1}^{(\infty)}\neq\phi$, $\bigcup_{j=1}^{M}S_j^{(\infty)}\supset\{x;\alpha\leq\arg x\leq\alpha+2\pi, x_\infty<|x|<+\infty\}$

(iii) $S_{M+1}^{(\infty)} = S_1^{(\infty)} e^{2\pi i}$

(iv) $\mathrm{Re}\{(q_\alpha - q_\beta)x\} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ で定まる放射線は S_j の内部にある。

(v) $Y_j^{(\infty)}(x;t)$ は(1)の解の基本系であり，t については T で正則。

(vi) $Y_j^{(\infty)}(x;t) \approx \hat{Y}^{(\infty)}(x;t) x^{D^{(\infty)}} \exp(xG)$ $in\ S_j^{(\infty)} \times T$ $j = 1, \cdots, M+1$

（この等式の意味は，左辺の函数が右辺の形式的級数をパラメーター t について一様な漸近展開としてもつということ。）

ここで，$\hat{Y}^{(\infty)} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k(t) x^{-k}$，$D^{(\infty)} = diag(d_1^{(\infty)}, d_2^{(\infty)})$

(vii) $Y_{M+1}^{(\infty)} = {}^{\gamma_\infty^{-1}}Y_1^{(\infty)} e^{2\pi i D^{(\infty)}}$；$\gamma_\infty$ は，$x = \infty$ のまわりを正の向きに一周する閉曲線で，${}^{\gamma_\infty^{-1}}Y_1^{(\infty)}$ は，$Y_1^{(\infty)}$ を γ_∞^{-1} に沿って解析接続したという意味である。

次に，$Y = KZ$ と変数変換すると，(1)は次の如くなる。

(2) $\dfrac{dZ}{dx} = \left(x^2 \hat{E} + x^1 K^{-1}FK + K^{-1}GK + \sum_{i=1}^{N} \dfrac{K^{-1}H_iK}{x - a_i}\right) Z$

この方程式に対してやはり前述した性質をもつ角領域 $S_j^{(0)}$ と解の基本系 $Z_j^{(0)}(x;t)$，$j = 1, \cdots, M', M'+1$ が存在する。とくに，

$Z_j^{(0)}(x;t) \approx \hat{Z}^{(0)}(x;t) x^{D^{(0)}} \exp(-x^1 \hat{E})$ $in\ S_j^{(0)} \times T$，$j = 1, \cdots, M'+1$

ただし，$\hat{Z}^{(0)} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Z}_k(t) x^{-k}$，$D^{(0)} = diag(d_1^{(0)}, d_2^{(0)})$

が成立する。

次に，見かけの特異点のまわりでの解の標準型について論

じよう。

補題1　方程式；$x\frac{d}{dx}Y=A(x)Y$ ($A(x)$は，$x=0$の近傍で正則）において$A(0)$の固有値は，$\lambda, \lambda+k$（kは正の整数）とする。もし$x=0$が見かけの特異点(今の場合，非対数的特異点という拡張された意味に解釈する。）であれば，解の基本系は，次の如くなる。

(3) $Y=x^{J_1}\cdot x^{J_2}\cdots\cdot x^{J_k}\Psi(x)x^{\Lambda}$

ただし，J_ℓの固有値は，1と0，又$\Psi(x)$は$x=0$の近傍で正則かつ$\det\Psi(0)\neq 0$である。

証明　まず，適当な非特異行列で，$A(0)$を対角化しておく。$T_1^{-1}A(0)T_1=diag(\lambda, \lambda+k)$。$Y=T_1V$と変換すると，方程式は，$x\frac{d}{dx}V=T_1^{-1}A(x)T_1V=B(x)V$，ただし，

$$B(x)=\begin{bmatrix} \lambda+x\psi_{11}^{(1)}(x) & x\psi_{12}^{(1)}(x) \\ x\psi_{21}^{(1)}(x) & \lambda+k+x\psi_{22}^{(1)}(x) \end{bmatrix}$$

となる。さらにshearing変換 $V=S(x)Y_1$, $S(x)=diag(1,x)$を行うと方程式は次の如くなる。

$$x\frac{d}{dx}Y_1=\{S^{-1}(x)B(x)S(x)-xS^{-1}(x)\frac{d}{dx}S(x)\}Y_1=A_1(x)Y_1$$

$$A_1(x)=\begin{bmatrix} \lambda+x\psi_{11}^{(1)}(x), & x^2\psi_{12}^{(1)}(x) \\ \psi_{21}^{(1)}(x) & \lambda+k-1+x\psi_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$A_1(0)$の固有値は，$\lambda, \lambda+k-1$である。そこで，同様な変換をk回繰り返して行えば，その結果得られる方程式は，

$$x\frac{d}{dx}Y_k = A_k(x)Y_k$$

$$A_k(x) = \begin{bmatrix} \lambda + x\psi_{11}^{(k)}(x) & x^2\psi_{12}^{(k)}(x) \\ \psi_{21}^{(k)}(x) & \lambda + x\psi_{22}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

この方程式は，次の様な解の基本系をもつ。

$$Y_k = \Phi_k(x)x^{\lambda}\left[I + \log x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \psi_{21}^{(k)}(0) & 0 \end{bmatrix}\right],$$

$\Phi_k(x)$ は，$x=0$ で正則かつ $\Phi_k(0)=I$

今，$x=0$ は，非対数的特異点であると仮定しているので，$\psi_{21}^{(k)}(0)=0$ である。以上でもとの方程式は，$Y = T_1S(x)\cdots T_kS(x)\Phi_k(x)x^{\lambda}$ という解の基本系をもつことがわかった。これをまとめれば(3)の如くなる。なお，$A(x)$ が適当なパラメーターに正則に依存するとき，上の Φ_k はパラメータについて正則となる。 q.e.d.

さて，各特異点の近傍での解の標準型(or 正規化された解)がわかったので，次にそれらの解の接続問題を論じる。

まず，$x=\infty$ における Stokes係数とは今の場合，次の式によって定義される非特異行列(xに依らぬ)のことである。

(4) $Y_{j+1}^{(\infty)} = Y_j^{(\infty)}C_j^{(\infty)} \qquad j=1,\cdots,M$

同様に，$x=0$ における Stokes係数は，

(5) $Z_{j+1}^{(0)} = Z_j^{(0)}C_j^{(0)} \qquad j=1,\cdots,M'$

によって定義される。又，対角行列 $D^{(\infty)}$, $D^{(0)}$ のことを，各々 $x=\infty$ $x=0$ での形式的モノドロミーと呼ぶことにする。$Y_1^{(\infty)}$ と $Z_1^{(0)}$ の接

続についてであるが，x に依存しない非特異行列 Q が存在して

(6) $K^{-1}Y_1^{(\infty)} = Z_1^{(0)}Q$

という関係によって，$Y_1^{(\infty)}$ と $Z_1^{(0)}$ は，結ばれている。又，補題1により，$Y_1^{(\infty)}$ は，$x=a_i$ の近傍で，次の様な表示をもつ。

(7) $Y_1^{(\infty)} = (x-a_i)^{J_i(t)}\Phi_i(x;t)$

ただし，$\Phi_i(x;t)$ は，x については，$x=a_i$ の近傍で正則，t については，Γ で正則，かつ $\det\Phi_i(a_i;t)\neq 0$ とする。又 $J_i(t)$ は，Γ で正則かつ，固有値は 0 と 1（従って，$J_i^2=J_i$）である。$\Phi_i(x,t)$ の冪展開を，$\Phi_i(x,t) = \sum_{k=0}^{M}\Phi_i^{(k)}(t)(x-a_i)^{(k)}$ とする。

さて，以上の situation の下に我々は，次の定理を得る。

定理2　以下に述べる条件をみたす解の基本系の組，$\{Y_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{M+1}$ $\{Z_j\}_{j=1}^{M+1}$ が存在したとせよ。

条件1；　$dC_j^{(\infty)}=0,\ \forall j$ かつ $dD^{(\infty)}=0$

条件2；　$dC_j^{(0)}=0$ for $\forall j$ かつ $dD^{(0)}=0$

条件3；　$dQ=0$

条件4；　$-dJ_i\cdot J_i + (I-J_i)(d\Phi_i^{(0)}\cdot\Phi_i^{(0)-1})J_i=0$ for $\forall i$

このとき微分方程式(1)の係数 E, F, G, H_i $(i=1,\cdots,N)$ 及び K は次の非線型微分方程式系をみたさねばならない。

(8) $\{dG, F+\sum_{i=1}^{N} H_i\}_G = dK\cdot K^{-1} - K\,[d\hat{E}, F]_{\hat{E}}\,K^{-1}$

(9)
$$\begin{cases} [\Phi, G]=0, \quad dG = \Phi + [\Phi, F+\sum_{i=1}^{N} H_i] + [\Psi, G] \\ dF = [\Phi, E] + [\Theta, G] - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}[\Theta, H_i] + [\Psi, F] \\ dE = -\Theta + [\Psi, E] + [\Theta, F], \quad [\Theta, E]=0 \\ dH_i = [a_i\Phi + \Psi + \frac{1}{a_i}\Theta, H_i] \end{cases}$$

(10)
$$\begin{cases} \Phi\wedge\Phi = 0, \quad d\Phi = [\Phi, \Psi]_+ \\ d\Psi = \Psi\wedge\Psi + [\Phi, \Theta]_+ \\ d\Theta = [\Theta, \Psi]_+, \quad \Theta\wedge\Theta = c \end{cases}$$

ただし，d は，パラメーター t に関する外微分を意味し，Ψ, Γ, Θ は次の式で定義される 1-form である。

$\Phi = dG$

$\Psi = \{dG, F+\sum_{i=1}^{N} H_i\}_G$

$\Theta = -K d\hat{E} K^{-1}$

又，ブラケット $\{\ ,\ \}$ は，$A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $X = (x_{ij})$ （Λ は matrix or 1-form）に対して，次の様に定義される。（A は generic とする。）

$$\{\Lambda; X\}_A \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \begin{cases} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{a_i - a_j} x_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

証明　我々は，$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1} = \Omega$ という 1-form を，条件 1〜4 の下で決定する。$Y_1^{(\infty)}$ の $x=\infty$ での局所モノドロミーは，$e^{2\pi i D_x^{(\infty)}}$

$C_M^{(\infty)^{-1}} \cdots C_1^{(\infty)^{-1}}$ であるから、条件1が成立するとすれば、$Y_1^{(\infty)}$ の $\chi=\infty$ での局所モノドロミーは、パラメーター t に依らない。従って、$dY_1^{(\infty)} \cdot Y_1^{(\infty)^{-1}}$ は、$\chi=\infty$ の近傍で一価である。又、$Y_1^{(\infty)}$ の漸近展開の式から

$$dY_1^{(\infty)} \cdot Y_1^{(\infty)^{-1}} \approx d\hat{Y}^{(\infty)} \cdot \hat{Y}^{(\infty)^{-1}} + \chi\left(\hat{Y}^{(\infty)} dG \hat{Y}^{(\infty)^{-1}}\right) \quad in\ S_1 \times T$$

となることがわかるが、$dC_j^{(\infty)} = 0$ より $dY_1^{(\infty)} \cdot Y_1^{(\infty)^{-1}} = dY_j^{(\infty)} \cdot Y_j^{(\infty)^{-1}}$ $(j=2,\cdots,M)$ であるから上の漸近展開の式は、実は、$\chi=\infty$ の全近傍で成立する。$dY_1^{(\infty)} \cdot Y_1^{(\infty)^{-1}}$ が $\chi=\infty$ の近傍で一価であるという事実と合せて、結局、漸近展開の式の右辺は、$dY_1^{(\infty)} \cdot Y_1^{(\infty)^{-1}}$ の $\chi=\infty$ での局所展開を与えるものである。即ち、

(11) $$dY_1^{(\infty)} \cdot Y^{(\infty)^{-1}} = d\hat{Y}^{(\infty)} \cdot \hat{Y}^{(\infty)^{-1}} + \chi\left(\hat{Y}^{(\infty)} dG \hat{Y}^{(\infty)^{-1}}\right) \quad at\ \chi=\infty$$

が成立する。同様の考察により

(12) $$dZ_1^{(0)} \cdot Z_1^{(0)^{-1}} = d\hat{\zeta}^{(0)} \cdot \hat{\zeta}^{(0)^{-1}} - \chi^{-1}\left(\hat{\zeta}^{(0)} d\tilde{E} \hat{\zeta}^{(0)^{-1}}\right) \quad at\ \chi=0$$

を得る。このことと、条件3より

(13) $$dY_1^{(\infty)} \cdot Y_1^{(\infty)^{-1}} = dK \cdot K^{-1} + K\left\{d\hat{\zeta}^{(0)} \cdot \hat{\zeta}^{(0)^{-1}} - \chi^{-1}\left(\hat{\zeta}^{(0)} d\tilde{E} \hat{\zeta}^{(0)^{-1}}\right)\right\} K^{-1} \quad at\ \chi=0$$

が成り立つ。次に、$dY_1^{(\infty)} \cdot Y_1^{(\infty)^{-1}}$ が $\chi=a_i$ の近傍でいかなる挙動を示すかを見よう。$J_i^2 = J_i$ という関係を用いれば、

$$(\chi-a_i)^{J_i} = \exp(J_i \log(\chi-a_i)) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} J_i^n \log^n(\chi-a_i) = I + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \log^n(\chi-a_i)\right) J_i$$

$$\therefore \quad (\chi-a_i)^{J_i} = I + ((\chi-a_i)-1) J_i$$

同様に、$(\chi-a_i)^{-J_i} = I + ((\chi-a_i)^{-1}-1) J_i$ である。この事実を用いて、$dY_1^{(\infty)} \cdot Y_1^{(\infty)^{-1}}$ の $\chi=a_i$ での局所表示が、次の如く求められる。

$$dY_1^{(\infty)}\cdot Y_1^{(\infty)-1} = \{-dT_i\cdot T_i + (I-T_i)(d\Xi_i^{(0)}\cdot \Xi_i^{(0)-1})T_i\}(x-a_i)^{-1}$$
$$+(\text{holomorphic term at } x=a_i)$$

従って,条件4より $dY_1^{(\infty)}Y_1^{(\infty)-1}$ は, $x=a_i$ で正則となる。以上により $dY_1^{(\infty)}Y_1^{(\infty)-1}$ は, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}-\{0,\infty\}$ で1価正則で, $x=0,\infty$ を各々1位の極としてもつことがわかった。その具体的な形は, 次の如くである。この定数項に関して, Gauge 整合条件が課される。

$$\text{定数項} = \{dG, F+\sum_{i=1}^{N} H_i\}_G = dK\cdot K^{-1} - K\{d\hat{E}, F\}_{\hat{E}}K^{-1}$$

これが, 方程式(8)である。又, $Y_1^{(\infty)}$ は, 次の extended system を満す。

$$(IK)\begin{cases} PY_1^{(\infty)}=0 \\ dY_1^{(\infty)}=\Omega Y_1^{(\infty)}, \end{cases} \qquad \Omega = xdG + \{dG, F+\sum_{i=1}^{N} H_i\}_G - x^{-1}Kd\hat{E}K^{-1}$$
$$\equiv x\Theta + \Omega + x^{-1}\textcircled{H}$$

この system の積分可能条件, $dP=[\Omega,P]$, $d\Omega=\Omega\wedge\Omega$ を計算することにより方程式(9),(10)を得る。 q.e.d.

remark 1 (8),(9),(10)の方程式の中には, trivialなものも混じっている。例えば, $[\Theta,G]=0$ 等である。

remark 2. 方程式(1)において係数行列の size を一般にし, かつ次の条件をおく。 $G=\mathrm{diag}(g_1,\cdots,g_n)$. $g_i\neq g_j$, $E=K\hat{E}K^{-1}$, $\hat{E}=\mathrm{diag}(e_1,\cdots,e_n)$ $(i\neq j)$ で H_i は, generic な行列(i.e 相異なる固有値の差 $\notin\mathbb{Z}$)とする。この場合の変形は次の様になる。解の基本系, 領域, $\{Y_j^{(\infty)}, S_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{M+1}$, $\{Z_j^{(0)}, S_j^{(0)}\}_{j=1}^{M'+1}$ を前述の如くとってくる。

$C_j^{(\infty)}, C_j^{(0)}, Q$ 等も同じ様に定義し，又、条件1,2,3も同じとする。ただ，条件4の代りに，

条件4'；$Y_1^{(\infty)}$ の $\chi=a_i$ のまわりでの局所モノドロミーは保存される。$(i=1,\cdots N)$

これらの条件のもとで，変形の方程式が得られるわけであるが，それらは，(8),(9),(10) と全く同じものであり，定理2に対応する定理も同様に成立する。見かけの特異点をもつときの変形は，このgenericな場合の極限として得られるように構成したのである。

§2 sine-Gordon 方程式 $u_{\xi\eta}+\sin u=0$ は，次の作用素方程式と同値であることが知られている。

(15), $[L,M]=0$

$$(16)\begin{cases} L=\dfrac{\partial}{\partial\xi}-\dfrac{i\lambda}{2}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}-\dfrac{iu_\xi}{2}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix} \\ M=\dfrac{\partial}{\partial\eta}-\dfrac{i\lambda^{-1}}{2}\begin{bmatrix}e^{-iu} & \\ & e^{iu}\end{bmatrix}\end{cases}$$

(15)は，次の方程式系，$L\Psi=0$, $M\Psi=0$, $\Psi={}^t(\psi_1,\psi_2)$ の可解条件である。今，Ψ として次の条件をみたす函数がとれたとしよう。

$$(17)\begin{cases} \Psi_n(\xi,\eta;\lambda)=\psi_n(\xi,\eta;\lambda)\exp P(\xi,\eta;\lambda) \\ \text{ただし，}\ \psi_n(\xi,\eta;\lambda)=\lambda^N+\sum_{j=0}^{N-1}\psi_{nj}(\xi,\eta)\lambda^j \qquad n=1,2\end{cases}$$

$$p=\frac{i}{2}(\lambda\xi+\lambda^{-1}\eta)$$

更に，ξ,η,λ に依らない定数 C_j,α_j $j=1,\cdots,N$ $(\alpha_i\neq\alpha_j,\ i\neq j\ \forall i)$ が存在して，

(18) $\Psi_n(\xi,\eta;\alpha_j)=(-)^{n-1}C_j\Psi_n(\xi,\eta;-\alpha_j)$ $n=1,2$ $j=1,\cdots,N$

という条件が成立するとき，$e^{iu}=\psi_{1,0}/\psi_{2,0}$，$u_\xi=\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1}$ となって u は s-G eq の N-soliton解となることが知られている。(Date[1]を参照)

この situation が，常微分方程式の変形理論と如何に結びつくかを説明しよう。我々は，次の行列函数を考察の対象とする。

$$\Psi=\begin{bmatrix}\Psi_1(\lambda) & \Psi_1(-\lambda)\\ \Psi_2(\lambda) & -\Psi_2(-\lambda)\end{bmatrix}$$

Ψ_1,Ψ_2 の定義から，Ψ は，$\lambda=0,\infty$ に1級の不確定特異点をもつ(λに関する)常微分方程式の解の基本系となっていることが，期待される。それでは，その方程式の係数の特異点は，$\lambda=0,\infty$ のみであろうか？ (18)は，$\det\Psi=0$ at $\lambda=\pm\alpha_j$ $j=1,\cdots,N$ を意味するから，$\lambda=\pm\alpha_j$ $j=1,\cdots,N$ は，明らかにこの方程式の特異点でなければならない。しかし，Ψ 自身は，それらの点において正則であるから，特異点は"見かけの特異点"となるはずである。さて Ψ の満すべき(λに関する常微分方程式が求ったとしよう，

亜は，$P_0=\{0,\infty\}$で1価正則ゆえモノドロミーは自明である。又，形式的モノドロミーも自明である。従って，亜の(ξ,η)-dependenceは，モノドロミー保存という形で想定される。それゆえ微分作用素，L，Mは，変形の接続型式Ωから導かれるに違いないであろう。

以上述べたことが，我々の基本的アイデアである。そして，このアイデアの多くは，（とりわけ亜という行列を考察物とすべきこと）岡本先生に負うものです。又，以下に述べる計算も，岡本先生との討論において教えられることの大であったものです。あらためて，岡本先生に感謝致します。

それでは，亜のみたすべき常微分方程式を求めよう。まずdet亜を計算する。

$$\begin{aligned}\Delta &\overset{\text{def}}{=} \det 亜\\ &= -\{亜_1(\lambda)亜_2(-\lambda)+亜_1(-\lambda)亜_2(\lambda)\}\\ &= r_N\lambda^{2N}+\cdots+r_0\end{aligned}$$

である。r_N, r_0は，$r_N=2(-)^{N-1}$，$r_0=-2\psi_{1,0}\psi_{2,0}$である。又．$\Delta=2(-)^{N-1}\times\prod_{i=1}^{N}(\lambda^2-\alpha_i^2)$ $(\because (18))$ 次に，

$$\begin{aligned}A(\lambda,\xi,\eta) &\overset{\text{def}}{=} \frac{d亜}{d\lambda}亜^{-1}\\ &= \Delta^{-1}\begin{bmatrix}-亜_1'(\lambda)亜_2(-\lambda)+亜_1'(-\lambda)亜_2(\lambda) & -亜_1(\lambda)亜_1(-\lambda)-亜_1'(-\lambda)亜_1(\lambda)\\ -亜_2'(\lambda)亜_2(-\lambda)-亜_2'(-\lambda)亜_2(\lambda) & -亜_2'(\lambda)亜_1(-\lambda)+亜_2'(-\lambda)亜_1(\lambda)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

とおく。又, $A(\lambda)=\Delta^{-1}B(\lambda)$ によって, Bを定義する。Bの各成分 B_{ij} は, 次の様になる。B_{11}, B_{22} は奇函数で,

$$B_{11}=\lambda\sum_{\ell=-1}^{N-1}a_{1,\ell}\lambda^{2\ell},\quad \text{where } a_{1,N-1}=2(-)^{N-1}\left\{N^{-}+(\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1})\frac{i\xi}{2}\right\}$$

同様に,

$$B_{22}=\lambda\sum_{\ell=-1}^{N-1}a_{2,\ell}\lambda^{2\ell},\quad \text{where } a_{2,N-1}=2(-)^{N-1}\left\{N^{-}+(\psi_{2,N-1}-\psi_{1,N-1})\frac{i\xi}{2}\right\}$$

となる。B_{12}, B_{21} は, 偶函数であり,

$$B_{nm}=\sum_{\ell=-1}^{N}b_{nm,\ell}\lambda^{2\ell}\qquad (n,m)=(1,2)$$

$$b_{nm,N}=(-)^{N-1}i\xi,\quad b_{nm,-1}=\psi_{n,0}^{2}i\eta$$

となる。従って, $A(\lambda,\xi,\eta)$ は, 次の様にあらわせられるλの有理式である。

$$A=\Delta^{-1}\left\{\begin{bmatrix} & b_{12,N}\\ b_{21,N} & \end{bmatrix}\lambda^{2N}+\begin{bmatrix} a_{1,N-1} & \\ & a_{2,N-1}\end{bmatrix}\lambda^{2N-1}+\cdots+\begin{bmatrix} & b_{12,-1}\\ b_{21,-1} & \end{bmatrix}\lambda^{-2}\right\}$$

$$=\lambda^{-2}E+\lambda^{-1}F+G+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{H_j^{(+)}}{\lambda-\alpha_j}+\frac{H_j^{(-)}}{\lambda+\alpha_j}\right)$$

ただし,

(19) $$G=\lim_{\lambda\to\infty}A(\lambda)=\frac{i\xi}{2}\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}$$

(20) $$E=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{2}A(\lambda)=\frac{-i\eta}{2}\begin{bmatrix} & \psi_{1,0}/\psi_{2,0}\\ \psi_{2,0}/\psi_{1,0} & \end{bmatrix}$$

(21) $$F+\sum_{j=1}^{N}H_j^{(\pm)}=\lim_{\lambda\to\infty}(A(\lambda)-G)\lambda=\begin{bmatrix} N+(\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1})\frac{i\xi}{2} & \\ & N+(\psi_{2,N-1}-\psi_{1,N-1})\frac{i\xi}{2}\end{bmatrix}$$

である。次に, $H_j^{(\pm)}$ の固有値を求めてみよう。

$$\mathrm{tr}\, H_j^{(\pm)} = \lim_{\lambda\to\pm\alpha_j} \mathrm{tr}\,(\lambda \mp \alpha_j) A(\lambda)$$

$$= \lim_{\lambda\to\pm\alpha_j} \frac{(\lambda\mp\alpha_j)\times\{\Psi_1(\lambda)\Psi_2(-\lambda)+\Psi_1(-\lambda)\Psi_2(\lambda)\}'}{\{\Psi_1(\lambda)\Psi_2(-\lambda)+\Psi_1(-\lambda)\Psi_2(\lambda)\}} = 1$$

又, $\det B(\lambda)|_{\lambda=\pm\alpha_j} = -\{\Psi_1'(\lambda)\Psi_2'(-\lambda)+\Psi_1(-\lambda)\Psi_2(\lambda)\}\Delta\big|_{\lambda=\pm\alpha_j} = 0$ であるから, $\det H_j^{(\pm)} = 0$。よって, $H_0^{(\pm)}$の固有値は, 1, 0 である。

これで, Ψのみたすべき常微分方程式 $\frac{d\Psi}{d\lambda} = A\Psi$ に関する情報がすべてわかったことになる。この方程式の変形は, 我々が§1で構成した理論の射程内にある。変形の接続形式を求めてみよう。

まず, Gを対角化する。$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ とおくと, $TGT^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ である。そして, 常微分作用素 $T\left(\frac{d}{d\lambda} - A\right)T^{-1}$ に対して, 変形の接続形式 Ω を§1に従って計算すると次の様になる。

$$\Omega = \lambda T\,dG\,T^{-1} + \left\{T\,dG\,T^{-1},\ T\left(F + \sum_{j=1}^{N} H_j^{(\pm)}\right)T^{-1}\right\}_{TGT^{-1}} - \lambda^{-1} K\,d\hat{E}\,K^{-1}$$

ただし, $\hat{E}$ は E を対角化した行列, K は, $TET^{-1} = K\hat{E}K^{-1}$ をみたす行列とする。我々の目標物は, Ω 自身ではなくて, $T\Omega T$ である。

$$T\Omega T = \lambda\, dG + T\left\{T\,dG\,T^{-1},\ T\left(F + \sum_{j=1}^{N} H_j^{(\pm)}\right)T^{-1}\right\}T - \lambda^{-1}(T^{-1}K)\,d\hat{E}\,(K^{-1}T)$$

この式に, (19), (20), (21) を代入して, 若干の計算の後, 次の諸式を得る.

$$(T^{-1}K)\,d\hat{E}\,(K^{-1}T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} & \psi_{10}/\psi_{20} \\ \psi_{20}/\psi_{10} & \end{bmatrix} d\eta$$

$$T^{-1}\{TdGT^{-1},\ T(F+\sum_{j=1}^{N}H_j^{(\pm1)})T^{-1}\}T=\frac{i}{2}(\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1})\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}d\xi$$

結局，$T^{-1}\Omega T$は，次の様に極めて単純な式となる。

$$(22)\quad T^{-1}\Omega T=\left\{\frac{i}{2}\lambda\begin{bmatrix}&1\\1&\end{bmatrix}+\frac{i}{2}(\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1})\begin{bmatrix}1&\\&-1\end{bmatrix}\right\}d\xi$$

$$+\frac{i}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}&\psi_{1,0}/\psi_{2,0}\\ \psi_{2,0}/\psi_{1,0}&\end{bmatrix}d\eta$$

従って，L-M pairは

$$(23)\quad\begin{cases}L=\dfrac{\partial}{\partial\xi}-\dfrac{i}{2}\lambda\begin{bmatrix}&1\\1&\end{bmatrix}-\dfrac{i}{2}(\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1})\begin{bmatrix}1&\\&-1\end{bmatrix}\\ M=\dfrac{\partial}{\partial\eta}-\dfrac{i}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}&\psi_{1,0}/\psi_{2,0}\\ \psi_{2,0}/\psi_{1,0}&\end{bmatrix}\end{cases}$$

$e^{iu}=\psi_{1,0}/\psi_{2,0}$, $u_\xi=\psi_{1,N-1}-\psi_{2,N-1}$ とおけば，(23)はまさに(16)に他ならない。

<u>remark 1</u>　我々の変形理論から，直接に，$d\Psi=\Omega\Psi$ (or $L\Psi=0$, $M\Psi=0$) が従うというのではないが，岡本先生は計算により，このことを確かめられている。

<u>remark 2</u>　u を s-Geq の similarity solution (相似解) とする。このとき，$L\Psi=0$, $M\Psi=0$ の解Ψに対して，Ψのみたすべき，λに関する常微分方程式は，

$$\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}-\frac{i\lambda}{2}\begin{bmatrix}\xi&\\&\xi\end{bmatrix}-\frac{i}{2}u_\xi\begin{bmatrix}\xi&\\&-\xi\end{bmatrix}+\frac{i}{2}\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}&\eta e^{iu}\\ \eta e^{-iu}&\end{bmatrix}\right)\Psi=0$$

この方程式に対して，変形理論を構成すると，変形の接続形

式Ωを求めると次の様になる。

$$\Omega=\left(\frac{1}{2}\lambda\begin{bmatrix}1&\\&-1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}u_x\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}\right)d\xi+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}&e^{-iu}\\e^{iu}&\end{bmatrix}d\eta$$

これは，(22)と全く同じである。

以上でsine-Gordon方程式のN-soliton解の場合について，isospectral deformationを（見かけの特異点をもつ）線型常微分方程式系のmonodromy preserving deformationの立場から捉えることに成功したわけであるが，顧みればこの様な立場は，Zakharov-Mikhailov[5]のRiemann-Hilbert問題を応用するformalismと極めて密接な関連があるように思われる。いなむしろ彼らのschemeを微分方程式のmonodromy-preserving-deformationという観点から徹底化したものとも言えよう。いずれにせよ，両者の理論の関連は，我々の理論の適用例を見出す問題とともに，今後究明されねばならない重要な課題であろう。

参考文献

[1] E. Date ; On a Direct Method of Constructing multi-soliton solution (to appear)

[2] I. M. Krichever ; Integration of Non-linear Equations by the Method of Algebraic Geometry. Fuct. Anal and Its Appl, 11(1) 15-31 (1977)

[3] V. E. Zakharov and A. B. Shabat ; A Scheme for Integrating the non-linear Equations of Mathematical Physics by the Method of Inverse Scattering Problem I, Fuct. Anal and Its Appl, 8, 226~235 (1974)

[4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur ; The Inverse Scattering Transform - Fourier Analysis for non-linear Problems, Studies in Appl Math vol LIII No 4 (1974)

[5] V. E. Zakharov and A. V. Mikhairov ; Relativistically Invariant Two-dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Scattering Problem Technique

[6] K. Ueno ; 線型常微分方程式系の変形理論 ; 京大修士論文

[7] K. Ueno ; The theory of Deformation of a Differential Equation with Irregular Singular Points (to appear)