数理解析研究所講究録
356巻 1979年 40-45

Derivations on Unbounded Operator Algebras

福大　理　　井上　淳
九大　理　　太田昇一

1. 序論.　C^*環（von Neumann環）の非有界微分子が、近年多くの人々によって、研究され発展して来ました。この講演では、次のような問題に関連して、非有界作用素環上の微分子を考察します；すなわち、"C^*－環におけるnorm-closedな非有界微分子は、適当な表現によって、Spatialになっているか？"。　MをあるHilbert空間$\mathfrak{H}$上のvon Neumann環とし、δをMにおける＊－微分子とします。　さらに、適当なSelf-adjoint作用素Hで　$H\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$　かつ　$a\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$　for $^\forall a \in \mathcal{D}(\delta)$　の条件を満たして、　$\delta(a)\xi = i[H, a]\xi$　for $^\forall a \in \mathcal{D}(\delta)$, $^\forall \xi \in \mathcal{D}(H)$　となっているものが存在するとしますと、我々は　$\mathcal{D}(\delta)$とHによって生成される非有界作用素環上の微分子を構成することが出来る。　逆に、特別な非有界作用素環（EW^*－環）$\mathfrak{A}$上の微分子が、$\mathfrak{A}$の元によってspatialになっているならば、あるvon Neumann環におけるσ-strongly

closed な微分子を構成することが出来ます。 この立場から、非有界作用素環上の微分子を研究することにします。

2．一般の $*$ - 環上の微分子．　まず初めに、非有界作用素環に関する定義を述べます。 $\mathcal{D}$ を pre-Hilbert 空間（その完備化を $\mathfrak{H}$）とし，$\mathcal{D}$ 上の全ての linear operator を $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ と書くことにします。

$$\mathcal{L}^{\#}(\mathcal{D}) \equiv \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{D});\ {}^{\exists}A^{\#} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}) \text{ with } (A\xi|\eta) = (\xi|A^{\#}\eta) \text{ for } {}^{\forall}\xi, \eta \in \mathcal{D}\}。$$

$\mathcal{L}^{\#}(\mathcal{D})$ は $A \rightarrow A^{\#}$ なる対合で $*$-環になります。 $\mathcal{L}^{\#}(\mathcal{D})$ の $*$-部分環を $\mathcal{D}$ 上の $\#$ - 環と呼ぶことにします。 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{D}$ 上の $\#$-環としたときに、 $\mathcal{A}_b \equiv \{A \in \mathcal{A};\ \overline{A} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})\}$（ただし，$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ は $\mathfrak{H}$ 上の有界線形作用素の全体とする）とし、$\mathfrak{H}$ 上の identity operator を含む $\mathcal{A}$ が、もし、${}^{\exists}(1 + A^{\#}A)^{-1} \in \mathcal{A}_b$ for ${}^{\forall}A \in \mathcal{A}$ のときsymmetric と呼びます。 さらに、$\overline{\mathcal{A}_b}$ が C^*-環（W^*-環）なる symmetric $\#$ - 環を $EC^{\#}$ - 環（$EW^{\#}$ - 環）と呼ぶことにします。 次に $*$-微分子の定義を述べます。 $\mathcal{B}$ を一般の $*$-環とします。 $\mathcal{B}$ における線型写像 δ が $*$-微分子であるとは，

(1) 定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ が $*$ - 部分環である，

(2) $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$,　$\delta(A^*) = \delta(A)^*$

for all $A, B \in \mathcal{D}(\delta)$

の条件(1)〜(2)を満たすものである。 特に、#-環$\mathcal{A}$上の*-微分子($\mathcal{D}(\delta)=\mathcal{A}$)を#-微分子と呼ぶことにします。 #-環$\mathcal{A}$上の#-微分子$\delta$が、ある$H=H^{\#}\in\mathcal{A}$によって

$$\delta(A)=i[H,A]\ (=i(HA-AH))\quad \text{for}\ A\in\mathcal{A}$$

と書かれているとき、このような微分子をHによってimplementされるspatial微分子と呼ぶことにします。

Aを単位元eをもつ*-環とし、fを**A**上のpositive linear functionalとする。 fによるG-N-S表現を$\{\pi_f, \lambda_f, \mathfrak{H}_f\}$と書くと、$\pi_f(\mathbf{A})$は$\lambda_f(\mathbf{A})$上の#-環になる(対合は$\pi_f(a)^{\#}\equiv\pi_f(a^*)$)。

命題; $\mathcal{L}^{\#}(\mathcal{D})$上の任意の#-微分子はspatialである。

fを*-環**A**上のpositive linear functionalとする。

$$\mathcal{D}(\pi_f^*)\equiv\bigcap_{a\in\mathbf{A}}\mathcal{D}(\pi_f(a)^*)\quad \text{とし}$$

$$\pi_f^*(a)\xi\equiv\pi_f(a^*)^*\xi\quad (a\in\mathbf{A},\ \xi\in\mathcal{D}(\pi_f^*))$$

と定義すると、π_f^*は**A**から$\mathcal{L}(\mathcal{D}(\pi_f^*))$へのhomomorphismになる。

定理; δを単位元eをもつ*-環**A**上の*-微分子とする。fを**A**上のpositive linear functionalとしたとき、次の(1)と(2)は同値である。

(1) $|f(\delta(ba))|^2 \leqq \gamma_b\, f(a^*a)$ *for all* $a, b \in \mathbf{A}$, ここに、γ_bはbにのみ依存する定数である。

(2) ある *linear operator* $H \in \mathcal{L}(\lambda_f(\mathbf{A}), \mathcal{D}(\pi_f^*))$ で次の条件(a)〜(c)を満たすものが存在する；

(a) Hは$\mathfrak{H}_f$上の symmetric *operator*,

(b) $(H\lambda_f(e) \mid \lambda_f(a)) = -(\lambda_f(a^*) \mid H\lambda_f(e))$ *for* $\forall a \in \mathbf{A}$,

(c) $\delta_{\pi_f}(\pi_f(a))\lambda_f(b)$ $(= \pi_f(\delta(a))\lambda_f(b))$

$$= i[H, \pi_f^*(a)]\lambda_f(b) \quad \textit{for } \forall a, b \in \mathbf{A}。$$

3. *Left* $EW^{\#}$-環上の微分子.

$\mathfrak{A}$を pre-*Hilbert*空間とし，(その内積を$(\cdot|\cdot)$によって示す)，しかも$*$-環であるとする。$\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$を$\mathfrak{A}$の *Hilbert Completion* とする。$\mathfrak{A}$が次の条件を満たすとする；

(1) $(\xi \mid \eta) = (\eta^* \mid \xi^*)$ (2) $(\xi\eta \mid \zeta) = (\eta \mid \xi^*\zeta)$

for $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{A}$. このとき，各$\xi \in \mathfrak{A}$に対して、

$\pi(\xi)\eta \equiv \xi\eta$ $\pi'(\xi)\eta = \eta\xi$ *for* $\eta \in \mathfrak{A}$ で定義すると，各$\pi(\xi)$, $\pi'(\xi)$は$\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$における *closable operator* になる。さらに(1)(2)の条件に、

(3) $\mathfrak{A}_0^2$ が $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$において *dense* である

と仮定したとき、$\mathfrak{A}$を *unbounded Hilbert* 環 *over* $\mathfrak{A}_0$ *in* $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$と呼ぶことにする。ここに、$\mathfrak{A}_0 \equiv \{\xi \in \mathfrak{A};\ \overline{\pi(\xi)} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}(\mathfrak{A}))\}$

であるとする。このとき$\mathfrak{A}_0$はHilbert環でそのHilbert completionは$\mathfrak{H}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{H}$となる。

π_0, (π_0')を$\mathfrak{A}_0$のleft (right) regular表現とする。さらに$\mathcal{U}_0(\mathfrak{A}_0)$を$\mathfrak{A}_0$のleft von Neumann環とし、$\phi_0$を$\mathcal{U}_0(\mathfrak{A}_0)^+$上のnatural traceとする。

$$L_2^{\omega}(\phi_0) \equiv \bigcap_{2 \leqq p < \infty} L^p \qquad (L^p \equiv L^p(\phi_0))$$

$$L_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0) \equiv \{ x \in \mathfrak{H} ;\ \overline{\pi_0(x)} \in L_2^{\omega}(\phi_0) \}$$

と定義すると、$L_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0)$はunbounded Hilbert環になる。$L_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0)$のleft regular表現を$\pi_2^{\omega}$とすると、$L_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0)$は$\pi_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0)$と$\mathcal{U}_0(\mathfrak{A}_0)$のもとに不変であることがわかる。$\pi_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0)$と$\mathcal{U}_0(\mathfrak{A}_0)$を$L_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0)$に制限した#－環によって生成される$L_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0)$上の#－環を$\mathcal{U}(\mathfrak{A})$で示し、それをleft EW#－環と呼ぶことにする。

$\mathfrak{M}$をϕ_0に関するmeasurable operator全体からなる集合とし、そこにstrong product, strong sumによって導入されるstrong commutatorを次のように定義する；

$$[\![A, B]\!] = A \cdot B - B \cdot A \quad \text{for } {}^{\forall}A, B \in \mathfrak{M}.$$

これらの記号のもとに、

<u>定理:</u> $\mathfrak{A}$をunbounded Hilbert環 over $\mathfrak{A}_0$ in $\mathfrak{H}$とし、δをその$\mathfrak{A}$によって作られるleft EW#－環$\mathcal{U}(\mathfrak{A})$上の#－微分子とする。もしも$\delta$が$t_s$-連続で、$\delta$の値域が

$\pi_2^{\omega}(\mathcal{L}_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0))$に含まれるならば、各 p ($2 \leqq p < +\infty$) に対して、L^p に含まれるある self-adjoint operator H_p が存在して、

$$\delta(A)\xi = i \cdot [\![H_p, \bar{A}]\!] \xi$$

for $^{\forall}A \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$, $\xi \in \mathcal{L}_2^{\omega}(\mathfrak{A}_0)$

が成り立つ。

ここに、t_s - 連続とは、$\mathcal{U}(\mathfrak{A})$に $\{ P_\xi(A) = \| A\xi \| ; \xi \in \mathcal{D} \}$ なる semi-norm の族によって生成される locally convex topology で連続ということである。

この講演では、以上を中心に述べるが詳しくは、次の preprint " Derivations on Algebras of Unbounded Operators by A. Inoue and S. Ôta " を参照して下さい。